Binomi 7 – Kertauskoe – Tehtävien malliratkaisut

A1.

A – II

Lasketaan talletuksen arvo koronkorkolaskulla $K_n = Kq^n$. Nyt alkupääoma on $K = 2000$, korkokausien määrä $n = 10$ ja korkokanta on $q = 100\ \% + 3{,}6\ \% = 103{,}6\ \% = 1{,}036$.

B – IV

Tasaerälainan suuruus lasketaan kaavalla $A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$.

C – III

Kun halutaan laskea tulevaisuuden maksun nykyarvo, käytetään diskonttauskaavaa
$K = K_n q^{-n}$.

D – I

Yksinkertainen korkolaskukaava on $r = kit$, missä alkupääoma $k = 2000$,
korko $i = 0{,}036$ ja aika $t = \frac{10}{12}$.

Vastaus **A – II**
B – IV
C – III
D – I

A2.

a)

Säästöistä muodostuu geometrinen summa, joka lasketaan summakaavan avulla.
Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, suhdeluku q ja termien lukumäärä n.

- Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 100$
- Suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{120}{100} = 1,2$
- Jäsenten lukumäärä on $n = 8$

$$S_8 = 100 \cdot \frac{1-1,2^8}{1-1,2} = 1649,908\ldots \approx 1650\ (€)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Kroisos on tallettanut 1 650 €.

b)

Muodostetaan ensin aritmeettisen jonon yleinen jäsen, kun ensimmäinen jäsen on 100 €
ja differenssi $d = 120\ € - 100\ € = 20\ €$.

$$\begin{aligned} a_n &= 100 + (n-1) \cdot 20 \\ &= 100 + 20n - 20 \\ &= 20n + 80 \end{aligned}$$

Lasketaan viimeisen talletuksen suuruus eli sijoitetaan yleiseen jäseneen $n = 8$.

$$a_8 = 20 \cdot 8 + 80 = 240$$

Aritmeettinen summa lasketaan summakaavan avulla. Laskemiseen tarvitaan summan ensimmäinen termi a_1, viimeinen termi a_8 ja termien lukumäärä n.

$$S_8 = n \cdot \frac{a_1 + a_8}{2} = 8 \cdot \frac{100 + 240}{2} = 1360\ (€)$$

$$\boxed{S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

Kroisos tallettaa 1 360 €.

Vastaus **a)** 1 650 € **b)** 1 360 €

A3.

a)
Lainan korkokanta on 1,8 %, joten kuukausikorkokanta on $\frac{1{,}8\ \%}{12} = 0{,}15\ \%$.
Kootaan annuiteetin laskemiseen tarvittavat tiedot:

- lainapääoma on $K = 140000$ €
- korkotekijä on $q = 1{,}0015$
- maksuerien lukumäärä on $n = 16 \cdot 12 = 192$

Laskataan tasaerän eli annuiteetin suuruus.

$$A = 140000 \cdot 1{,}0015^{192} \cdot \frac{1 - 1{,}0015}{1 - 1{,}0015^{192}} = 839{,}742\ldots \approx 839{,}74\ (€)$$

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

b)

Lasketaan jäljellä olevan lainan määrä $10 \cdot 12 = 120$ lyhennyksen jälkeen.

$$\begin{aligned} V_{120} &= 140000 \cdot 1{,}0015^{120} - 839{,}74 \cdot \frac{1 - 1{,}0015^{120}}{1 - 1{,}0015} \\ &= 57270{,}673\ldots \\ &\approx 57300\ € \end{aligned}$$

Jäljellä olevan lainan määrä

$$V_k = K \cdot q^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

Vastaus **a)** 839,74 €

b) 57 300 €

A4.

a)

Kiinteät kustannukset pysyvät vakiona, joten funktio a kuvaa kiinteitä kustannuksia.

Liikevaihto kasvaa tuotteiden myynnin mukana ja sen kuvaaja kulkee origon kautta. Liikevaihtoa kuvaa siis funktio b.

Kokonaiskustannukset yhtä suuret kuin kiinteät kustannukset, kun tuotteita ei ole myyty / valmistettu. Kokonaiskustannukset kasvavat tuotteiden määrän mukana, joten funktio c kuvaa kokonaiskustannuksia.

b)

Yrityksen kiinteät kustannukset saadaan funktion a arvona.
Kiinteät kustannukset ovat 45 000 €.

c)

Funktioiden b ja c leikkauspiste eli kriittinen piste on (750, 90000). Kriittisen pisteen x-koordinaatti kertoo, kuinka monta tuotetta on myytävä, jotta kulut tulevat katetuksi.

Kenkiä tulee siis myydä 750 kappaletta, jotta yritys saa kustannukset katettua.

d)

Kun yritys myy 500 tuotetta, sen kokonaiskustannukset ovat 75 000 € ja liikevaihto 60 000 €.
Yritys tekee näin ollen tappiota 75 000 € − 60 000 € = 15 000 €.

Vastaus **a)** a kuvaa kiinteitä kustannuksia, b liikevaihtoa ja c kokonaiskustannuksia

b) 45 000 €

c) 750 tuotetta

d) tappiota 15 000 €

B5.

a)

Lasketaan rahamäärä koronkorkolaskun avulla.

$K = 2000 \qquad q = 100\ \% + 2{,}15\ \% = 102{,}15\ \% = 1{,}0215 \qquad n = 8$

$K_8 = 2000 \cdot 1{,}0215^8 = 2371{,}029\ldots \approx 2371{,}03\ (€)$

Koronkorko
$K_n = Kq^n$

Tilillä on kahdeksan vuoden jälkeen rahaa 2 371,03 €.

b)

Kun korkoa on kertynyt 693,81 €, tilillä on rahaa 2 000 € + 693,81 € = 2 693,81 €.

Merkitään vuosia kirjaimella *n*. Muodostetaan yhtälö koronkorkolaskun avulla
ja ratkaistaan *n*.

$$\begin{aligned} 2693{,}81 &= 2000 \cdot 1{,}0215^n \\ n &= 13{,}999\ldots \\ n &\approx 14 \end{aligned}$$

Korko on kertynyt 14 vuodessa.

c)

Muodostetaan kasvaneen pääoman avulla yhtälö ja ratkaistaan korkotekijä *q.*

$$\begin{aligned} 2000 \cdot q^8 &= 2613{,}33 \\ q &= \pm 1{,}0339\ldots \end{aligned}$$

Korkotekijäksi käy vain positiivinen luku, joten $q \approx 1{,}034$

Määritetään korkotekijän avulla talletuksen vuosikorkoprosentti.

$1{,}034 - 1 = 0{,}034 = 3{,}4\ \%$

Tilin nettokorkokanta olisi 3,4 %.

Vastaus **a)** 2 371,03 € **b)** 14 vuodessa **c)** 3,4 %

B6.

a) Lasketaan ensin tasaerän suuruus.

Lainan korkokanta on 2,52 %, joten kuukausikorkokanta on $\frac{2{,}52\ \%}{12} = 0{,}21\ \%$.

- lainapääoma on $K = 135000$ €
- korkotekijä on $q = 1{,}0021$
- maksuerien lukumäärä on $n = 12 \cdot 12 = 144$

Lasketaan tasaerän eli annuiteetin suuruus.

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

$$A = 135000 \cdot 1{,}0021^{144} \cdot \frac{1-1{,}0021}{1-1{,}0021^{144}} = 1087{,}359\ldots \approx 1087{,}36\ (€)$$

Erik maksaa yhteensä 60 maksuerää. Korkojen määrä saadaan vähentämällä maksetusta määrästä lainapääoma.

$$144 \cdot 1087{,}36\ € - 135000\ € = 21579{,}84\ € \approx 21580\ €$$

b) Lasketaan tasalyhennyksen suuruus, kun maksueriä on 144.

$$\frac{135000\ €}{144} = 937{,}50\ €$$

Taulukoidaan maksuerät ja lasketaan korko.

	A	B	C
1	Maksuerä	Lainamäärä (€)	Korko (€)
2	1.	135000	283,50
3	2.	134062,5	281,53
4	3.	133125	279,56
143	142.	2812,5	5,91
144	143.	1875	3,94
145	144.	937,5	1,97
146		yhteensä	20553,75

1. Muodostetaan kaava jäljellä olevan lainamäärän laskemiseksi.

`=B2-937,50`

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

1. Muodostetaan kaava koron laskemiseksi.

`=0,0021*B2`

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

`=SUMMA(C2:C145)`

Korkoa maksetaan yhteensä 20 550 €.

Vastaus **a)** 21 580 € **b)** 20 550 €

B7.

a)

Diskontataan tuotot nykyhetkeen.

Korkokanta on 3,2 %, joten diskonttaustekijä on 1,032.

Diskonttaus
$K = K_n q^{-n}$

diskontattava arvo (€)	aika vuosina nykyhetkestä	nykyarvo (€)
6 000	1	$6000 \cdot 1{,}032^{-1}$
6 000	2	$6000 \cdot 1{,}032^{-2}$
6 000 + 9 000 = 15 000	3	$15000 \cdot 1{,}032^{-3}$

Lasketaan tuottojen nykyarvo K (€).

$$\begin{aligned} K &= 6000 \cdot 1{,}032^{-1} + 6000 \cdot 1{,}032^{-2} + 15000 \cdot 1{,}032^{-3} \\ &= 25095{,}099\ldots \\ &\approx 25095{,}10\ (€) \end{aligned}$$

Investoinnin kustannukset ovat $4200\ € + 3400\ € + 12000\ € = 19600\ €$.

Tuottojen nykyarvo 25 095,10 € on suurempi kuin investoinnin kustannukset 19 600 €, joten investointi on kannattava.

b)

Yrityksen tulos saadaan vähentämällä kokonaiskustannukset liikevaihdosta.

$12500 \cdot 1{,}60\ € - 7600\ € - 12500 \cdot 0{,}35\ € = 8025\ €$

Tulos on 8 025 €.

Vastaus **a)** Investointi on kannattava.

b) 8 025 €

B8.

a)

Jokainen 150 € talletus on eri ajanjakson tilillä ennen ensimmäisen koron lisäämistä vuoden lopussa. Vuoden aikana tehtyjä talletuksia tarkastellaan yksinkertaisen korkolaskun avulla.

Lasketaan jokaiselle talletukselle korko taulukkolaskennan avulla.

$r = kit$

- nettokorkokanta on 2,10 %
- pääoma on $k = 150$ (€)

Lasketaan korot taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B	C
1	Talletuskuukausi	Korkoaika (kk)	Korko (€)
2	1.	12	3,15
3	2.	10	2,63
4	3.	8	2,10
5	4.	6	1,58
6	5.	4	1,05
7	6.	2	0,53
8		yhteensä	11,03

Ensimmäiselle talletukselle maksetaan korkoa 12 kuukautta eli $t = \frac{12}{12}$.

$r = 150 \cdot 0{,}021 \cdot \frac{12}{12}$

1. Muodostetaan koron laskemiseksi kaava.

```
=150*0,021*B2/12
```

2. Kopioidaan kaava seuraaville riveille.

3. Lasketaan korkojen summa.

```
=SUMMA(C2:C7)
```

Korot vuoden ajalta ovat yhteensä 11,03 €.

Talletusten arvo vuoden lopussa on siis $6 \cdot 150$ € $+ 11{,}03$ € $= 911{,}03$ €.

Kaikkien yksittäisten vuosien talletukset korkoineen ovat 911,03 €. Jokainen näistä talletuksista kasvaa korkoa korolle eripituisen ajanjakson 5 vuoden aikana.

- Ensimmäisen vuoden talletukset kasvavat tilillä korkoa korolle 4 vuotta
- Toisen vuoden talletukset kasvavat korkoa korolle 3 vuotta
- Viimeisen vuoden talletukset on jo huomioitu yksinkertaisen koron avulla lasketussa vuositalletuksen arvossa 911,03 €. Tämä rahamäärä ei enää kasva korkoa korolle.

Lasketaan talletusten summa.

$$\begin{aligned}&\ \ 911{,}03 + 911{,}03 \cdot 1{,}021 + 911{,}03 \cdot 1{,}021^2 + 911{,}03 \cdot 1{,}021^3 + 911{,}03 \cdot 1{,}021^4\\ &= 4750{,}526\ldots\\ &\approx 4751\ (€)\end{aligned}$$

Tilillä on rahaa 5 vuoden kuluttua 4 751 €.

b)

Talletukset muodostavat geometrisen summan, jossa

- ensimmäinen jäsen on $a_1 = 911,03$
- suhdeluku on $q = 1,021$

Merkitään vuosien määrää kirjaimella n. Muodostetaan geometrisen summan summakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan n.

$$911,03 \cdot \frac{1 - 1,021^n}{1 - 1,021} = 13000$$
$$n = 12,61 \ldots$$

Jos $n = 12$, tilillä on rahaa
$$911,03 \cdot \frac{1 - 1,021^{12}}{1 - 1,021} = 12287,75 \ldots \ (< 13000).$$

Jos $n = 13$, tilillä on rahaa
$$911,03 \cdot \frac{1 - 1,021^{13}}{1 - 1,021} = 13456,82 \ldots \ (> 13000).$$

Margitin on säästettävä vähintään 13 vuotta.

Vastaus **a)** 4 751 €
b) 13 vuotta

B9.

a)

Auton arvo laskee eksponentiaalisesti. Arvon suhde edellisen vuoden arvoon pysyy vakiona, joten arvo alenee yhtä monta prosenttia joka vuosi.

	A	B	C
1	aika (vuotta)	Arvo (€)	suhde edelliseen arvoon
2	0	40000	
3	1	32000	0,800
4	2	25600	0,800
5	3	20480	0,800
6	4	16384	0,800
7	5	13107,2	0,800
8	6	10485,8	0,800
9	7	8388,61	0,800

b)

Auton arvo aina 0,8-kertaistuu edelliseen vuoteen nähden.

Auton arvoa kuvaa lauseke $a_n = 40000 \cdot 0{,}8^n$, missä n on auton ikä vuosina.

c)

Muodostetaan yhtälö $a_n = 2000$ ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 2000 \\ 40000 \cdot 0{,}8^n &= 2000 \\ n &= 13{,}425\ldots \end{aligned}$$

13 vuotta ei riitä vielä siihen, että arvo on 2000 €, joten pyöristetään ylöspäin.
Arvo on alle 2000 € 14 vuoden kuluttua.

Vastaus **a)** Auton arvo laskee eksponentiaalisesti yhtä monta prosenttia joka vuosi.

b) $a_n = 40000 \cdot 0{,}8^n$

c) 14 vuoden jälkeen