Binomi 8 – Luku 14 – Tehtävien malliratkaisut

14.1

a)

Muodostetaan yhtälö $f(x)=0$ ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x-16 &= 0 \\ 2x &= 16 \quad \| :2 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x+3=0 \\ & \qquad\qquad x=-3 \end{aligned}$$

Tulon nollasääntö

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2-9x+20 &= 0 \\ x &= \frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot20}}{2\cdot1} \\ x &= \frac{9\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{9\pm1}{2} \\ x &= \frac{9+1}{2}=5 \quad \text{tai} \quad x=\frac{9-1}{2}=4 \end{aligned}$$

Ratkaisukaava:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Vastaus **a)** $x=8$

b) $x=0$ tai $x=-3$

c) $x=4$ tai $x=5$

14.2

a)

$$\begin{aligned} 5x + 2 &> 3x - 3 \\ 5x - 3x &> -3 - 2 \\ 2x &> -5 \quad \|: 2 \\ x &> -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 7x - 9 &\geq 10x - 6 \\ 7x - 10x &\geq -6 + 9 \\ -3x &\geq 3 \qquad \| : (-3) \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

Merkki kääntyy

c)

$$\begin{aligned} -6(x + 2) &\leq 4(-2x + 1) \\ -6x - 12 &\leq -8x + 4 \\ 2x &\leq 16 \qquad \| : 2 \\ x &\leq 8 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $x > -\frac{5}{2}$

b) $x \leq -1$

c) $x \leq 8$

14.3

a)

Funktio *f* saa negatiivisia arvoja, kun sen kuvaaja kulkee *x*-akselin alapuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) \leq 0$, kun $-1 < x < 0$.

b)

Funktio g saa negatiivisia arvoja tai arvon nolla, kun sen kuvaaja kulkee *x*-akselin alapuolella tai nollakohdassa.

Kuvaajan perusteella $g(x) \leq 0$, kun $x \leq -4$ tai $x \geq 3$.

c)

Tutkitaan kuvasta, milloin funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan alapuolella, tai milloin funktiot saavat samat arvot.

Kuvan perusteella $f(x) \leq g(x)$, kun $-2 \leq x \leq 1$.

Vastaus **a)** $-1 < x < 0$

b) $x \leq -4$ tai $x \geq 3$

c) $-2 \leq x \leq 1$

14.4

a)

Ratkaistaan ensin toisen asteen yhtälö $x^2 + 7x + 10 = 0$.

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

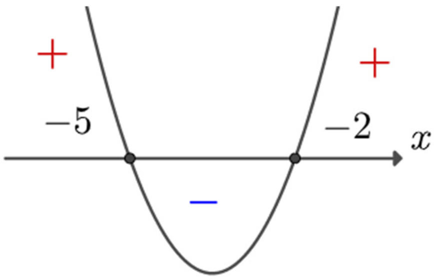
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

Ratkaisukaava:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-7+3}{2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7-3}{2} = -5$$

Funktion $f(x) = x^2 + 7x + 10$ toisen asteen termin kerroin on 1 eli positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja.



Kuvan perusteella $x^2 + 7x + 10 < 0$, kun $-5 < x < -2$.

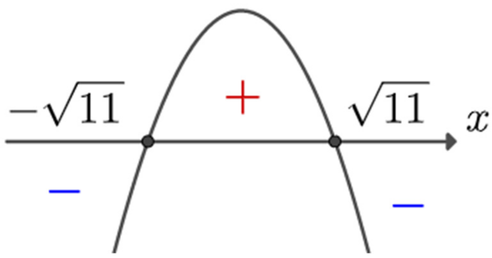
b)

$$-x^2 \leq -11$$
$$-x^2 + 11 \leq 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 11$ nollakohdat.

$$-x^2 + 11 = 0$$
$$-x^2 = -11$$
$$x^2 = 11 \quad \Big| \sqrt{}$$
$$x = \pm\sqrt{11}$$

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen. Hahmotellaan kuva.



Kuvan perusteella $-x^2 + 11 \leq 0$,
kun $x \leq -\sqrt{11}$ tai $x \geq \sqrt{11}$.

Vastaus **a)** $-5 < x < -2$ **b)** $x \leq -\sqrt{11}$ tai $x \geq \sqrt{11}$

14.5

a)
$x^2 - 6x + 29 \leq 6x - 3$
$x^2 - 12x + 32 \leq 0$

Ratkaistaan ensin funktion $f(x) = x^2 - 12x + 32$ nollakohdat.

$x^2 - 12x + 32 = 0$

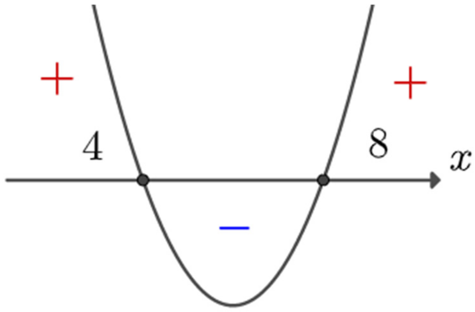
$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{12 + 4}{2} = 8 \quad \text{tai} \quad x = \frac{12 - 4}{2} = 4$$

Ratkaisukaava:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funktion $f(x) = x^2 - 12x + 32$ toisen asteen termin kerroin on 1 eli positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja.



Kuvan perusteella $x^2 - 12x + 32 \leq 0$,
kun $4 \leq x \leq 8$.

b)
$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \geq 0$
$-\frac{4}{8}x^2 + \frac{4}{8}x - \frac{1}{8} \geq 0 \quad \| \cdot 8$
$-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ nollakohdat.

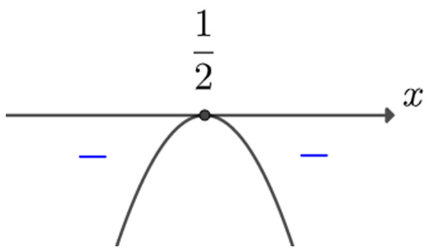
$-4x^2 + 4x - 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-4)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

Ratkaisukaava:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funktiolla f on vain yksi nollakohta. Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen. Hahmotellaan kuva.



Kuvaajan perusteella $-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$
vain kun $x = \frac{1}{2}$.

Vastaus **a)** $4 \leq x \leq 8$ **b)** $x = \frac{1}{2}$

14.6

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat. Funktion merkki päätellään nollakohdan ja kuvaajan aukeamissuunnan perusteella.

$$f(x) = 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

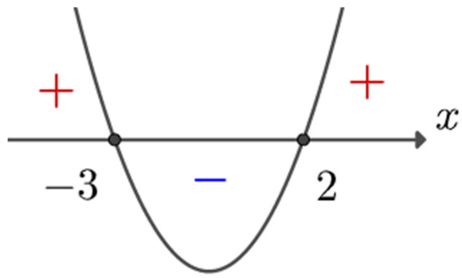
$ax^2 + bx + c = 0$

$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -6$

Ratkaisukaava:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin 1 on positiivinen.



Funktion arvot ovat siis

- positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > 2$
- negatiivisia, kun $-3 < x < 2$.

Vastaus Arvot ovat positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > 2$, ja negatiivisia, kun $-3 < x < 2$.

14.7

Suora kulkee funktion g alapuolella, kun suoran pisteiden y-koordinaatit ovat pienempiä kuin funktion g arvot.

Muodostetaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} y &< g(x) \\ 9x + 7 &< 5x^2 + 19x + 12 \\ -5x^2 - 10x - 5 &< 0 \qquad \parallel : (-5) \\ x^2 + 2x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan ensin funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ nollakohdat.

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

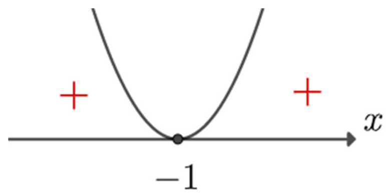
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funktiolla f on vain yksi nollakohta. Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Hahmotellaan kuva.



Kuvaajan perusteella $x^2 + 2x + 1 > 0$ aina, paitsi kun $x = -1$.

Suora kulkee siis funktion g alapuolella, kun $x \neq -1$.

Vastaus $x \neq -1$

14.8

Muodostetaan epäyhtälö.

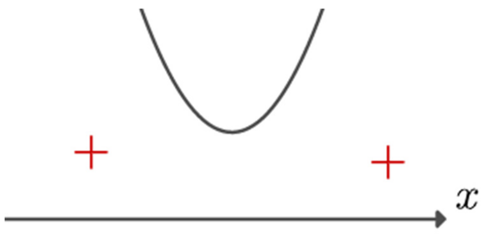
$$
\begin{aligned}
g(x) &> f(x) \\
4x^2 - 10x &> 3x^2 - 10x - 9 \\
x^2 + 9 &> 0
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan ensin funktion $h(x) = x^2 + 9$ nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9 &= 0 \\
x^2 &= -9
\end{aligned}
$$

Neliöyhtälöllä ei ole ratkaisuja, joten funktiolla h ei ole nollakohtia.

Funktion h kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Hahmotellaan kuva.



Kuvaajan perusteella $x^2 + 9 > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Funktio g saa siis suurempia arvoja kuin funktio g kaikilla muuttujan x arvoilla.

Vastaus kaikilla muuttujan x arvoilla

14.9

a)

Vuoden tenniskertojen lukumäärä on x ja tennisvuoro maksaa 8 € kerta.

Vuosikustannuksia euroina kuvaa lauseke $H(x) = 8x + 160$.

b)

Lasketaan, milloin vuosikustannukset jäävät alle 500 €.

$$8x + 160 < 500$$
$$x < 42{,}5$$

43 tennisvuoroa maksaisi vuodessa yli 500 €, joten Pihla voi käydä pelaamassa korkeintaan 42 kertaa.

Vastaus **a)** $H(x) = 8x + 160$ (€)

b) korkeintaan 42 kertaa

14.10

a)

Merenpinnan tasolla lämpötila on +15 °C ja jokainen kilometri lämpötila laskee 6,5 °C.

Keskilämpötilaa kuvaa siis lauseke $T(x) = 15 - 6{,}5x$, missä x on korkeus kilometreinä merenpinnasta.

b)

Lasketaan lämpötila, kun korkeus on 8849 m ≈ 8,849 km.

$T(8{,}849) = 15 - 6{,}5 \cdot 8{,}849 = -42{,}51 \approx -43\ (°\mathrm{C})$

Lämpötila on noin −43 °C.

c)

Ratkaistaan, milloin lämpötila on negatiivinen.

$$\begin{aligned} T(x) &< 0 \\ 15 - 6{,}5x &< 0 \\ x &> 2{,}307\ldots\ (\mathrm{km}) \end{aligned}$$

Lämpötila menee pakkasen puolelle, kun korkeus on yli 2,3 km.

Vastaus **a)** $T(x) = 15 - 6{,}5x$ °C

b) −43 °C

c) yli 2,3 km

14.11

a)

Julisteesta leikataan leveydestä ja pituudesta kaistale, jonka leveys on x (cm).

Julisteen uudet mitat ovat tällöin $50 - x$ (cm) ja $70 - x$ (cm). Pinta-ala on näiden tulo. Muodostetaan pinta-alan lauseke.

$A(x) = (50 - x)(70 - x) = x^2 - 120x + 3500\ (\text{cm}^2)$

b)

Kaistaleen leveys ei voi olla negatiivinen ja sen leveys voi olla korkeintaan lyhemmän sivun pituinen.

Muuttuja x voi siis saada arvoja väliltä $0 < x < 50$ (cm).

c)

Pinta-alan tulee olla vähintään 2500 cm^2. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan kaistaleen leveys x. Otetaan huomioon määrittelyväli $0 \leq x \leq 50$ (cm)

$$A(x) \geq 2500$$
$$x^2 - 120x + 3500 \geq 2500$$
$$0 < x \leq 9{,}0098\ldots$$

Kaistaleen leveys on oltava välillä $0 < x \leq 9{,}0$ (cm).

Vastaus **a)** $A(x) = x^2 - 120x + 3500\ (\text{cm}^2)$

b) $0 < x < 50$ (cm)

c) $0 < x \leq 9{,}0$ (cm)

14.12

a)

Keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 1] saadaan pisteiden (0, −5) ja (1, −3) kautta kulkevan suoran kulmakertoimesta.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - (-3)}{0 - 1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 1] on 2.

Keskimääräinen muutosnopeus välillä [2, 3] saadaan pisteiden (2, −1) ja (3, −5) kautta kulkevan suoran kulmakertoimesta.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5 - (-1)}{3 - 2} = \frac{-4}{1} = -4$$

Keskimääräinen muutosnopeus välillä [2, 3] on −4.

b)

Hetkellinen muutosnopeus saadaan kohtaan piirretyn tangentin kulmakertoimesta.

Kohtiin $x = 0$ ja $x = 2$ piirretyt tangentit ovat vaakasuoria, joten niiden kulmakerroin on 0.

Hetkelliset muutosnopeudet kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$ ovat 0.

Kohtaan $x = 1$ piirretty tangentti on nouseva suora, joka kulkee pisteiden (1, −3) ja (2, 0). Lasketaan kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-3)}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

Vastaus **a)** 2 välillä [0, 1], −4 välillä [2, 3]

b) kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$ hetkellinen muutosnopeus 0
kohdassa $x = 1$ hetkellinen muutosnopeus 3

14.13

a)

Lasketaan funktion arvot kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$.

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 7 = -2$
$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2 - 7 = 2$

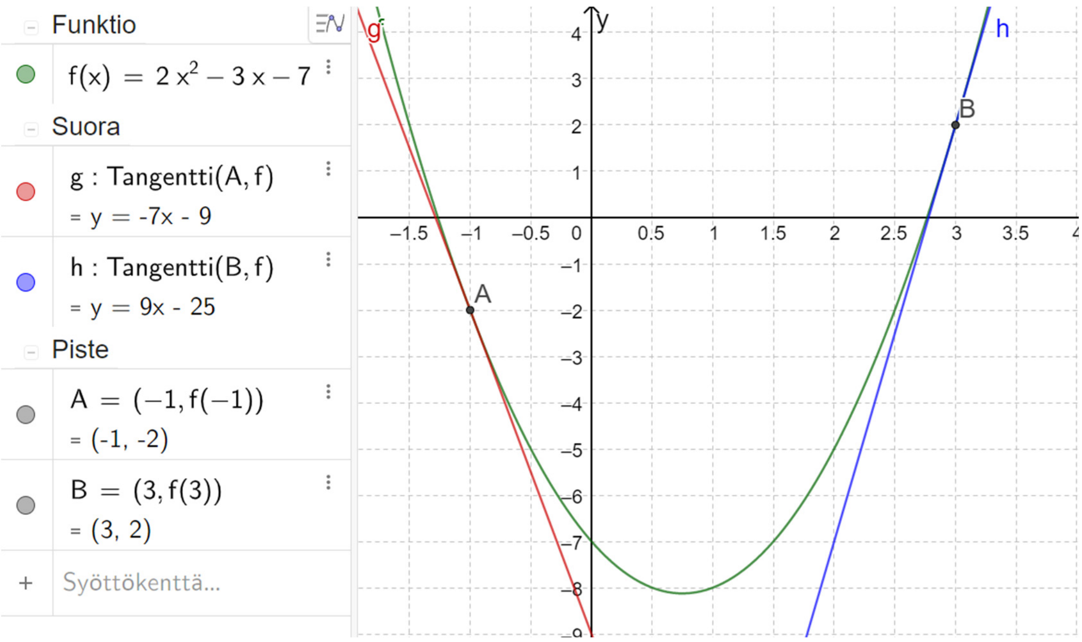
Keskimääräinen muutosnopeus on siis pisteiden $(-1, -2)$ ja $(3, 2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

Keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-1, 3]$ on 1.

b)

Piirretään funktion f kuvaaja ja tangentit kohtaan $x = -1$ ja $x = 3$.



Kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -7, joten hetkellinen muutosnopeus on -7.

Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 9, joten hetkellinen muutosnopeus on 9.

Vastaus **a)** 1 **b)** -7 kohdassa $x = -1$, 9 kohdassa $x = 3$

14.14

a) Ratkaistaan annetuilla tiedoilla $s = 30$ (m) ja $v = 50 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ verrannollisuuskerroin k.

$30 = k \cdot 50^2$
$k = 0{,}012$

Muodostetaan yhtälö, jossa $k = 0{,}012$ ja $s = 100$ ja ratkaistaan nopeus v.

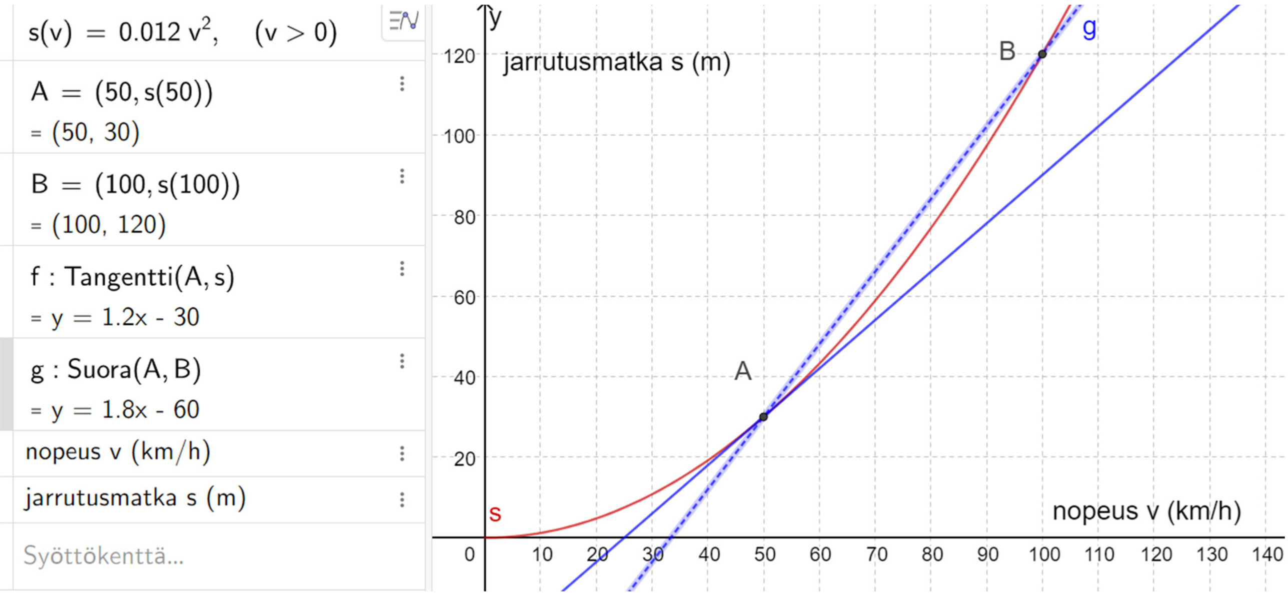
$100 = 0{,}012v^2$
$v = \pm 91{,}287 \ldots$

Vain positiivinen ratkaisu käy, joten $v \approx 91 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Piirretään funktion $s(v) = 0{,}012v^2$ kuvaaja.

Keskimääräinen muutosnopeus saadaan tarkasteluvälille [50, 100] piirretyn suoran kulmakertoimesta.

Hetkellinen muutosnopeus saadaan kohtaan $v = 50 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ piirretyn tangentin kulmakertoimesta.



Keskimääräinen muutosnopeus on siis tarkasteluvälille [50,100] piirretyn suoran kulmakerroin 1,8 $\left(\frac{\text{m}}{\text{km/h}}\right)$. Hetkellinen muutosnopeus on tangentin kulmakerroin 1,2 $\left(\frac{\text{m}}{\text{km/h}}\right)$.

Vastaus **a)** 91 km/h
b) keskimääräinen muutosnopeus 1,8 $\frac{\text{m}}{\text{km/h}}$, hetkellinen muutosnopeus 1,2 $\frac{\text{m}}{\text{km/h}}$

14.15

a)

Kuvaajan perusteella funktion arvo $g(1) \approx 3$.

b)

Kuvaajan perusteella funktion arvo $g(2) \approx 0$.

c)

Kuvaajan perusteella funktion arvo $g(3) \approx -3$.

d)

Kuvaajan perusteella kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on −1.
(y:n arvo pienenee aina yhdellä, kun x kasvaa yhdellä.)

$g'(1) \approx -1$

e)

Kuvaajan perusteella kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on −4.
(y:n arvo pienenee aina neljällä, kun x kasvaa yhdellä.)

$g'(2) \approx -4$

f)

Kuvaajan perusteella kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on −1.
(y:n arvo pienenee aina neljällä, kun x kasvaa yhdellä.)

$g'(3) \approx -1$

Vastaus	**a)** 3	**d)** −1
	b) 0	**e)** −4
	c) −3	**f)** −1

14.16

a)

Kuvaajan perusteella funktio saa arvon 1 kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$.

b)

Funktio negatiivisia arvoja, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.
Myös arvo nolla käy, joten nollakohdat otetaan väliin mukaan.

Kuvaajan perusteella $f(x) \leq 0$, kun $0 \leq x \leq 2$.

c)

Funktion derivaatta on negatiivinen tai nolla, kun funktiolle piirretty tangentti on laskeva tai vaakasuora. Välillä $-2 \leq x \leq 4$ tangentti on laskeva välillä $-2 \leq x \leq 1$.

Kuvaajan perusteella $f'(x) \leq 0$, kun $-2 \leq x \leq 1$.

Vastaus **a)** $x = -1$ ja $x = 3$

b) $0 \leq x \leq 2$

c) $-2 \leq x \leq 1$

14.17

a)

$f'(x) = -4 \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 2x^{2-1} - 6 \cdot 1 + 0 = -12x^2 + 10x - 6$

b)

$f'(x) = 11 \cdot 4x^{4-3} - 25 \cdot 2x^{2-1} - 1 - 0 = 44x^3 + 50x - 1$

Vastaus **a)** $f'(x) = -12x^2 + 10x - 6$

b) $f'(x) = 44x^3 + 50x - 1$

14.18

a)

Sievennetään funktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^5 - 3x^2) - (x^2 - 5x) \\ &= 2x^5 - 6x^2 - x^2 + 5x \\ &= 2x^5 - 7x^2 + 5x \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 2 \cdot 5x^{5-1} - 7 \cdot 2x^{2-1} + 5 = 10x^4 - 14x + 5$$

b)

Sievennetään funktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x - 2)(x + 8) \\ &= 3x \cdot x + 3x \cdot 8 - 2 \cdot x - 2 \cdot 8 \\ &= 3x^2 + 24x - 2x + 16 \\ &= 3x^2 + 22x + 16 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} + 22 \cdot 1 + 0 = 6x + 22$$

c)

Sievennetään funktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2(x - 1)^2 \\ &= x^2(x - 1)(x - 1) \\ &= (x^3 - x^2)(x - 1) \\ &= x^3 \cdot x - x^3 - x^2 \cdot x + x^2 \\ &= x^4 - x^3 - x^3 + x^2 \\ &= x^4 - 2x^3 + x^2 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 4x^{4-1} - 2 \cdot 3x^{3-1} + 2x^{2-1} = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

Vastaus **a)** $f'(x) = 10x^4 - 14x + 5$

b) $f'(x) = 6x + 22$

c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$

14.19

a)

$$f(x) = g(x)$$
$$2x^2 + x = 5x - 2$$
$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad \| : 2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$
$$x = \frac{2}{2} = 1$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b)

Derivoidaan funktio *f*.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} + 1 = 4x + 1$$

Vastaus **a)** $x = 1$

b) $f'(x) = 4x + 1$

14.20

a)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{4}{2} + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{8}{4} + \frac{4}{4} = \frac{11}{4}$$

Derivoidaan funktio ja lasketaan arvo $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$f'(x) = -2x - 4$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{2}{2} - 4 = 1 - 4 = -3$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x - 4 &= 0 \\ -2x &= 4 \quad \| : (-2) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

b) $x = -2$

14.21

Kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimen arvo on derivaatan arvo kyseisessä kohdassa.

Derivoidaan funktio.

$f'(x) = 6x^2 + 2$

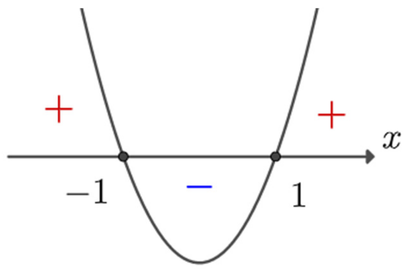
Muodostetaan epäyhtälö $f'(x) > 8$ ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} f'(x) &> 8 \\ 6x^2 + 2 &> 8 \\ 6x^2 - 6 &> 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan funktion $h(x) = 6x^2 - 6$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 6 &= 0 \quad \| :6 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \quad \| \sqrt{} \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Funktion h kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Hahmotellaan kuva.



Kuvaajan perusteella $6x^2 - 6 > 0$, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

Funktiolle f piirretyn tangentin kulmakerroin on suurempi kuin 8, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

Vastaus $x < -1$ tai $x > 1$

14.22

Tangentti on suoran suuntainen, kun niiden kulmakertoimet ovat samat.

Suoran $y = 2 - 3x$ kulmakerroin on −3.

Derivoidaan funktio f ja ratkaistaan, milloin derivaatta on −3.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{2}{3} + 0 = x - \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \\ x - \frac{2}{3} &= -3 \\ x &= -3 + \frac{2}{3} \\ x &= \frac{-9}{3} + \frac{2}{3} \\ x &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Vastaus $x = -\frac{7}{3}$

14.23

Derivoidaan funktiot.

$f'(x) = -3x^2 + 1$
$g'(x) = 3x^2 - 1$

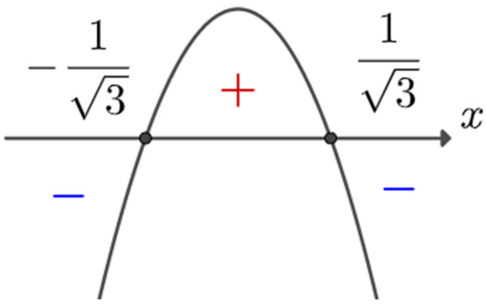
Sijoitetaan derivaatat epäyhtälöön ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} f'(x) &> g'(x) \\ -3x^2 + 1 &> 3x^2 - 1 \\ -6x^2 + 2 &> 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan funktion $h(x) = -6x^2 + 2$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} -6x^2 + 2 &= 0 \\ -6x^2 &= -2 \quad \| : (-6) \\ x^2 &= \frac{1}{3} \quad \| \sqrt{} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Funktion h kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen. Hahmotellaan kuva.



Kuvaajan perusteella $-6x^2 + 2 > 0$, kun $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vastaus $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

14.24

a)

Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen (tai nolla yksittäisessä kohdassa). Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava, kun $x \geq -6$.

b)

Funktio on aidosti kasvava, kun $x > -6$ eli funktion arvot suurenevat, kun muuttujan arvo kasvaa. Koska $8{,}001 < 8{,}002$, niin $f(8{,}001) < f(8{,}002)$.

$f(8{,}001)$ on siis pienempi.

Vastaus **a)** $x \geq -6$

b) $f(8{,}001)$

14.25

a)

Derivaatan nollakohdassa derivaatan kuvaaja leikkaa x-akselin.
Kuvaajan perusteella derivaatan nollakohdat ovat $x \approx -2$ ja $x \approx 4$.

b)

Kuvaajan perusteella derivaatta saa positiivisia arvoja, kun $-2 < x < 4$,
ja negatiivisia, kun $x < -2$ tai $x > 4$. Laaditaan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

		-2		4	
f'	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘

c)

Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava, kun $-2 \leq x \leq 4$.

Vastaus **a)** $x \approx -2$ ja $x \approx 4$

b)

		-2		4	
f'	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘

c) $-2 \leq x \leq 4$

14.26

a)

Funktio on vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen tai nolla.
Derivoidaan funktio ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$f'(x) = 6 \cdot 2x + 2 = 12x + 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \\ 12x + 2 &< 0 \\ 12x &< -2 \\ x &< \frac{-2}{12} \\ x &< -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

b)

Funktio on vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen tai nolla.
Derivoidaan funktio ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$f'(x) = -4 \cdot 3x^2 - 15 \cdot 2x + 18 - 0 = -12x^2 - 30x + 18$$

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 0 \\ -12x^2 - 30x + 18 &\leq 0 \quad \| : (-6) \\ 2x^2 + 5x - 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan funktion $h(x) = 2x^2 + 5x - 3$ nollakohdat.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

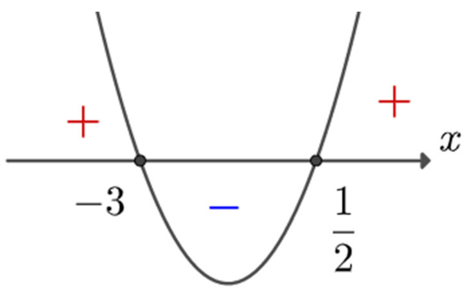
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \text{ tai } x = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Funktion h kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Hahmotellaan kuva.



Kuvaajan perusteella $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$, kun $x \leq -3$ tai $x \geq \frac{1}{2}$.

Funktio on siis vähenevä kyseisellä välillä.

Vastaus **a)** $\boldsymbol{x < -\frac{1}{6}}$ **b)** $x \leq -3$ tai $x \geq \frac{1}{2}$

14.27

Jos derivaatta on positiivinen tietyllä välillä, niin funktio on kasvava kyseisellä välillä.

Jos derivaatta on negatiivinen tietyllä välillä, niin funktio on vähenevä kyseisellä välillä.

Jos derivaatan merkki vaihtuu derivaatan nollakohdassa, niin funktiolla on kyseisessä kohdassa ääriarvokohta.

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = 15x^2 + 13x + 3$

Ratkaistaan, milloin derivaatta on epänegatiivinen.

$$f'(x) > 0$$
$$15x^2 + 13x + 3 > 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$15x^2 + 13x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 15 \cdot 3}}{2 \cdot 15}$$
$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{-11}}{30}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, joten nollakohtia ei ole. Funktion derivaatta on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se on positiivinen kaikkialla. Funktio on siis kasvava kaikkialla.

14.28

a)

Kuvaajan perusteella funktio kulkee pisteiden (−1, 0), (1, −2) ja (3, 0) kautta.

Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan vakiot.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-1) + b \cdot (-1) + c \\ -2 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \\ 0 = a \cdot 3 + b \cdot 3 + c \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = -\frac{3}{2}$$

b)

Lasketaan pisteiden (−1, 0) ja (3, 0) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{0 - 0}{3 - (-1)} = 0$$

Keskimääräinen muutosnopeus on siis 0.

c)

Derivoidaan funktio $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

$$f'(x) = x - 1$$

Kun $x = 1$, niin $f'(1) = 0 - 1 = -1$.

Funktion hetkellinen muutosnopeus on siis −1 eli funktion arvot pienenevät nopeudella 1.

Vastaus **a)** $a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = -\frac{3}{2}$

b) 0

c) −1, funktion arvot pienenevät nopeudella 1

14.29

a)

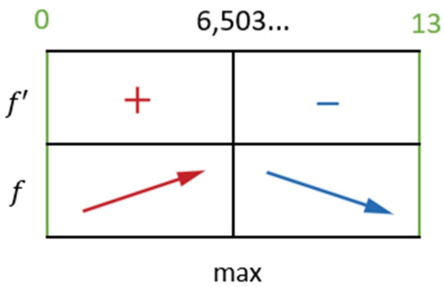
Tutkitaan funktion f kulkua muodostamalla derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion kulkukaavio. Derivoidaan ensin funktio *f.*

$f'(x) = -373{,}4x + 2428{,}3 \qquad 0 < x < 13$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -373{,}4x + 2428{,}3 &= 0 \\ x &= 6{,}503\ldots \approx 6{,}50\ (€) \end{aligned}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio funktion määrittelyvälille $0 \leq x \leq 9$. Tutkitaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.



$f'(1) = 2054{,}9 > 0$
$f'(7) = -185{,}5 < 0$

Kulkukaavion mukaan myyntitulot kasvavat, kun $0 \leq x \leq 6{,}50$ (€).

b)

Myyntitulon funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa huipussa eli derivaatan nollakohdassa.

Myyntitulot ovat siis suurimmillaan, kun $x \approx 6{,}50$ € eli sukat kannattaa myydään hintaan 6,50 €/kpl.

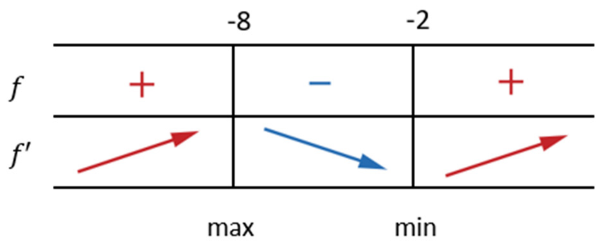
Vastaus **a)** $0 \leq x \leq 6{,}50$ (€)

b) 6,50 €/kpl

14.30

a)

Täydennetään kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.



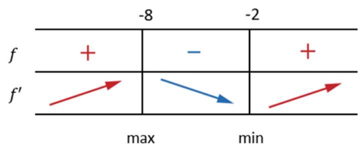
Paikallinen maksimikohta on $x = -8$ ja paikallinen minimikohta on $x = -2$.

b)

Polynomifunktio on kasvava kun $x \leq -8$, joten funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Polynomifunktio on kasvava kun $x \geq -2$, joten funktiolla ei ole suurinta arvoa.

Vastaus **a)**



maksimikohta $x = -8$, minimikohta $x = -2$

b) ei ole suurinta eikä pienintä arvoa

14.31

a)

Funktion arvo on 1,5 kun kuvaajan pisteen y-koordinaatti on 1,5.
Tämä tapahtuu kolmessa eri kohdassa: $x \approx 1{,}2$, $x \approx 3{,}3$ ja $x \approx 4{,}9$.

b)

Funktio on vähenevä, kun kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva
(tai vaakasuora hetkellisesti).

Kuvaajan perusteella funktio on vähenevä, kun $2{,}1 \leq x \leq 4{,}2$ ja $8{,}3 \leq x \leq 10$.

c)

Tarkasteluvälillä $2 \leq x \leq 7$ pienin arvo saadaan kohdassa $x \approx 4{,}2$. Tällöin $f(4{,}2) \approx 1{,}2$.
Suurin arvo saadaan kohdassa $x \approx 7{,}0$ ja suurin arvo on $f(7{,}0) \approx 4{,}2$.

Vastaus **a)** $x \approx 1{,}2$, $x \approx 3{,}3$ ja $x \approx 4{,}9$

b) $2{,}1 \leq x \leq 4{,}2$ ja $8{,}3 \leq x \leq 10$

c) pienin 1,2, suurin 4,2

14.32

Määritetään funktion *f* derivaatta.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x - 9 + 0 = 3x^2 - 6x - 9$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \quad \| : 3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ tai } x = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 6$. Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Lasketaan funktion arvot

- derivaatan nollakohdissa
  $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 1 = 6$
  $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 1 = -26$

- välin päätepisteissä
  $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 1 = 6$
  $f(6) = 6^3 - 3 \cdot 6^2 - 9 \cdot 6 + 1 = 55$

Funktion suurin arvo on siis 55 ja pienin arvo on −26.

Vastaus suurin arvo 55, pienin arvo −26

14.33

a)

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan polynomin nollakohdat.

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x = 0$$
$$4x^3 - 6x^2 - 9x = 0$$
$$x(4x^2 - 6x - 9) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan $x = 0$ tai

$$4x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} = \frac{6 \pm \sqrt{180}}{8}$$
$$x = \frac{6 - \sqrt{180}}{8} = \frac{-3(\sqrt{5} - 1)}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{6 + \sqrt{180}}{8} = \frac{3(\sqrt{5} + 1)}{4}$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella, joka sieventää neliöjuuren.

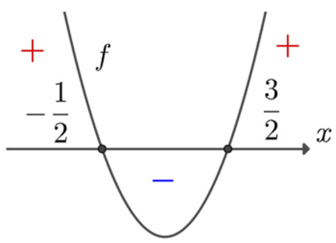
b)

Ääriarvokohdat saadaan derivaatan nollakohdista. Olkoon polynomi $f(x)$.
Derivoidaan funktio.

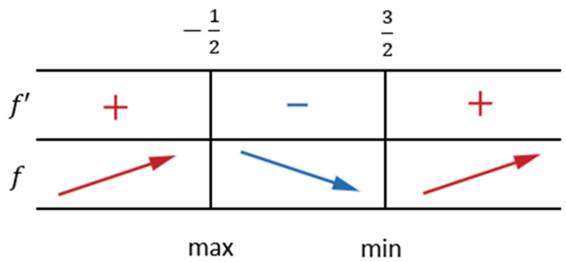
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - \frac{9}{4}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$x^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0$$
$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{3}{2}$$



Derivaatta on ylöspäin avautuva paraabeli.
Muodostetaan derivaatan kuvaajan hahmotelman avulla kulkukaavio.

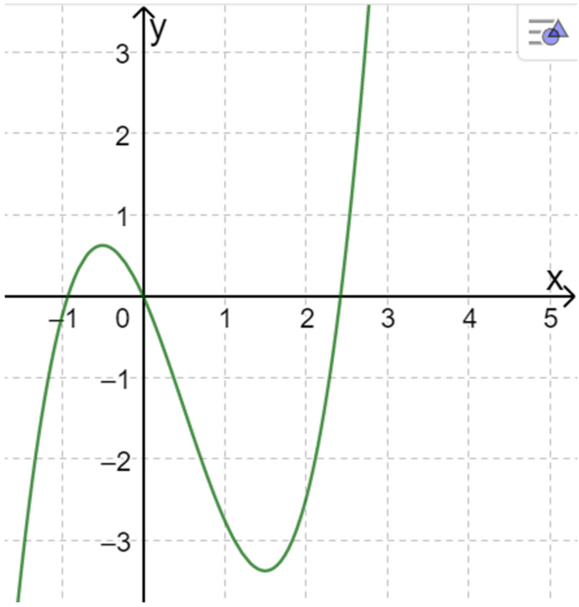


Funktion maksimikohta on $x = -\frac{1}{2}$ ja maksimiarvo on $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$.

Funktion minimikohta on $x = \frac{3}{2}$ ja minimiarvo on $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$.

c)

Piirretään funktion kuvaaja.



Vastaus **a)** $x = 0$, $x = \frac{6-\sqrt{180}}{8} = \frac{-3(\sqrt{5}-1)}{4}$ tai $x = \frac{6+\sqrt{180}}{8} = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{4}$

b) Maksimikohta on $x = -\frac{1}{2}$ ja maksimiarvo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$,
minimikohta on $x = \frac{3}{2}$ ja minimiarvo $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$.

14.34

a)

Funktion kuvaajalle kohtaan $t = 16$ piirretty tangentti on nouseva suora, joten funktion derivaatta $f'(16)$ on positiivinen.

Tämä tarkoittaa, että funktion kuvaaja on kasvava eli pulssin arvo kasvaa, kun t kasvaa.

b)

Derivaatan arvo kertoo tangentin kulmakertoimen suuruuden.

Funktion derivaatan nollakohtaan piirretty tangentti on x-akselin suuntainen suora,
eli $f'(x) = 0$.

Jos derivaatan nollakohdassa derivaatan merkki muuttuu negatiivisesta positiiviseksi, kohta on ääriarvokohta, jossa funktion saa minimiarvon.

c)

Kohdassa t = 19,3 kuvaajassa on terävä kohta, johon ei voida piirtää yksiselitteisesti tangenttia, joten $f'(19{,}3)$ ei ole olemassa.

Derivaatan merkki muuttuu negatiivisesta positiiviseksi kohdan t = 19,3 lähiympäristössä.
Kallen menetelmä ei siis toimi, koska derivaattaa ei ole määritelty kyseisessä kohdassa.

14.35

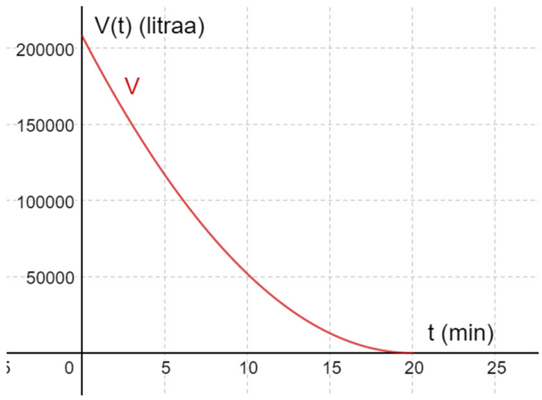
a) Säiliö on tyhjä, kun funktion $V(t) = 520(20 - t)^2, t \leq 0,$ arvo on 0.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan nollakohdat.

$$\begin{aligned} V(t) &= 0 \\ 520(20 - t)^2 &= 0 \\ t &= 20 \end{aligned}$$

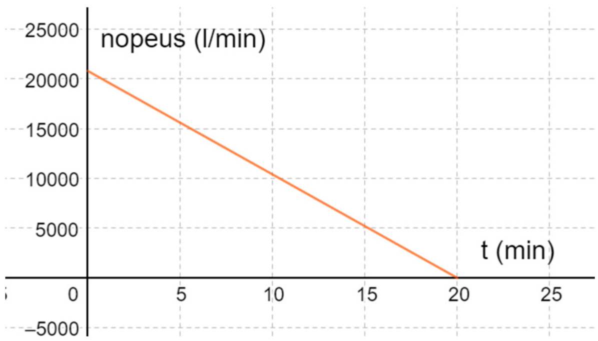
Säiliö on tyhjä 20 minuutin kuluttua.

Piirretään funktion kuvaaja.



b) Määritetään funktio $q(t)$ ja piirretään sen kuvaaja.

$$\begin{aligned} q(t) &= -V'(t) \\ &= -(1040t - 20800) \\ &= 20800 - 1040t \end{aligned}$$



Määritetään funktion $q(t)$ suurin arvo välillä $0 \leq t \leq 20$.

Suurin arvo löytyy välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.

$$\begin{aligned} q'(t) &= 0 \\ -1040 &= 0 \end{aligned}$$

Derivaatalla ei ole nollakohtia. Lasketaan tyhjenemisnopeus välin päätepisteissä.

$$\begin{aligned} q'(0) &= 20800 \\ q(20) &= 0 \end{aligned}$$

Tyhjenemisnopeus on suurimmillaan, kun $t = 0$ (min).

Vastaus **a)** 20 minuutin kuluttua
b) $q(t) = 20800 - 1040t$ (l/min), ajanhetkellä $t = 0$ (min)

14.36

a)

Jos paraabelin huippu on kohdassa $x = \frac{3}{2}$, niin kohta on myös derivaatan nollakohta.
Muodostetaan yhtälöpari paraabelin lausekkeen ja derivaatan avulla.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx - 3 \\ y' = 2ax + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 3 \\ 0 = 2a \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + b \end{cases}$$

$$a = -\frac{16}{9}, \; b = \frac{16}{3}$$

b)

Derivaatan lauseke on $2 \cdot \left(-\frac{16}{9}\right)x + \frac{16}{3} = -\frac{32}{9}x + \frac{16}{3}$.
Ratkaistaan, millä x:n arvolla derivaatan arvo on -6.

$$-\frac{32}{9}x + \frac{16}{3} = -6$$
$$x = \frac{51}{16}$$

Tangentin kulmakertoimen, eli derivaatan pienin arvo löytyy välin suljetun välin $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$ päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaatan derivaatan nollakohdista.

Derivaatan derivaatta on $-\frac{32}{9}$, joten derivaatalla ei ole nollakohtia.
Lasketaan derivaatan arvot välin päätepisteissä.

$$-\frac{32}{9} \cdot (-2) + \frac{16}{3} = \frac{112}{9}$$
$$-\frac{32}{9} \cdot \frac{3}{2} + \frac{16}{3} = 0$$

Tangentin kulmakertoimen pienin arvo on siis 0.

Vastaus **a)** $a = -\frac{16}{9}, \; b = \frac{16}{3}$
b) $x = \frac{51}{16}$
c) $k = 0$

14.37

a) Funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä löytyy välin päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaatan nollakohdista.

Derivoidaan funktio ja lasketaan derivaatan nollakohdat.

$f'(x) = 3x^2 - 9x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 9x &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = 3 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä $x = -1$ ja $x = 4$.

$$f(0) = \frac{11}{2}$$
$$f(3) = -8$$
$$f(-1) = 0$$
$$f(4) = -\frac{5}{2}$$

Funktion suurin arvo on $\frac{11}{2}$ ja pienin arvo -8.

b) Kulmakertoimen suurin ja pienin arvo on suljetulla välillä derivaatan derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteissä.

Derivoidaan funktion derivaatta.

$f''(x) = 6x - 9$

Lasketaan nollakohta.

$$\begin{aligned} 6x - 9 &= 0 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatan arvot kohdissa $x = -1, x = 4$ ja $x = \frac{3}{2}$.

$$f'(-1) = 12$$
$$f'(4) = 12$$
$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{4}$$

Kulmakertoimen suurin arvo on 12 ja pienin arvo $-\frac{27}{4}$.

Vastaus **a)** suurin arvo $\frac{11}{2}$ ja pienin arvo -8 **b)** suurin arvo 12 ja pienin arvo $-\frac{27}{4}$

14.38

a)

Funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä löytyy välin päätepisteistä
tai välille kuuluvista derivaatan nollakohdista.

Derivoidaan funktio ja lasketaan derivaatan nollakohdat.

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x^2 - 6x &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = 1 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä $x = 0$ ja $x = 2$.

$f(0) = 0$
$f(1) = -1$
$f(2) = 4$

Funktion suurin arvo on 4 ja pienin arvo −1.

b)

Vakion arvo ei muuta funktion derivaattaa, joten funktion g pienin arvo löytyy samasta kohdasta kuin funktion f eli kohdasta $x = 1$.

Muodostetaan yhtälö $g(1) = -\frac{9}{2}$ ja ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} g(1) &= -\frac{9}{2} \\ 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + a &= -\frac{9}{2} \\ a &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Funktion g suurin arvo saadaan kohdassa $x = 2$, kuten funktiolla f.
Lasketaan funktion g suurin arvo.

$$g(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

Vastaus **a)** suurin 4 ja pienin −1 **b)** $a = -\frac{7}{2}$, suurin arvo $\frac{1}{2}$

14.39

Funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä löytyy välin päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaatan nollakohdista.

Derivoidaan funktio ja lasketaan derivaatan nollakohdat.

$f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 27x - 41 &= 0 \\ x &= 1{,}9341\ldots \text{ tai } \ x = 7{,}0658\ldots \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä $x = 0$ ja $x = 10$.

$f(0) = 50$
$f(10) = 360$
$f(1{,}9341\ldots) = 13{,}9669\ldots$
$f(7{,}0658\ldots) = 81{,}5330\ldots$

Funktion suurin arvo on siis $f(7{,}066) \approx 81{,}533$.

Funktio kasvaa nopeimmin, kun derivaatan arvo on suurin.

Derivoidaan derivaatta.

$f''(x) = -6x + 27$

Derivaatan suurin ja pienin arvo suljetulla välillä löytyy välin päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaatan $f''(x)$ nollakohdista.

Ratkaistaan nollakohdat eli yhtälö $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -6x + 27 &= 0 \\ x &= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatan arvot.

$f'(0) = -41$
$f'(10) = -71$
$f'\left(\frac{9}{2}\right) = 19{,}75$

Nopein kasvu on siis kohdassa $x = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Vastaus suurin arvo $f(7{,}066) \approx 81{,}533$, nopein kasvu kohdassa $x = 4{,}5$

14.40

Sievennetään ensin lauseke.

$(x-3)^2+(x-9)^2=2x^2-24x+90$

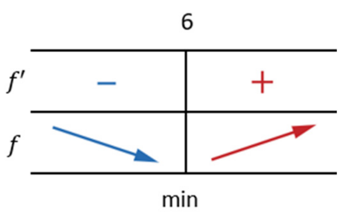
Merkitään $f(x)=2x^2-24x+90$ ja tutkitaan funktion kulkua.

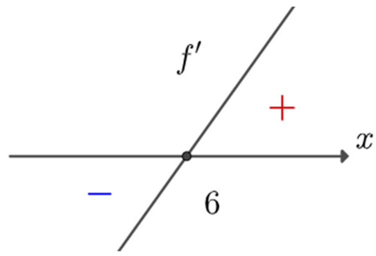
Määritetään ensin derivaatan nollakohdat.

$f'(x)=4x-24$

$$\begin{aligned} f'(x)&=0\\ 4x-24&=0\\ x&=6 \end{aligned}$$

Derivaatta nouseva suora. Muodostetaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.





Funktio saa pienin arvonsa kun $x=6$.

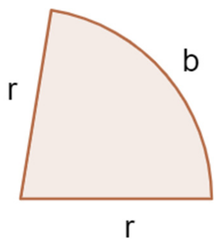
Kysytty summa on siis mahdollisimman pieni kun $x=6$.

Vastaus $x=6$

14.41

Sektorin piiri on 1,00 (m) . Muodostetaan kaaren pituuden lauseke, kun säde on r (m).

$$2r + b = 1$$
$$b = 1 - 2r \text{ (m)}$$



Kaaren pituuden tulee olla positiivinen.

$$1 - 2r \geq 0$$
$$r \leq \frac{1}{2}$$

Mikäli sektori on täysi ympyrä, niin sektori piirin koostuu ympyrän kehästä ja säteistä.

$$2\pi r + 2r = 1$$
$$r = \frac{1}{2\pi + 2} \approx 0{,}120 \ldots$$

Sektorin pinta-alan (m^2) lauseke on siis

$$A(r) = \frac{br}{2} = \frac{(1-2r)r}{2} = -r^2 + \frac{1}{2}r, \qquad \frac{1}{2\pi + 2} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

Pinta-alalauseketta voidaan tutkia suljetulla välillä, jolloin suurin arvo löytyy välin päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaatan nollakohdista.

Muodostetaan derivaatta ja ratkaistaan sen nollakohdat.

$$A'(r) = -2r + \frac{1}{2}$$
$$A'(r) = 0$$
$$-2r + \frac{1}{2} = 0$$
$$r = \frac{1}{4}$$

Lasketaan pinta-ala välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$A\left(\frac{1}{2\pi + 2}\right) = 0{,}045 \ldots$$
$$A\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}0625$$

Suurin arvo saadaan siis kun $r = \frac{1}{4} = 0{,}25$ (m).

Vastaus $\quad r = 0{,}25$ m