MAA10 2018 ratkaisut

1. Laske, kuinka monta

   a) erilaista veikkausriviä on, kun veikkauksessa valitaan arvaus 1 (kotivoitto), $\times$ (tasapeli) tai 2 (vierasvoitto) kolmessatoista jalkapallopelikohteessa.

   b) eri maaliinsaapumisjärjestystä on ravilähdössä, jossa kilpailee 12 hevosta

   c) erilaista lottoriviä on vikinglotossa, jossa arvotaan kuusi numeroa numeroista 1–48.

   Ratkaisu: a) Kohteita on 13, ja kussakin kolme vaihtoehtoa, joten tuloperiaatteen nojalla rivejä on $3^{13} = 1\,594\,323$ kappaletta.

   b) Saapumisjärjestyksiä on $12! = 479\,001\,600$ kappaletta, koska voittajaksi on 12 vaihtoehtoa, toiseksi tuleelle 11 jne.

   c) Lottorivejä on

$$\binom{48}{6} = 12\,271\,512.$$

   VASTAUS: a) 1 594 323 kpl b) 479 001 600 kpl c) 12 271 512

2. Lailan koulumatkalla on kolmet jalankulkuvalot. Näistä ensimmäinen on vihreä todennäköisyydellä 0,35, toinen todennäkäisyydellä 0,40 ja kolmas todennäköisyydellä 0,15. Millä todennäköisyydellä Laila joutuu pysähtymään a) kaikissa valoissa b) tarkalleen yksissä valoissa?

   Ratkaisu: a) Merkitään $P_n =$"n:s valo punainen" ja $V_n =$"n:s valo on vihreä". Nyt riippumattomien tapahtuminen tulosäännö mukaisesti

$$P(P_1 \text{ ja } P_2 \text{ ja } P_3) = P(P_1)P(P_2)P(P_3) = (1-0,35)(1-0,40)(1-0,15) = 0,3315.$$

   b)

$$P(\text{Pysähtyy ainakin kerran}) = 1 - P(\text{ei pysähdy kertaakaan} = 1 - 0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}979$$

   VASTAUS: a) 0,33 b) 0,98.

3. Laatikossa on 2 punaista, 3 sinistä ja neljä mustaa palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään 2 palloa niin, että **a)** ensin nostettu pallo palautetaan taisin **b)** ensin nostettua palloa ei palauteta takaisin. Millä todennäköisyydellä pallot ovat samanväriset?

   Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} P(\text{pallot ovat samanvärisiä}) &= P(\text{punaisia}) + P(\text{sinisiä}) + P(\text{mustia}) \\ &= \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9} \approx 0,35802 \approx 0,36 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} P(\text{pallot ovat samanvärisiä}) &= P(\text{punaisia}) + P(\text{sinisiä}) + P(\text{mustia}) \\ &= \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} \approx 0,2777 \approx 0,28 \end{aligned}$$

   VASTAUS a) $0,36$ b) $0,28$.

4. Jäljellä on 15 arpaa, joista kahdella saa 10 euroa ja ja yhdellä 25 euroa. Mikko ostaa yhden 2 euron hintaisen arvan. Olkoon satunnaismuuttuja X Mikon voitto. Määritä satunnaismuuttujan X a) jakauma b) odotusarvo.

Ratkaisu: a)

X (€)	$P(X)$
23	$\frac{1}{15}$
8	$\frac{2}{15}$
-2	$\frac{12}{15}$

b)

$$E(X) = \frac{1}{15} \cdot 23 + \frac{2}{15} \cdot 8 + \frac{12}{15} \cdot (-2) = 1.$$

VASTAUS: 1€.

5. Jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktion on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2), & \text{kun } -2 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

a) Laske todennäköisyys $P(X \leq 1,2)$

b) Laske todennäköisyys $P(0,5 \leq X \leq 1,5)$

c) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.

RATKAISU: a)

$$P(X \leq 1{,}2) = \int_{-\infty}^{1{,}2} f(x)\, dx = \int_{-2}^{1{,}2} \frac{3}{32}(4 - x^2)\, dx \approx 0{,}896. \qquad \text{(Laskimesta)}$$

b)

$$P(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5) = \int_{0{,}5}^{1{,}5} f(x)\, dx = \int_{0{,}5}^{1{,}5} \frac{3}{32}(4 - x^2)\, dx \approx 0{,}2734. \qquad \text{(Laskimesta)}$$

c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{3}{32}(4 - x^2)\, dx = 0. \qquad \text{(Laskimesta)}$$

VASTAUS: a) 0,90 b) 0,27 c) 0.

6. Matti teki tilastotutkimusta ihmisen pituudesta ja kysyi 50 henkilöltä heidän pituutensa. Matin aineisto löytyy on liitteenä.

a) Laske pituuksien keskiarvo ja keskihajonta

b) luokittele aineisto 5 cm välein ja piirrä aineistosta histogrammi

c) piirrä aineistosta kertymäkuvaaja ja määritä aineiston mediaani.

RATKAISU: a) LibreOfficen KESKIARVO-funktiolla tai laskimen tilastotoiminnoilla saadaan keskiarvo $\bar{x} \approx 174{,}7$. Vastaavasti KESKIHAJONTA.P-funktiolla tai laskimesta saadaan keskihajonta $D(X) \approx 8{,}0$

b) Ratkaisut erillisenä tiedostona.

c) Kertymäkuvaaja erillisessä tiedostossa. Mediaani 174 cm saadaan etsimällä taulukosta keksimmäinen arvo tai käyttämällä LibreOfficen MEDIAANI-funktiota tai laskimen tilastotoimintoja.

7. Lääketieteellisissä tutkimuksissa kunkin terveydentilaa kuvaavan numeeristen arvon (esim. hemoglobiini) ohjerajat määrätään normaalijakauman avulla niin, että lasketaan tutkittujen perusterveiden ihmisten arvojen keskiarvo μ ja keskihajonta σ. Rajat asetetaan $\mu - 2\sigma$ ja $\mu + 2\sigma$, jolloin 95% tutkituista perusterveistä ihmisistä saa testissä tälle välille kuuluvan arvon. Tanjalta mitataan perusteellisessa terveystarkastuksessa 16 erilaista (numeerista) arvoa. Mikä on todennäköisyys sille, että yksi tai useampi arvoista ei ole ohjerajojen välissä, vaikka Tanja olisi perusterve.

   Ratkaisu: Olkoon A =arvo on ohjerajojen välissä, jolloin $P(A) = 0,95$. Nyt

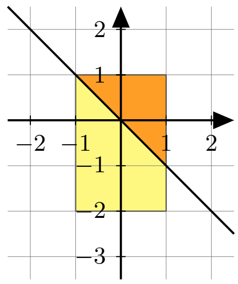
$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi arvo ei ole ohjerajojen välillä}) &= 1 - P(\text{kaikki arvot ovat rajojen välissä}) \\ &= 1 - 0,95^{16} \approx 0,5599. \end{aligned}$$

   VASTAUS: $0,56$ eli 56%.

8.

9. Arvotaan kaksi satunnaislukua, toinen väliltä $[-1, 1]$ ja toinen väliltä $[-2, 1]$. millä todennäköisyydellä summa on positiivinen. Millä todennälöisyydellä lukujen summa on positiivinen?

   Ratkaisu: Kyseessä on geometrinen todennäköisyys, jossa kaikki mahdolliset arvoparit ovat suorakaiteessa, joka pinta-ala on $2 \cdot 3 = 6$. Suotuisat tapaukset toteuttavat epäyhtälön $x + y > 0$ eli $y > -x$. Rajasuorana opn siis $y = -x$.
   Esimerkiksi testipisteen $(1, 1)$ avulla todetaan, että epäyhtälö toteutuu rajasuoran yläpuolella ja siten kysytty todennäköisyys on



$$P(x + y > 0) = \frac{\text{kolmion pinta-ala}}{\text{suorakaiteen pinta-ala}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}.$$

   VASTAUS: Todennäköisyydellä $\dfrac{1}{3}$.

10. Eräässä koripalloseurassa olevien pelaajien pituus noudattaa normaalijakaumaa keskihajonnan ollessa 4,8 cm. Mikä on pelaajien pituuksien keskiarvo, kun ringistä satunnaisesti valitun pelaajan pituus on yli 2,00 m todennäköisyydellä 0,0480?

    RATKAISU: Olkoon satunnaismuuttuja X pelaajan pituus. Nyt keskihajonta $\sigma = 4{,}8$ (cm). Merkitään pelaatjien pituuden keskiarvoa symbolilla μ.
    Arvoa 200 (cm) vastaava normitettu arvo on $z = \frac{200-\mu}{4{,}8}$.
    Saadaan siis yhtälö

$$\begin{aligned} P(X > 200) &= 0{,}0480 \\ P\left(Z > \frac{200 - \mu}{4{,}8}\right) &= 0{,}0480 \\ P\left(Z \leq \frac{200 - \mu}{4{,}8}\right) &= 1 - 0{,}0480 = 0{,}952. \end{aligned}$$

Katsotaan laskimesta käänteisen normaalijakauman arvo kun pinta-ala on 0,956, keskihajonta on 1 ja keskiarvo 0, jolloin saadaan

$$\frac{200-\mu}{4{,}8} = 1{,}664\,65\ldots,$$

mistä $\mu = 192{,}01\cdots \approx 192$.

VASTAUS: 192 cm.