Binomi 7 – Luku 8 – Tehtävien malliratkaisut

8.1

a)

Muodostetaan yhtälö $a_n = -117$ ja ratkaistaan järjestysluku *n.*

$$\begin{aligned} -2n + 13 &= -117 \\ -2n &= -130 \quad \| : (-2) \\ n &= 65 \end{aligned}$$

−117 on jonon 65. jäsen.

b)

Aritmeettinen summa lasketaan summakaavan avulla. Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, viimeinen termi a_{20} ja termien lukumäärä n.

Jonon 1. jäsen on $a_1 = -2 \cdot 1 + 13 = 11$.

Jonon 20. jäsen on $a_{20} = -2 \cdot 20 + 13 = -27$.

$$S_{20} = n \cdot \frac{a_1 + a_{20}}{2} = 20 \cdot \frac{11 + (-27)}{2} = -160$$

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

a_1 on ensimmäinen termi

a_n on viimeinen termi

n on termien lukumäärä

Vastaus **a)** on, 65. jäsen

b) −160

8.2

a)

Lukujonon 7. jäsen lasketaan sijoittamalla $n = 7$yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$a_7 = 3 \cdot 2^{7-1} = 3 \cdot 2^6 = 192$

b)

Geometrinen summa lasketaan summakaavan avulla. Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, suhdeluku q, jotka saadaan yleisen jäsenen lausekkeesta. Lisäksi tarvitaan termien lukumäärä n.

- Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$
- Suhdeluku $q = 2$
- Jäsenten lukumäärä on $n = 8$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\begin{aligned} S_8 &= 3 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2} \\ &= 3 \cdot \frac{-255}{-1} \\ &= 3 \cdot 255 \\ &= 765 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $a_7 = 192$

b) $S_8 = 765$

8.3

a)

Vakuutusmaksut muodostavat aritmeettisen jonon.

185 €, 193 €, 201 €, 209 €, jne.

+ 8 € + 8 € + 8 €

Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 185(€)$ ja differenssi $d = 8$ (€).

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen a_n ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 185 + (n-1) \cdot 8 \\ &= 185 + 8n - 8 \\ &= 8n + 177 \end{aligned}$$

b)

Lasketaan yleisen jäsenen avulla maksu 6. vuonna.

$$a_6 = 8 \cdot 6 + 177 = 225$$

Vakuutusmaksu on 225 €

c)

Vakuutusmaksuista muodostuu aritmeettinen summa, joka lasketaan summakaavan avulla. Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, viimeinen termi a_{11} ja termien lukumäärä n.

Jonon 1. jäsen on $a_1 = 185$.

Jonon 11. jäsen on $a_{11} = 8 \cdot 11 + 177 = 265$.

$$S_{11} = n \cdot \frac{a_1 + a_{11}}{2} = 11 \cdot \frac{185 + 265}{2} = 2475$$

$S_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

a_1 on ensimmäinen termi

a_n on viimeinen termi

n on termien lukumäärä

Perttu maksaa 11 vuoden aikana yhteensä 2 475 €.

Vastaus **a)** $a_n = 8n + 177$
b) 225 €
c) 2 475 €

8.4

a) Miia maksaa ensimmäisenä vuonna $12 \cdot 110$ € $= 1320$ €.

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on siis $a_1 = 1320$. Kuukausittainen maksu kasvaa vuosittain 2 %, joten myös vuosimaksu kasvaa joka vuosi 2 %.

Jonon suhdeluku on siis $q = 100\ \% + 2\ \% = 102\ \% = 1{,}02$.

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 1320 \cdot 1{,}02^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

b)

Sijoitetaan yleisen jäsenen lausekkeeseen $n = 5$ja lasketaan 5. vuoden vastikkeet.

$$a_5 = 1320 \cdot 1{,}02^{5-1} = 1428{,}810 \ldots \approx 1429\ (€)$$

Mia maksaa 1 429 €.

c)

Vastikkeista muodostuu geometrinen summa, joka lasketaan summakaavan avulla. Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, suhdeluku q ja termien lukumäärä n.

- Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1320$
- Suhdeluku $q = 1{,}02$
- Jäsenten lukumäärä on $n = 8$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_8 = 1320 \cdot \frac{1 - 1{,}02^8}{1 - 1{,}02} = 11329{,}519 \ldots \approx 11330\ (€)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Vastaus **a)** $a_n = 1320 \cdot 1{,}02^{n-1}$

b) 1 429 €

c) 11 330 €

8.5

a)

Luukkujen rahamäärät muodostavat aritmeettisen jonon., jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$ ja differenssi $d = 0{,}8$.

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen a_n ja sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2 + (n-1) \cdot 0{,}8 \\
&= 2 + 0{,}8n - 0{,}8 \\
&= 0{,}8n + 1{,}2
\end{aligned}
$$

Lasketaan 24. luukun rahamäärä.

$$a_{24} = 0{,}8 \cdot 24 + 1{,}2 = 20{,}40$$

Viimeisessä luukussa on 20,40 €.

b)

Luukkujen rahamääristä muodostuu aritmeettinen summa, joka lasketaan summakaavan avulla. Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, viimeinen termi a_{24} ja termien lukumäärä n.

$$S_{24} = n \cdot \frac{a_1 + a_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{2 + 20{,}40}{2} = 268{,}80 \text{ €}$$

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

a_1 on ensimmäinen termi

a_n on viimeinen termi

n on termien lukumäärä

Perttu saa rahaa yhteensä 268,80 €.

Vastaus **a)** 20,40 €

b) 268,80 €

8.6

Muodostetaan ensin aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lauseke.

- Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 12$
- Differenssi on $d = a_2 - a_1 = 15 - 12 = 3$

Yleinen jäsen on siis

$a_n = 12 + (n-1) \cdot 3 = 12 + 3n - 3 = 3n + 9.$ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Merkitään yhteenlaskettavien määrää kirjaimella *n*.
Muodostetaan aritmeettisen summan lauseke.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{12 + (3n+9)}{2} = n \cdot \frac{3n+21}{2}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, milloin summa on 30 000.

$$n \cdot \frac{3n+21}{2} = 30000$$
$$n = -144{,}96\ldots \text{ tai } n = 137{,}96\ldots$$

Jäseniä on laskettava jonon alusta vähintään 138 kappaletta.

Vastaus 138

8.7

a) Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1500$ ja suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1350}{1500} = 0{,}9$.

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 1500 \cdot 0{,}9^{n-1}$ ← $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Selvitetään, milloin jäsen on pienempi kuin 100 muodostamalla yhtälö $a_n = 100$ ja ratkaisemalla järjestysluku *n*.

$$\begin{aligned} a_n &= 100 \\ 1500 \cdot 0{,}9^{n-1} &= 100 \\ n &= 26{,}70\ldots \end{aligned}$$

27. jäsen on ensimmäisen kerran pienempi kuin 100.

b) Muodostetaan ensin summan lauseke.

$S_n = 1500 \cdot \dfrac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9}$ ← $\boxed{S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}}$

Muodostetaan yhtälö $S_n = 8000$ ja ratkaistaan jäsenten lukumäärä *n*.

$$\begin{aligned} S_n &= 8000 \\ 1500 \cdot \frac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9} &= 8000 \\ n &= 7{,}233\ldots \end{aligned}$$

Jos $n = 7$, summa on $S_7 = 1500 \cdot \frac{1-0{,}9^7}{1-0{,}9} = 7825{,}546\ldots\ (< 8000)$.

Jos $n = 8$, summa on $S_8 = 1500 \cdot \frac{1-0{,}9^8}{1-0{,}9} = 8542{,}99\ldots\ (> 8000)$.

Jäseniä on laskettava vähintään 8 kappaletta.

Vastaus **a)** 27. jäsen
b) 8 jäsentä

8.8

Muodostetaan annettujen tietojen avulla yhtälö ja ratkaistaan ensimmäinen jäsen a_1.

- Suhdeluku $q = -2$
- Yhteenlaskettavien jäsenten määrä on $n = 20$
- Summa on $S_{20} = -1747625$

$$a_1 \cdot \frac{1-(-2^{20})}{1-(-2)} = -1747625$$
$$a_1 = 5$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Ensimmäinen jäsen on 5. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vastaus $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$

8.9

a)

Muodostetaan ensin aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lauseke.

- Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 35$
- Differenssi on $d = 5$

Yleinen jäsen on siis

$a_n = 35 + (n - 1) \cdot 5 = 35 + 5n - 5 = 5n + 30$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

b)

Muodostetaan yhtälö $a_n = 90$ ja ratkaistaan järjestysluku *n*.

$$\begin{aligned} a_n &= 90 \\ 5n + 30 &= 90 \\ 5n &= 60 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Seuraajia on 90 viikolla 12.

c)

Viikoittaisista lukijamääristä muodostuu aritmeettinen summa, joka lasketaan summakaavan avulla. Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, viimeinen termi a_{52} ja termien lukumäärä n.

$a_1 = 35 \qquad a_{52} = 5 \cdot 52 + 30 = 290 \qquad n = 52$

$$S_{52} = n \cdot \frac{a_1 + a_{52}}{2} = 52 \cdot \frac{35 + 290}{2} = 8450$$

$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

a_1 on ensimmäinen termi

a_n on viimeinen termi

n on termien lukumäärä

Vuoden aikana Saara tienaisi $8450 \cdot 0{,}50$ € $= 4225$ €.

Vastaus **a)** $a_n = 5n + 30$
b) viikolla 12
c) 4 225 €

8.10

a)

Kuukausittaiset talletukset kasvavat eri ajanjakson korkoa.
Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kk, toinen 11 kk ja viimeinen 1 kk.
Nettokorkokanta on 4,20 %, joten kuukausikorko on $\frac{4{,}20\ \%}{12} = 0{,}35\ \%$.

Korkojen summan lauseke on

$$200 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}042 + 200 \cdot \frac{2}{12} \cdot 0{,}042 + \cdots + 200 \cdot \frac{12}{12} \cdot 0{,}042 = 200 \cdot 0{,}042 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \cdots + \frac{12}{12}\right)$$

Murtolukujen summa on aritmeettinen jono, jossa

- Ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{1}{12}$
- Differenssi on $d = \frac{1}{12}$
- Yhteenlaskettavien määrä on $n = 12$

Lasketaan korkojen summa vuoden ajalta.

$$200 \cdot 0{,}042 \cdot \left(12 \cdot \frac{\frac{1}{12} + \frac{12}{12}}{2}\right) = 54{,}60$$

$200 \cdot 0{,}042 \cdot n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$
a_1 on ensimmäinen termi
a_n on viimeinen termi
n on termien lukumäärä

Talletukset tuottavat korkoa ensimmäisenä vuonna 54,60 €.

b)

Tilillä on vuoden päästä talletukset ja korot.

$12 \cdot 200\ € + 54{,}60\ € = 2454{,}60\ €$

Vastaus **a)** 54,60 €
b) 2 454,60 €

8.11

Vuosittaiset myyntitulot muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = 8000$ ja $d = 1200$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 8000 + (n-1) \cdot 1200 \\ &= 8000 + 1200n - 1200 \\ &= 1200n + 6800 \end{aligned}$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Muodostetaan yhtälö summakaavan avulla ja ratkaistaan, kuinka monen jäsenen n summa on 221 000 (€).

$$\begin{aligned} S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ 221000 &= n \cdot \frac{8000 + (1200n + 6800)}{2} \\ n &= -26{,}32\ldots \text{ tai } n = 13{,}99\ldots \end{aligned}$$

$a_n = 6n + 90$

Negatiivinen vastaus ei käy. Henrik myös siis puuta $13{,}99\ldots \approx 14$ kertaa.

Vastaus 14 kertaa

8.12

Kuukausipalkat muodostavat geometrisen jonon, jossa

- $a_1 = 1850$
- $q = 100\ \% + 1{,}8\ \% = 101{,}8\ \% = 1{,}018$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 1850 \cdot 1{,}018^{n-1}$ $\quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 2059$ ja ratkaistaan *n.*

$$\begin{aligned} 1850 \cdot 1{,}018^{n-1} &= 2059 \\ n &= 6{,}999 \ldots \\ n &\approx 7 \end{aligned}$$

Ada työskenteli työpaikassa 7 vuotta.

b)

Vuosittaiset palkat muodostavat summan

$$\begin{aligned} &12 \cdot 1850 + 12 \cdot 1850 \cdot 1{,}018^1 + 12 \cdot 1850 \cdot 1{,}018^2 + \cdots + 1850 \cdot 1{,}018^7 \\ &= 12 \cdot 1850 \cdot (1 + 1{,}018^1 + 1{,}018^2 + \cdots + 1{,}018^7) \\ &= 22200 \cdot S_7 \end{aligned}$$

Lasketaan geometrinen summa summakaavalla.

$a_1 = 1 \qquad q = 1{,}018 \qquad n = 7$

$$22200 \cdot 1 \cdot \frac{1 - 1{,}018^7}{1 - 1{,}018} = 164047{,}928 \ldots \approx 164000\ € \qquad S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Vastaus **a)** 7 vuotta

b) 164 000 €

8.13

Mikko osti joka kuukausi 100 osaketta. Merkitään viimeistä ostokuukautta kirjaimella *n.*

Pörssiosakkeiden kuukausittaiset ostoarvot muodostavat geometrisen jonon, jossa

- $a_1 = 100 \cdot 7{,}20 = 720$
- $q = 100\ \% + 1{,}5\ \% = 101{,}5\ \% = 1{,}015$

Koko vuoden osakehankintojen hinnat saadaan geometrisella summalla

$$720 + 720 \cdot 1{,}015 \cdot +720 \cdot 1{,}015^2 + \cdots + 720 \cdot 1{,}015^n = 6883$$

Muodostetaan summakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan osakkeiden kuukausittainen ostomäärä.

$$720 \cdot \frac{1 - 1{,}015^n}{1 - 1{,}015} = 6883$$
$$n = 9{,}00 \ldots$$

Mikko osti vuoden aikana $9 \cdot 100 = 900$ osaketta.

Vastaus 900 osaketta

8.14

a)

Alkuperäinen pääoma on $K = 5250$ €

Korkotekijä on $q = 1 + 0{,}022 = 1{,}022$.

Neljän vuoden jälkeen korkokausia on ollut neljä, joten $n = 4$.

Lasketaan kasvanut pääoma neljän vuoden kuluttua.

$K_4 = 5250 \cdot 1{,}022^4 = 5727{,}470 \ldots \approx 5727$ (€)

Koronkorko
$K_n = Kq^n$
- $K = 5250$ €
- $q = 1{,}022$
- $n = 4$

Tilillä on rahaa neljän vuoden kuluttua 5 727 €.

b)

Lasketaan rahamäärä viisi vuotta sitten diskonttaamalla nostettu rahamäärä kyseiseen hetkeen.

$K = 5250 \cdot 1{,}022^{-5} = 4708{,}741 \ldots \approx 4709$ (€)

Diskonttaus
$K = K_n q^{-n}$

Tilillä oli 5 vuotta sitten 4 709 €.

Vastaus **a)** 5 727 €

b) 4 709 €

8.15

Lasketaan kopiokoneen maksujen nykyarvot.

Laskentakorkokanta on 3,5 %, joten diskonttaustekijä on $q = 1{,}035$.

1. Vaihtoehto:

Maksetaan heti 1 000 € ja kaksi kertaa vuoden välein 3500 €.

$$\begin{aligned} K_{V1} &= 1000 + 3500 \cdot 1{,}035^{-1} + 3500 \cdot 1{,}035^{-2} \\ &= 7648{,}929 \ldots\ (€) \end{aligned}$$

2. Vaihtoehto

Maksetaan heti 2 000 € ja neljä kertaa vuoden välein 1 500 €.

$$\begin{aligned} K_{V2} &= 2000 + 1500 \cdot 1{,}035^{-1} + 1500 \cdot 1{,}035^{-2} + 1500 \cdot 1{,}035^{-3} + 1500 \cdot 1{,}035^{-4} \\ &= 7509{,}618 \ldots\ (€) \end{aligned}$$

Vaihtoehdon 2 nykyarvo on edullisempi, joten vaihtoehto 2 tulee edullisemmaksi.

Vastaus vaihtoehto 2

8.16

a)

Donitsista maksetaan arvonlisäveroa 14 %. Merkitään verotonta hintaa kirjaimella x ja ratkaistaan se yhtälöstä.

$$\begin{aligned} 1{,}14 \cdot x &= 1{,}80 \\ x &= 1{,}578 \ldots \\ x &\approx 1{,}58\ (€) \end{aligned}$$

Veroton hinta on 1,58 €.

b)

Liikevaihto saadaan verottoman hinnan ja myyntimäärän tulona.

$11600 \cdot 1{,}58\ € = 18328\ €$

Liikevaihto on 18 328 €

c)

Tulos saadaan vähentämällä kokonaiskustannukset.

$18328\ € - 8750\ € - 11600 \cdot 0{,}45\ € = 4358\ €$

Tulos kuukaudessa on 4 358 €.

d)

Katetuottoprosentti saadaan katetuoton ja liikevaihdon osamääränä.

Katetuotto on $18328\ € - 11600 \cdot 0{,}45\ € = 13108\ €$.

Lasketaan katetuottoprosentti.

$$\frac{13108\ €}{18328\ €} = 0{,}7151 \ldots \approx 71{,}5\ \%$$

Vastaus **a)** 1,58 € **b)** 18 328 € **c)** 4 358 € **d)** 71,5 %

8.17

a)

Kokonaiskustannukset (€) ovat kiinteiden ja muuttuvien kustannusten summa.

$K(x) = 56000 + 480x$

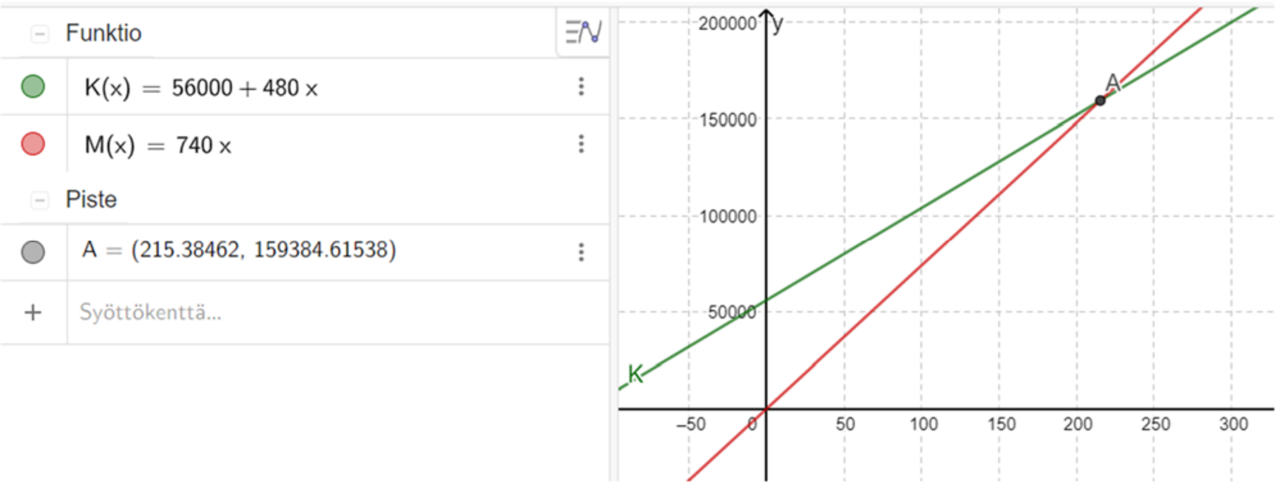
- kiinteät kustannukset (€): **56 000**
- muuttuvat kustannukset (€): **$480x$**

Liikevaihto on verottoman jälleenmyyntihinnan ja myyntimäärän tulo.

$M(x) = 740x \quad (€)$

b)

Piirretään funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon.
Kriittinen piste löytyy kuvaajien leikkauspisteestä.



Leikkauspiste eli kriittinen piste on (215,384...; 159384,615...). Kriittisen pisteen x-koordinaatti kertoo, kuinka monta tuotetta on myytävä, jotta kulut tulevat katetuksi.

215 laukkua ei vielä riitä myyntitulojen kattamiseksi, joten tuotteita tulee myydä vähintään 216 kappaletta.

Vastaus **a)** $K(x) = 56000 + 480x$, $M(x) = 740x \quad (€)$

b) vähintään 216 kappaletta

8.18

a)

Kokonaiskustannukset (€) ovat kiinteiden ja muuttuvien kustannusten summa.

$K(x) = 47900 + 125x$

- kiinteät kustannukset (€): **47 900**
- muuttuvat kustannukset (€): **$125x$**

Liikevaihto eli myyntituotto on verottoman jälleenmyyntihinnan ja myyntimäärän tulo.

$M(x) = 195x \quad (€)$

b)

Tulos saadaan vähentämällä myyntituotosta kokonaiskustannukset.

$M(520) - K(520) = 195 \cdot 520 - (47900 + 125 \cdot 520) = -11500$

Yritys tekee tappiota 11 500 €.

Vastaus **a)** $K(x) = 47900 + 125x$, $M(x) = 195x \quad (€)$

b) tappiota 11 500 €

8.19

Lasketaan sijoitettu rahasumma diskonttaamalla sijoituksen arvo nykyhetkeen.

- $K_8 = 24417$ €
- $q = 100\ \% + 7{,}2\ \% = 107{,}2\ \% = 1{,}072$
- Korkokausien lukumäärä $n = 8$

$K = 24417 \cdot 1{,}072^{-8} = 14000{,}192 \ldots \approx 14000$ (€)

Diskonttaus
$K = K_n q^{-n}$

Sijoitettu rahasumma oli 14 000 €

Vastaus 14 000 €

8.20

Muodostetaan pellon nykyarvon lauseke diskonttaamalla maksuerät.
Merkitään kaupanteossa maksettavaa käteismaksua kirjaimella *x*.

Korkokanta on 4,5 %, joten diskonttaustekijä on 1,045.

Diskontataan kaikki maksuerät nykyhetkeen.

diskontattava arvo (€)	aika vuosina nykyhetkestä	nykyarvo (€)
x	0	x
8 500	1	$8500 \cdot 1{,}045^{-1}$
8 500	2	$8500 \cdot 1{,}045^{-2}$
8 500	3	$8500 \cdot 1{,}045^{-3}$

Muodostetaan nykyarvon 34 870 € avulla yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$
\begin{aligned}
x + 8500 \cdot 1{,}045^{-1} + 8500 \cdot 1{,}045^{-2} + +8500 \cdot 1{,}045^{-3} &= 34870 \\
x &= 11503{,}802\ldots \\
x &\approx 11500\ (€)
\end{aligned}
$$

Käteismaksu oli 11 500 €.

Vastaus 11 500 €

8.21

a)

Merkitään neljän kuukauden korkokantaa kirjaimella x ja muodostetaan koron avulla yhtälö.

$$\begin{aligned} 16000x &= 42{,}56 \\ x &= 0{,}00266 \\ x &= 0{,}266\ \% \end{aligned}$$

Nettovuosikorko on siis $3 \cdot 0{,}266\ \% = 0{,}798\ \%$.

b)

Lasketaan kasvanut nettopääoma 12 vuoden kuluttua.

$K_7 = 16000 \cdot 1{,}00798^{12} = 17601{,}227 \ldots \approx 17601\ (€)$

Koronkorko
$K_n = Kq^n$

- K = 16000 €
- q = 1,00798
- n = 12

Tilillä on rahaa 17 601 €.

Vastaus **a)** 0,798 %

b) 17 601 €

8.22

Merkitään korkokausien eli vuosien lukumäärää kirjaimella *n*.

- Korkotekijä on $q = 100\ \% + 1{,}5\ \% = 101{,}5\ \% = 1{,}015$
- Talletettu pääoma on $K = 2000\ €$
- Kasvanut pääoma on $K_n = 2000\ € + 500\ € = 2500\ €$

Talletuksen arvoa (€) *n* vuoden kuluttua kuvaa lauseke $2000 \cdot 1{,}015^n$.

Muodostetaan kasvaneen pääoman avulla yhtälö ja ratkaistaan *n*.

$$
\begin{aligned}
2000 \cdot 1{,}015^n &= 2500 \\
n &= 14{,}987\ldots \\
n &\approx 15
\end{aligned}
$$

Talletusajan on oltava vähintään 15 vuotta.

Vastaus 15 vuotta

8.23

a) Selvitetään nettokorkokanta koronkorkolaskun avulla.

- korkokausien lukumäärä on $n = 5$
- sijoitettu pääoma on $K = 8500$ €
- kasvanut pääoma $K_5 = 9300$ €

Muodostetaan kasvaneen pääoman avulla yhtälö ja ratkaistaan korkotekijä *q*.

$$\begin{aligned} 8500 \cdot q^5 &= 9300 \\ q &= 1{,}01815\ldots \end{aligned}$$

Koronkorko
$K_n = Kq^n$

Määritetään korkotekijän avulla tilin nettokorkokanta.

$1{,}01815\ldots - 1 = 0{,}01815 \approx 0{,}0182 = 1{,}82\ \%$

Tilin nettokorkokanta on 1,82 %.

b) Merkitään korkokausien eli vuosien lukumäärää kirjaimella *n*.

- Nettokorkokanta on $0{,}7 \cdot 2{,}20\ \% = 1{,}54\ \%$
- Korkotekijä on $q = 100\ \% + 1{,}54\ \% = 101{,}54\ \% = 1{,}0154$
- Talletettu pääoma on $K = 8500$ €
- Kasvanut pääoma on $K_n = 10000$ €

Talletuksen arvoa (€) *n* vuoden kuluttua kuvaa lauseke $8500 \cdot 1{,}0154^n$.

Muodostetaan kasvaneen pääoman avulla yhtälö ja ratkaistaan *n*.

$$\begin{aligned} 8500 \cdot 1{,}0154^n &= 10000 \\ n &= 10{,}634\ldots \end{aligned}$$

Jos $n = 10$, tilillä on rahaa $8500 \cdot 1{,}0154^{10} = 9903{,}541\ldots\ (< 10000)$.
Jos $n = 11$, tilillä on rahaa $8500 \cdot 1{,}0154^{11} = 10056{,}055\ldots\ (> 10000)$.

Tilillä on rahaa yli 10 000 € 11 vuoden kuluttua.

Vastaus **a)** 1,82 % **b)** 11 vuoden kuluttua

8.24

Jokainen 50 € talletus on eri ajanjakson tilillä ennen ensimmäisen koron lisäämistä vuoden lopussa. Vuoden aikana tehtyjä talletuksia tarkastellaan yksinkertaisen korkolaskun avulla.

Lasketaan jokaisen kuukauden talletukselle korko taulukkolaskennan avulla. $r = kit$

- nettokorkokanta on 0,75 %
- pääoma on $k = 50$ (€)

Lasketaan korot taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B	C
1	talletus	korkoaika (kk)	Korko (€)
2	1	12	0,38
3	2	11	0,34
4	3	10	0,31
5	4	9	0,28
6	5	8	0,25
7	6	7	0,22
8	7	6	0,19
9	8	5	0,16
10	9	4	0,13
11	10	3	0,09
12	11	2	0,06
13	12	1	0,03
14		yhteensä	2,4375

Ensimmäiselle talletukselle maksetaan korkoa 12 kuukautta eli $t = \frac{12}{12}$.

$r = 50 \cdot 0{,}0075 \cdot \frac{12}{12}$

1. Muodostetaan koron laskemiseksi kaava.

`=50*0,0075*B2/12`

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

3. Lasketaan korkojen summa.
`=SUMMA(C2:C13)`

Korot vuoden ajalta ovat yhteensä 2,44 €.

Talletusten arvo vuoden lopussa on siis $12 \cdot 50$ € $+ 2{,}44$ € $= 602{,}44$ €.

b)

Kaikkien yksittäisten vuosien talletukset korkoineen ovat 602,44 €. Jokainen näistä talletuksista kasvaa korkoa korolle eripituisen ajanjakson 10 vuoden aikana.

- Ensimmäisen vuoden talletukset kasvavat tilillä korkoa korolle 9 vuotta
- Toisen vuoden talletukset kasvavat korkoa korolle 8 vuotta
- Viimeisen vuoden talletukset on jo huomioitu yksinkertaisen koron avulla lasketussa vuositalletuksen arvossa 602,44 €. Tämä rahamäärä ei enää kasva korkoa korolle.

Lasketaan kasvanut pääoma
taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B	C
1	talletusvuosi	korkoaika (vuotta)	kasvanut pääoma (€)
2	1	9	644,35
3	2	8	639,55
4	3	7	634,79
5	4	6	630,06
6	5	5	625,37
7	6	4	620,72
8	7	3	616,10
9	8	2	611,51
10	9	1	606,96
11	10	0	602,44
12		yhteensä	6231,84

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa korolle 9 vuotta eli
$K_{19} = 602{,}44 \cdot 1{,}0075^{9}$

1. Muodostetaan kasvaneen pääoman laskemiseksi kaava.

`=602,44*1,0075^B2`

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

3. Lasketaan summa.

`=SUMMA(C3:C11)`

Tilillä on rahaa 10 vuoden kuluttua 6 230 €

Vastaus **a)** 602,44 € **b)** 6 230 €

8.25

a)

Merkitään valmistusmäärää kirjaimella x.

Kokonaiskustannukset K (€) ovat kiinteiden ja muuttuvien kustannusten summa.

$K(x) = 98000 + 12{,}3x$

- kiinteät kustannukset (€): **98 000**
- muuttuvat kustannukset (€): **12,30*x***

b)

Koteloista 75 % myydään hinnalla 17,99 €, joten niistä saatava liikevoitto on

$0{,}75 \cdot x \cdot 17{,}99$(€).

Koteloista 25 % myydään hinnalla 14,00 €, joten niistä saatava liikevoitto on

$0{,}25 \cdot x \cdot 14$(€).

Myyntituottoa kuvaa funktio $M(x) = 0{,}75x \cdot 17{,}99 + 0{,}25x \cdot 14 = 16{,}9925x$ (€).

Voitto eli tulos saadaan vähentämällä myyntituotosta kokonaiskustannukset.

$V(x) = 16{,}9925x - (98000 + 12{,}3x) = 4{,}6925x - 98000$

c)

Kun kiinteät kustannukset katetaan, voitto on vähintään 0 €.

Muodostetaan voiton funktion lausekkeen avulla yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \\ 4{,}6925x - 98000 &= 0 \\ 4{,}6925x &= 98000 \\ x &= 20884{,}389\ldots \end{aligned}$$

20 884 koteloa ei vielä riitä, joten pyöristetään ylöspäin. Koteloita on tehtävä 20 885.

Vastaus **a)** $K(x) = 98000 + 12{,}3x$ (€)
b) $V(x) = 4{,}6925x - 98000$ (€)
c) 20 885

8.26

Mummo antaa 700 € rahaa, joten alkupääoma on 700 €.

Vuosikorkokanta on 0,6 % ja nettokorkokanta on $0{,}7 \cdot 0{,}6\ \% = 0{,}42\ \%$

Korkotekijä on silloin $q = 1{,}0042$.

Allu tallettaa yhteensä 11 kertaa summan x (€).

Ensimmäinen talletus ehtii kerryttää korkoa 11 kuukautta ja viimeinen 1 kuukauden.

Muodostetaan Allun talletusten korkojen summa vuoden lopussa.

$$
\begin{aligned}
& x \cdot 0{,}0042 \cdot \frac{1}{12} + x \cdot 0{,}0042 \cdot \frac{2}{12} + \cdots + x \cdot 0{,}0042 \cdot \frac{11}{12} \\
&= \frac{0{,}0042x}{12(1 + 2 + \cdots + 11)} \\
&= \frac{0{,}0042x}{12}\left(11 \cdot \frac{1 + 11}{2}\right) \\
&= \frac{66 \cdot 0{,}0042x}{12} \\
&= 0{,}0231x
\end{aligned}
$$

Aritmeettisen jonon summa

Alkupääoman ja talletusten korkoineen summa tulee olla pyörän hinta 1800 €.

Vuodessa talletetaan $11x$ (€).

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan talletuksen suuruus x.

$$
\begin{aligned}
700 \cdot 1{,}0042 + 11x + 0{,}0231x &= 1800 \\
x &= 99{,}523 \ldots\ (€)
\end{aligned}
$$

99,52 € ei vielä riitä saavuttamaan tavoitetta, joten pyöristetään ylöspäin.
Allun tulee tallettaa kuukausittain 99,53 €.

Vastaus 99,53 €

8.27

a)

Selvitetään nimellinen vuosikorkoprosentti koronkorkolaskun avulla.

- korkokausien lukumäärä on $n = 3$
- sijoitettu pääoma on $K = 1000$ €
- kasvanut pääoma $K_3 = 1086{,}37$ €

Muodostetaan kasvaneen pääoman avulla yhtälö ja ratkaistaan korkotekijä *q.*

$$1000 \cdot q^3 = 1086{,}37$$
$$q = 1{,}02799\ldots$$

Koronkorko
$K_n = Kq^n$

Määritetään korkotekijän avulla talletuksen vuosikorkoprosentti.

$1{,}02799 - 1 = 0{,}02799\ldots \approx 2{,}8\ \%$

Talletuksen vuosikorkoprosentti on 2,8 %.

b)

Inflaatio on 8,5 %, joten 1000 euron sijoituksen arvo vuoden 2013 lopussa on

$1{,}085 \cdot 1000\ € = 1085\ €$.

Talletuksen todellinen korko on siis $1086{,}37\ € - 1085\ € = 1{,}37\ €$

Vastaus **a)** 2,8 %

b) 1,37 €

8.28

a)

Diskontataan tuotot nykyhetkeen.

Diskonttaus
$K = K_n q^{-n}$

Korkokanta on 4,7 %, joten diskonttaustekijä on 1,047.

diskontattava arvo (€)	**aika vuosina nykyhetkestä**	**nykyarvo (€)**
7 500	1	$7500 \cdot 1{,}047^{-1}$
7 500	2	$7500 \cdot 1{,}047^{-2}$
7 500	3	$7500 \cdot 1{,}047^{-3}$
7 500	4	$7500 \cdot 1{,}047^{-4}$
7 500 + 5 000 =12 500	5	$12500 \cdot 1{,}047^{-5}$

Lasketaan tuottojen nykyarvo K (€).

$$\begin{aligned} K &= 7500 \cdot 1{,}047^{-1} + 7500 \cdot 1{,}047^{-2} + 7500 \cdot 1{,}047^{-3} + 7500 \cdot 1{,}047^{-4} + 12500 \cdot 1{,}047^{-5} \\ &= 36716{,}210\ldots \\ &\approx 36716{,}21\ (€) \end{aligned}$$

Tuottojen nykyarvo on suurempi kuin investoinnin kustannukset 35 000 €,
joten investointi on kannattava.

Vastaus Investointi on kannattava.

8.29

Toimitilasta maksetaan ostohetkellä 220 000 € (nykyhetki).
Tällöin jää maksettavaksi 485 000 € – 220 000 € = 265 000 €.

- Maksuerät suoritetaan kuukausittain, kuukausikorko on $\frac{4{,}32\ \%}{12} = 0{,}36\ \%$.
- Viiden vuoden aikana suoritetaan $5 \cdot 12 = 60$ maksua, joista 59 on suuruudeltaan 4500 €.

Diskontataan kaikki 4 500 € maksuerät ostohetkeen. Diskonttaustekijä saadaan kuukausikoron avulla eli $q = 1{,}0036$.

Suoritetaan diskonttaus taulukkolaskentaohjelmalla ja lasketaan nykyarvojen summa.

	A	B
1	maksuerän aika ostohetkestä (kk)	diskontattu arvo (€)
2	1	4483,86
3	2	4467,77
4	3	4451,75
58	57	3666,53
59	58	3653,38
60	59	3640,27
61	yhteensä	238812,93
62		

Rivit 5–57 on piilotettu näkyvistä

Ensimmäinen 4 500 € erän diskontattu arvo saadaan kaavalla
$K = 4\,500 \cdot 1{,}0036^{-1}$

1. Muodostetaan diskonttaukselle kaava.

`=4500*1,0036^(-A2)`

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

3. Lasketaan summa.

`=SUMMA(C2:C60)`

Muodostetaan viimeisen maksuerän suuruutta kirjaimella *x*. Viimeisen maksuerän ostohetkeen diskontattu nykyarvo on $x \cdot 1{,}0036^{-60}$.

Muodostetaan kaikkien maksuerien nykyarvojen avulla yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$238812{,}93 + x \cdot 1{,}0036^{-60} = 265000$$
$$x = 32488{,}231 \ldots$$
$$x \approx 32500\ (€)$$

Viimeisen maksuerän suuruus on 32 500 €.

Vastaus 32 500 €

8.30

Diskontataan molempien veljesten maksuerät ostohetkeen.

Laskentakorkokanta on 1,95 %, joten diskonttaustekijä on $q = 1{,}0195$.

Diskonttaus
$K = K_n q^{-n}$

Matti maksaa ensin 32 000 € ja sitten 900 € neljä kertaa vuoden välein.

$$\begin{aligned} K_{\text{Matti}} &= 32000 + 900 \cdot 1{,}0195^{-1} + 900 \cdot 1{,}0195^{-2} + 900 \cdot 1{,}0195^{-3} + 900 \cdot 1{,}0195^{-4} \\ &= 35431{,}118 \ldots \approx 35431{,}12\ (€) \end{aligned}$$

Teppo maksaa heti 30 500 € ja sitten kaksi kertaa 2500 € vuoden välein.

$$\begin{aligned} K_{\text{Teppo}} &= 30500 + 2500 \cdot 1{,}0195^{-1} + 2500 \cdot 1{,}0195^{-2} \\ &= 35357{,}461.. \approx 35357{,}46\ (€) \end{aligned}$$

Puimurin nykyarvo on siis $35431{,}12\ € + 35357{,}46\ € = 70788{,}58\ €$.

Maksuosuuksien ero on $35431{,}12\ € - 35357{,}46\ € = 73{,}66\ €$.

Vastaus nykyarvo 70 788,58 € ja ero 73,66 €

8.31

a)

Takaisinmaksueriä on kahden vuoden aikana $2 \cdot 12 = 24$ kappaletta.
Lasketaan yhden lyhennyksen suuruus.

$$\frac{12000\text{ €}}{24} = 500\text{ €}$$

Vuosikorkokanta on 1,92 %, joten kuukausikorko on $\frac{1{,}92\ \%}{12} = 0{,}16\ \%$.
Ensimmäisessä maksuerässä korko maksetaan koko lainasummasta.
Lasketaan maksuerän suuruus.

$$500\text{ €} + 0{,}0016 \cdot 12000\text{ €} = 519{,}20\text{ €}$$

b)

Lasketaan, kuinka paljon lainaa on lyhennetty 5 maksuerän aikana.

$$5 \cdot 500\text{ €} = 2500\text{ €}$$

Lasketaan, kuinka paljon lainaa on jäljellä.

$$12000\text{ €} - 2500\text{ €} = 9500\text{ €}$$

Lainaa on jäljellä 5 maksuerän jälkeen 9 500 €.

c)

6. maksuerä sisältää lyhennyksen sekä koron jäljellä olevasta lainasta (9 500 €).

Lasketaan 6. maksuerän suuruus.

$$500\text{ €} + 0{,}0016 \cdot 9500\text{ €} = 515{,}20\text{ €}$$

Vastaus **a)** 519,20 €

b) 9 500 €

c) 515,20 €

8.32

a)

Lainan korkokanta on 1,2 %, joten kuukausikorkokanta on $\frac{1,2\ \%}{12} = 0,1\ \%$.
Kootaan annuiteetin laskemiseen tarvittavat tiedot:

- lainapääoma on $K = 130000$ €
- korkotekijä on $q = 1,001$
- maksuerien lukumäärä on $n = 15 \cdot 12 = 180$

Lasketaan tasaerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 130000 \cdot 1,001^{180} \cdot \frac{1 - 1,001}{1 - 1,001^{180}} = 789,531 \ldots \approx 789,53\ (€)$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

b)

Lasketaan jäljellä olevan lainan määrä 80 lyhennyksen jälkeen.

$$\begin{aligned} V_{80} &= 130000 \cdot 1,001^{80} - 789,53 \cdot \frac{1 - 1,001^{80}}{1 - 1,001} \\ &= 75098,239 \ldots \\ &\approx 75098,24\ € \end{aligned}$$

Jäljellä olevan lainan määrä

$$V_k = K \cdot q^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

Vastaus **a)** 789,53 €

b) 75 098,24 €

8.33

a)

Pankki lainaa Linukselle $0{,}7 \cdot 114000\ € = 79800\ €$

Takaisinmaksueriä on 14 vuoden aikana $4 \cdot 14 = 56$ kappaletta.
Lasketaan yhden lyhennyksen suuruus.

$$\frac{79800\ €}{56} = 1425\ €$$

Kokonaiskorko on 1,1 % + 1,3 % = 2,4 %, joten neljännesvuosikorko on $\frac{2{,}4\ \%}{4} = 0{,}6\ \%$.

Ensimmäisessä maksuerässä korko maksetaan koko lainasummasta.
Lasketaan maksuerän suuruus.

$1425\ € + 0{,}006 \cdot 79800\ € = 1903{,}80\ €$

b)

Kootaan annuiteetin laskemiseen tarvittavat tiedot:

- lainapääoma on $K = 79800\ €$
- korkotekijä on $q = 1{,}006$
- maksuerien lukumäärä on $n = 56$

Lasketaan tasaerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 79800 \cdot 1{,}006^{56} \cdot \frac{1 - 1{,}006}{1 - 1{,}006^{56}} = 1682{,}012 \ldots \approx 1682{,}01\ (€)$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

Vastaus **a)** 1903,80 €

b) 1682,01 €

8.34

Lainan kuukausikorkokanta on $\frac{2{,}40\ \%}{12} = 0{,}2\ \%$, joten korkotekijä $q = 1{,}002$.
Lainan määrä on $K = 150000$ €

Merkitään maksuerien määrää kirjaimella *n*. Tasaerän suuruus on 855,89 € eli $A = 855{,}89$.
Muodostetaan annuiteetin avulla yhtälö ja ratkaistaan *n*.

$$150000 \cdot 1{,}002^n \cdot \frac{1-1{,}002}{1-1{,}002^n} = 855{,}89$$
$$n = 216{,}001\ldots$$
$$n \approx 216$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

Aleksi tarvitsee lainan maksuun 216 maksuerää, joten laina-aika on $\frac{216}{12} = 18$ vuotta.

Vastaus 18 vuotta

8.35

Lainaa maksetaan kahden kuukauden välein, joten maksuerän korkokanta on

$$\frac{2{,}76\ \%}{6} = 0{,}46\ \%.$$

Korkotekijä on siis $q = 1{,}0046$.

Maksueriä on yhteensä $n = 12 \cdot 6 = 72$.

Merkitään lainan määrää kirjaimella K. Tasaerän suuruus on 4086,81 € eli $A = 4086{,}81$.
Muodostetaan annuiteetin avulla yhtälö ja ratkaistaan K.

$$\begin{aligned} K \cdot 1{,}0046^{72} \cdot \frac{1 - 1{,}0046}{1 - 1{,}0046^{72}} &= 4086{,}81 \\ K &= 249999{,}879\ldots \\ K &\approx 250000\ (€) \end{aligned}$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

Yritys otti 250 000 € lainan.

Vastaus 250 000 €

8.36

a)

Lainan korkokanta on 3,72 %, joten kuukausikorkokanta on $\frac{3{,}72\ \%}{2} = 0{,}31\ \%$.

Lasketaan tasalyhennyksen suuruus, kun maksueriä on $5 \cdot 12 = 60$.

$$\frac{87000\ €}{60} = 1450\ €$$

Taulukoidaan maksuerät ja lasketaan korko.

	A	B	C	D
1	Maksuerä	Lainamäärä (€)	Lyhennys (€)	Korko (€)
2	1.	87000	1450	269,70
3	2.	85550	1450	265,21
59	58.	4350	1450	13,49
60	59.	2900	1450	8,99
61	60.	1450	1450	4,50
62			yhteensä	8225,85

1. Muodostetaan kaava jäljellä olevan lainamäärän laskemiseksi.

`=B2-1450`

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

1. Muodostetaan kaava koron laskemiseksi.

`=0,0031*B2`

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

`=SUMMA(D2:D61)`

Korkoa maksetaan yhteensä 8 226 €.

b)

Lasketaan ensin tasaerän suuruus.
Lainan korkokanta on 3,72 %, joten kuukausikorkokanta on $\frac{3{,}72\ \%}{2} = 0{,}31\ \%$.

- lainapääoma on $K = 87000\ €$
- korkotekijä on $q = 1{,}0031$
- maksuerien lukumäärä on $n = 5 \cdot 12 = 60$

Lasketaan tasaerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 87000 \cdot 1{,}0031^{60} \cdot \frac{1 - 1{,}0031}{1 - 1{,}0031^{60}} = 1591{,}267\ldots \approx 1591{,}27\ (€)$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

Vilma maksaa yhteensä 60 maksuerää. Korkojen määrä saadaan vähentämällä maksetusta määrästä lainapääoma.

$$60 \cdot 1591{,}27\ € - 87000\ € = 8476{,}20\ € \approx 8476\ €$$

Vastaus **a)** 8 226 €
b) 8 476 €

8.37

a) Lasketaan tasaerän suuruus, kun laina-aika on 22 vuotta.
Lainan korkokanta on 3,70 %, joten kuukausikorkokanta on $\frac{3{,}70\ \%}{2} = 1{,}85$ %.

- lainapääoma on $K = 120000$ €
- korkotekijä on $q = 1{,}00185$
- maksuerien lukumäärä on $n = 2 \cdot 22 = 44$

Lasketaan tasaerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 120000 \cdot 1{,}0185^{44} \cdot \frac{1 - 1{,}0185}{1 - 1{,}0185^{44}} = 4010{,}043 \ldots \approx 4010{,}04\ (€)$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

Annuiteetin suuruus on 4010,04 €

b) Kun laina-aika on 60 vuotta, maksueriä on $n = 60 \cdot 2 = 120$.
Muut muuttujat pysyvät samana. Lasketaan tasaerän suuruus.

$$A = 120000 \cdot 1{,}0185^{120} \cdot \frac{1 - 1{,}0185}{1 - 1{,}0185^{120}} = 2496{,}723 \ldots \approx 2496{,}72\ (€)$$

Annuiteetin suuruus on 2496,72 €.

Lasketaan jäljellä oleva laina 44 maksuerän jälkeen.

$$\begin{aligned} V_{44} &= 120000 \cdot 1{,}0185^{44} - 2496{,}72 \cdot \frac{1 - 1{,}0185^{44}}{1 - 1{,}0185} \\ &= 101449{,}391 \ldots \\ &\approx 101449{,}39\ (€) \end{aligned}$$

Jäljellä olevan lainan määrä

$$V_k = K \cdot q^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

Kun 22 vuoden laina-ajalla laina olisi maksettu loppuun,
60 vuoden maksuajalla lainaa olisi jäljellä 101 449,39 €.

Vastaus **a)** 4010,04 €

b) 2496,72 €, lainaa jäljellä 101 449,39 €

8.38

Lasketaan tasaerän suuruus, kun laina-aika on 10 vuotta.

Lainan korkokanta on 4 % ja lainaa lyhennetään vuosittain.

- lainapääoma on $K = 40000$ €
- korkotekijä on $q = 1{,}04$
- maksuerien lukumäärä on $n = 10$

Lasketaan tasaerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 40000 \cdot 1{,}04^{10} \cdot \frac{1 - 1{,}04}{1 - 1{,}04^{10}} = 4931{,}637 \ldots \approx 4931{,}64 \text{ (€)}$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

Annuiteetin suuruus on 4931,64 €.

Viiden vuoden kuluttua korko nousee kuuteen prosenttiin.
Lasketaan jäljellä olevan lainan määrä, kun maksueriä on ollut 5.

$$\begin{aligned} V_5 &= 40000 \cdot 1{,}04^5 - 4931{,}64 \cdot \frac{1 - 1{,}04^5}{1 - 1{,}04} \\ &= 21954{,}763 \ldots \\ &\approx 21954{,}76 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Jäljellä olevan lainan määrä

$$V_k = K \cdot q^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

Maksuerän suuruus ei muutu. Uusi korkotekijä on $q = 1{,}06$.
Muodostetaan annuiteetin avulla yhtälö ja ratkaistaan maksuerien määrä n.

$$4931{,}64 = 21954{,}76 \cdot 1{,}06^n \cdot \frac{1 - 1{,}06}{1 - 1{,}06^n}$$

$$n = 5{,}333 \ldots$$

Maksueriä tarvitaan siis 6, jotta laina tulee maksetuksi.
Laina maksetaan vuoden 2013 lopussa pois.

Lasketaan sitten paljonko lainaa olisi jäljellä alkuperäisen maksuohjelman mukaisesti 5 maksuerän jälkeen.

$$\begin{aligned} V_5 &= 21954{,}76 \cdot 1{,}06^5 - 4931{,}64 \cdot \frac{1 - 1{,}06^5}{1 - 1{,}06} \\ &= 1580{,}308 \ldots \\ &\approx 1580{,}31 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Jäljellä olevan lainan määrä

$$V_k = K \cdot q^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

Tästä maksetaan viimeisessä erässä vielä korko, joten viimeisen maksuerän suuruus on

$$1580{,}31 \text{ €} + 0{,}06 \cdot 1580{,}31 \text{ €} = 1675{,}128 \ldots \text{ €} \approx 1675{,}13 \text{ €}$$

Vastaus aluksi 4 931,64 €, koron nousun vuoksi viimeinen erä maksetaan vuoden 2013 lopussa ja sen suuruus on 1675,13 €