Luku 16 – Tehtävien malliratkaisut

16.1

a)

Merkitään suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa kirjaimella x
ja ratkaistaan sen pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 2^2 + 3^2$$
$$x^2 = 13$$
$$x = \pm\sqrt{13}$$

Pituus on positiivinen, joten $x = \sqrt{13}$.

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

b)

$$\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \tan\beta = \frac{3}{2}$$

c)

Ratkaistaan kulmat sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \qquad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$
$$\alpha = 33{,}69\ldots° \qquad \beta = 56{,}30\ldots°$$
$$\alpha \approx 34° \qquad \beta \approx 56°$$

Vastaus **a)** $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

b) $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\tan\beta = \frac{3}{2}$

c) $\alpha = 34°,\ \beta = 56°$

16.2

a)

Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,5 cm ja 2,3 cm.
Ratkaistaan hypotenuusan pituus *x* Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
2{,}3^2 + 3{,}5^2 &= x^2 \\
x^2 &= 17{,}54 \\
x &= \pm\sqrt{17{,}54} \\
x &= \pm 4{,}188\ldots
\end{aligned}
$$

Koska pituus on aina positiivinen, $x = 4{,}188\ldots\ \text{cm} \approx 4{,}2$ cm.

b)

Suorakulmaisen kolmion kateetin pituus on 6,1 cm ja hypotenuusan pituus 9,3 cm.
Ratkaistaan toisen kateetin pituus *x* Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6{,}1^2 &= 9{,}3^2 \\
x^2 &= 9{,}3^2 - 6{,}1^2 \\
x &= 49{,}28 \\
x &= \pm\sqrt{49{,}28} \\
x &= \pm 7{,}019\ldots
\end{aligned}
$$

Koska pituus on aina positiivinen, $x = 7{,}019\ldots\ \text{cm} \approx 7{,}0$ cm.

Vastaus **a)** 4,2 cm

b) 7,0 cm

16.3

a)

Merkitään tunnetun kulman viereisen kateetin pituutta kirjaimella *x.*
Ratkaistaan *x* tangentin avulla.

$$\tan 50° = \frac{4{,}0}{x}$$

$$x = \frac{4{,}0}{\tan 50°}$$

$$x = 3{,}356 \ldots$$

$$x \approx 3{,}4 \text{ (cm)}$$

Toisen kateetin pituus on 3,4 cm.

b)

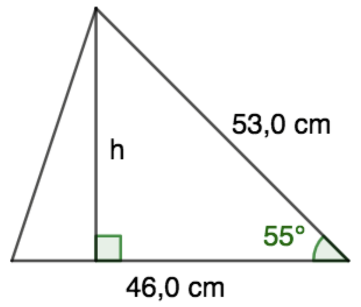
Lasketaan kolmion pinta-ala kannan ja korkeuden avulla.

$$A = \frac{4{,}0 \text{ cm} \cdot 3{,}356 \ldots \text{ cm}}{2} = 6{,}712 \ldots \text{ cm}^2 \approx 6{,}7 \text{ cm}^2$$

Vastaus **a)** 3,4 cm

b) 6,7 cm^2

16.4



Kolmion korkeusjana *h* muodostaa suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan *h* sinin avulla.

$$\sin 55° = \frac{h}{53{,}0}$$
$$h = \sin 55° \cdot 53{,}0$$
$$h = 43{,}415\ldots\ (\text{cm})$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{46{,}0\ \text{cm} \cdot 43{,}415\ldots\ \text{cm}}{2} = 998{,}545\ldots\ \text{cm}^2 \approx 999\ \text{cm}^2$$

b)

Kolmion korkeus on toisen kateetin pituus. Merkitään sitä kirjaimella *x.* Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + 3{,}9^2 = 5{,}1^2$$
$$x^2 = 10{,}8$$
$$x = \pm\sqrt{10{,}8}$$
$$x = \pm 3{,}286\ldots$$

Koska pituus on aina positiivinen, $x = 3{,}286\ldots$ m.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{3{,}9\ \text{m} \cdot 3{,}286\ldots\ \text{m}}{2} = 6{,}408\ldots\ \text{m}^2 \approx 6{,}4\ \text{m}^2$$

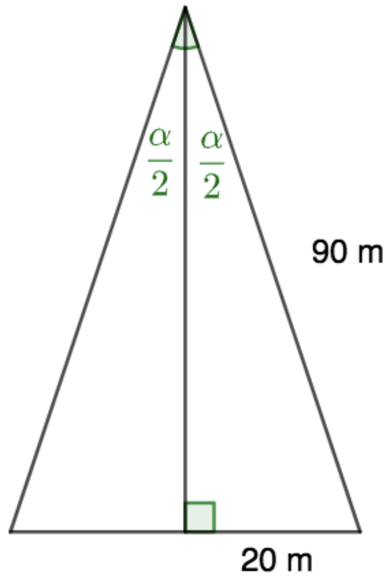
Vastaus **a)** 999 cm^2

b) 6,4 m^2

16.5

a)

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.



Korkeusjana h synnyttää kaksi suorakulmaista kolmioita, joiden hypotenuusan pituus on 90 m ja toisen kateetin $\frac{40\text{ m}}{2} = 20\text{ m}$.

Ratkaistaan huippukulma α sinin avulla.

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{20}{90} \\
\frac{\alpha}{2} &= 12{,}839\ldots° \\
\alpha &= 25{,}679\ldots° \\
\alpha &\approx 26°
\end{aligned}
$$

b)

Ratkaistaan kolmion korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 20^2 &= 90^2 \\
x^2 &= 7700 \\
x &= \pm\sqrt{7700} \\
x &= \pm 87{,}749\ldots
\end{aligned}
$$

Koska pituus on aina positiivinen, $x = 87{,}749\ldots\text{ m}$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

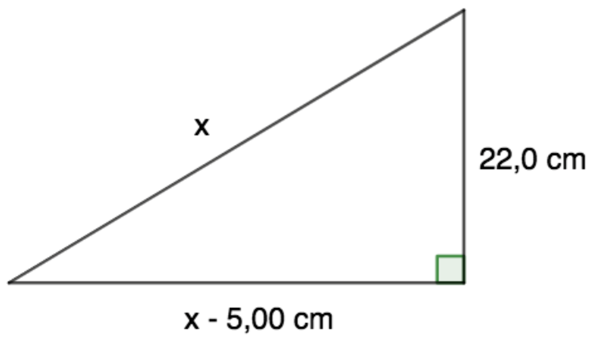
$$A = \frac{40\text{ m} \cdot 87{,}749\ldots\text{ m}}{2} = 1754{,}992\ldots\text{ m}^2 \approx 1755\text{ m}^2$$

Vastaus **a)** 26°

b) 1755 m^2

16.6

Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella *x.*
Tällöin kateettien pituudet ovat 22,0 cm ja
x – 5,00 cm.



Ratkaistaan x Pythagoraan lauseella.

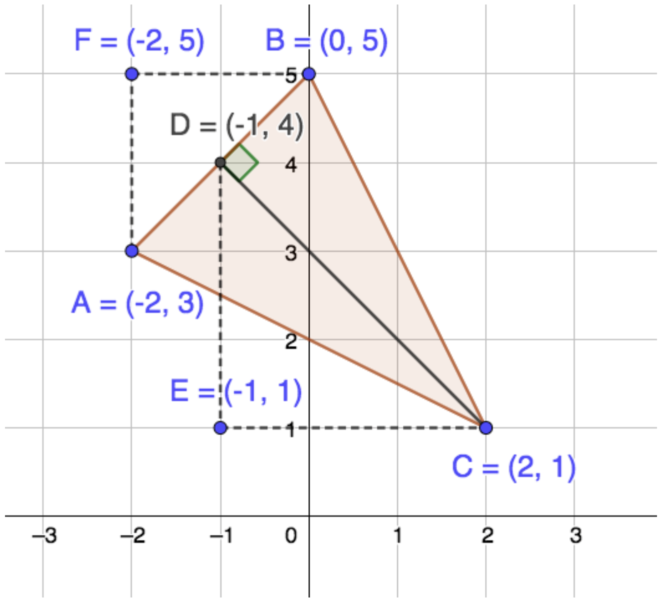
$$22{,}0^2 + (x - 5{,}00)^2 = x^2$$
$$x = 50{,}9 \text{ (cm)}$$

Hypotenuusan pituus on 50,9 cm.

Vastaus 50,9 cm

16.7

a)



Lasketaan janan AB keskipisteen D koordinaatit pisteiden A ja B koordinaattien avulla.

$$x_D = \frac{-2+0}{2} = -1$$

$$y_D = \frac{3+5}{2} = 4$$

Piste $D = (-1, 4)$.

b)

Piirretään suorakulmainen kolmio ECB, jonka hypotenuusa jana CD on.
Kolmion kateettien pituudet ovat $4 - 1 = 3$ ja $2 - (-1) = 3$.

Ratkaistaan janan CD pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$CD^2 = 3^2 + 3^2$$
$$CD = \pm\sqrt{18}$$

Pituus on aina positiivinen, joten $CD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

c)

Piirretään suorakulmainen kolmio ABF, jonka hypotenuusa jana AB on.
Kolmion kateettien pituudet ovat $0 - (-2) = 2$ ja $5 - 3 = 2$.

Ratkaistaan janan AB pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$AB^2 = 2^2 + 2^2$$
$$AB = \pm\sqrt{8}$$

Pituus on aina positiivinen, joten $AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

d)

Lasketaan kolmion pinta-ala kannan AB ja korkeuden CD avulla.

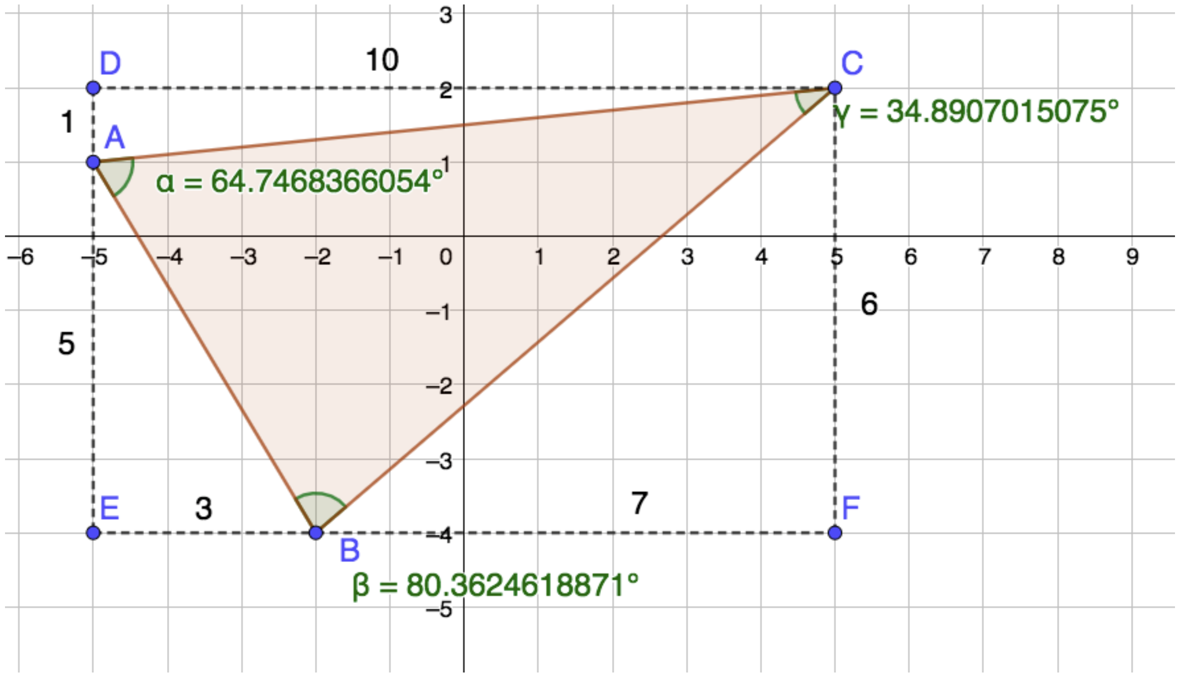
$$A = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 6$$

Vastaus **a)** $(-1, 4)$ **b)** $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ **d)** 6

16.8

a)

Piirretään pisteet koordinaatistoon. Kolmion pinta-ala on oikein, mutta kolmion kulmista yksikään ei ole suorakulma. Kyseessä ei siis ole suorakulmainen kolmio.



b)

Lasketaan kolmion ABC sivujen pituudet apukolmioiden ja Pythagoraan lauseen avulla.

$$AB^2 = 3^2 + 5^2 \qquad BC^2 = 7^2 + 6^2 \qquad AC^2 = 1^2 + 10^2$$
$$AB = \pm\sqrt{34} \qquad BC = \pm\sqrt{85} \qquad AC = \pm\sqrt{101}$$

Pituudet ovat aina positiivisia, joten $AB = \sqrt{34}$, $BC = \sqrt{85}$ ja $AC = \sqrt{101}$.

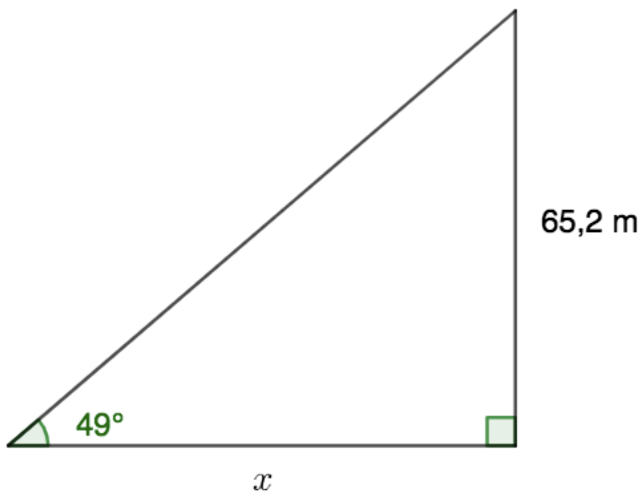
Jos kolmio ABC olisi suorakulmainen, sen sivujen pituudet toteuttaisivat Pythagoraan lauseen.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$\sqrt{34}^2 + \sqrt{85}^2 = \sqrt{101}^2$$
$$119 = 101$$

Yhtälö on epätosi, joten kolmio ABC ei ole suorakulmainen.

16.9

Piirretään mallikuva.



Merkitään Lotan etäisyyttä rakennuksesta kirjaimella x ja ratkaistaan se tangentin avulla.

$$\tan 49° = \frac{65{,}2}{x}$$

$$x = \frac{65{,}2}{\tan 49°}$$

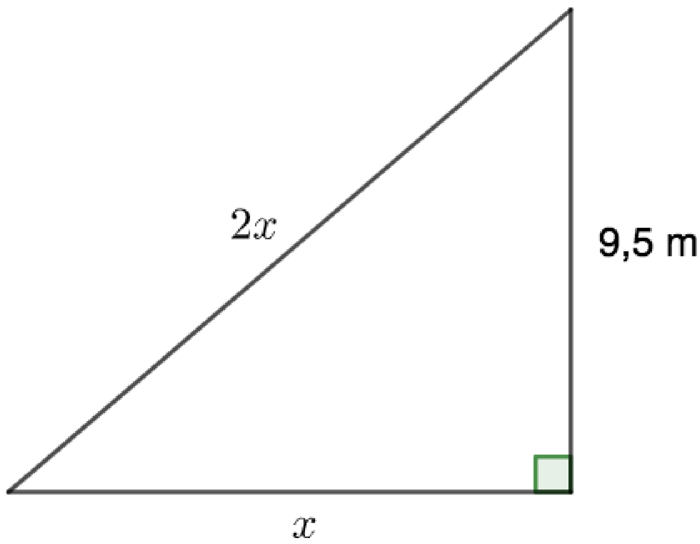
$$x = 56{,}677\ldots$$

$$x \approx 56{,}7 \text{ m}$$

Vastaus 56,7 m

16.10

Piirretään mallikuva.



Merkitään hiiren etäisyyttä tolpasta kirjaimella *x.* Tällöin haukan etäisyys hiirestä on 2*x.*

Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseen avulla.

$x^2 + 9{,}5^2 = (2x)^2$
$\qquad x = \pm 5{,}484\ldots$

Pituus on aina positiivinen, joten $x = 5{,}484\ldots$ m.

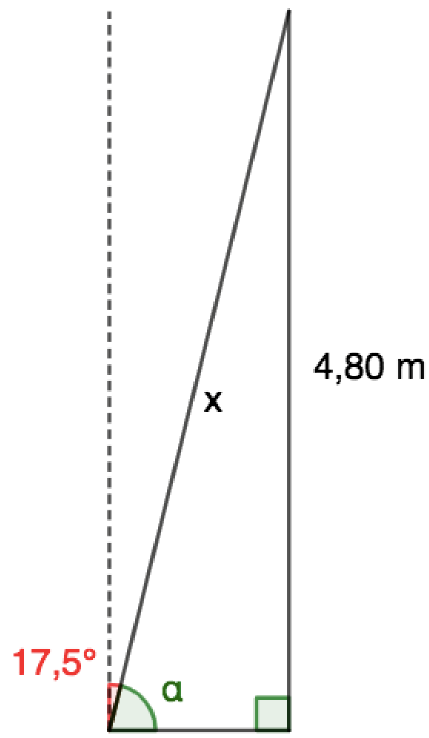
Haukan etäisyys hiirestä on siis

$2x = 2 \cdot 5{,}484\ldots\ \text{cm} \approx 10{,}969\ldots\ \text{cm} \approx 11$ m.

Vastaus 11 m

16.11

Piirretään mallikuva.



Merkitään puun pituutta kirjaimella x ja puun ja maantason välistä kulmaa kirjaimella α.

Kun puu on kallistunut 17,5°, on kulman α suuruus $\alpha = 90° - 17{,}5° = 72{,}5°$.

Ratkaistaan x sinin avulla.

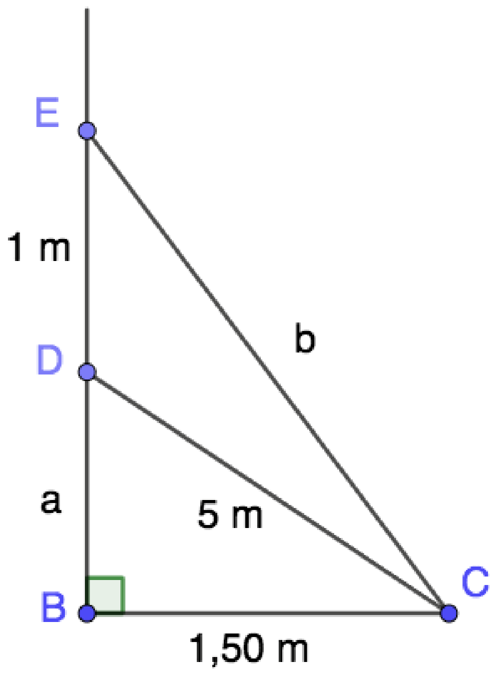
$$\sin 72{,}5° = \frac{4{,}80}{x}$$
$$x = 5{,}032\ldots$$
$$x \approx 5{,}03 \text{ (m)}$$

Puun pituus on 5,03 m.

Vastaus 5,03 m

16.12

Piirretään mallikuva.



Lyhyemmät tikkaat ylettyivät pisteeseen *D* ja tikkaiden tulisi yltää pisteeseen *E.*

Tikkaat muodostavat kaksi suorakulmaista kolmiota *BCD* ja *BCE.*

Ratkaistaan ensin Pythagoraan lauseen avulla lyhyempien tikkaiden korkeus *a.*

$$a^2 + 1{,}50^2 = 5^2$$
$$a = \pm 4{,}769\ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $a = 4{,}769\ldots\ \text{m}$.

Pidempien tikkaiden korkeus *BE* tulisi olla $1\ \text{m} + 4{,}769\ldots\ \text{m} = 5{,}769\ldots\ \text{m}$.

Ratkaistaan pidempien tikkaiden pituus *b* Pythagoraan lauseella.

$$5{,}796\ldots^2 + 1{,}50^2 = b^2$$
$$b = \pm 5{,}960\ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $b = 5{,}960\ldots\ \text{m}$.

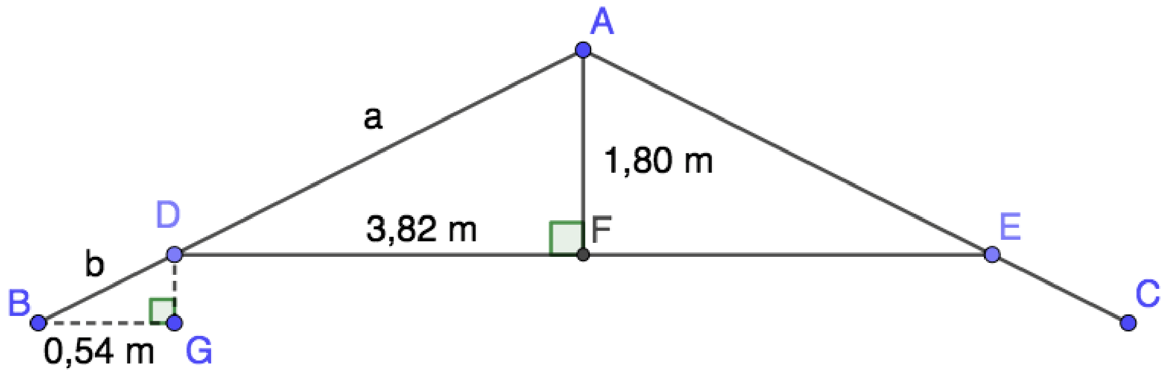
Tikkaita tuli pidentää

$$5{,}960\ldots\ \text{m} - 5\ \text{m} = 0{,}960\ldots\ \text{m} \approx 96\ \text{cm}.$$

Vastaus 96 cm

16.13

Piirretään mallikuva.



Lape koostuu osista a ja b.

Kolmion DEA korkeusjana AF puolittaa janan DE. Päätyseinän puolikkaan DF pituus on siis $\frac{7{,}64\text{ m}}{2} = 3{,}82\text{ m}$.

Lasketaan janan DA pituus eli a Pythagoraan lauseella.

$$a^2 = 3{,}82^2 + 1{,}80^2$$
$$a = \pm 4{,}222\ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $a = 4{,}222\ldots\text{ m}$.

Kolmiolla BGD ja DFA on suora kulma vastinkulmana. Lisäksi samankohtaiset kulmat GBD ja FDA (jana BA vasempana kylkenä) ovat yhtä suuret, sillä kulmien oikeat kyljet ovat yhdensuuntaiset. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Muodostetaan vastinsivujen suhteista yhtälö ja ratkaistaan b.

$$\frac{b}{4{,}222\ldots} = \frac{0{,}54}{3{,}82}$$
$$b = 0{,}596\ldots\ (m)$$

Lappeen AB pituus on siis

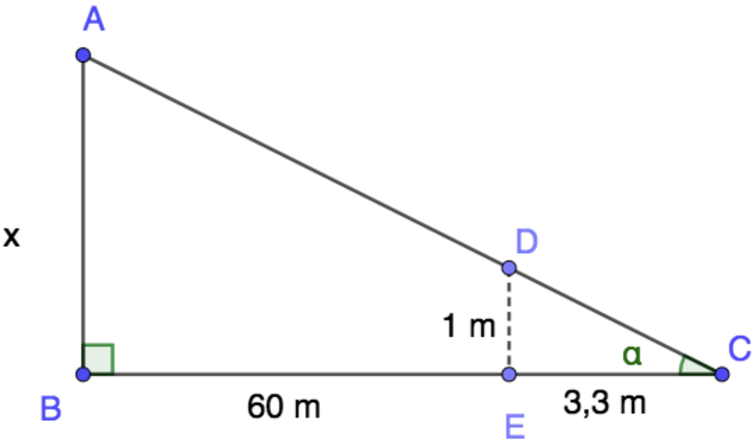
$4{,}222\ldots.\text{m} + 0{,}596\ldots\text{ m} = 4{,}819\ldots\text{ m} \approx 482\text{ cm}.$

Vastaus 482 cm

16.14

a)

Piirretään mallikuva. Orava lähtee pisteestä *A* ja liitää puuhun pisteeseen *D.*



Merkitään lähtökorkeutta kirjaimella *x.*

Muodostuu kaksi kolmiota *BCA* ja *ECD.* Molemmissa on suora kulma ja yhteinen kulma α, joten kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

Koska vaakasuuntainen siirtymä on 3,3-kertainen pystysuuntaiseen siirtymään, pienemmän kolmion kateetit ovat 1 m ja 3,3 m. Suuremman kolmion kateetit ovat x ja $60 \text{ m} + 3{,}3 \text{ m} = 63{,}3 \text{ m}$.

Muodostetaan kolmioiden sivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{x}{1} = \frac{63{,}3}{3{,}3}$$
$$x = 19{,}181\ldots$$
$$x \approx 19 \text{ (m)}$$

Oravan tulee ponnistaa 19 m korkeudelta.

b)

Ratkaistaan liitokulma α kolmiosta *ECD* tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{1}{3{,}3}$$
$$\alpha = 16{,}858\ldots°$$
$$\alpha \approx 17°$$

Vastaus **a)** 19 m

b) 17°

16.15

Kuvio a – Väite B	Suunnikkaan a pinta-ala on $4 \cdot 2 = 8$.
Kuvio b – Väite D	Puolisuunnikkaan b pinta-ala on $\frac{3+5}{2} \cdot 2{,}5 = 10$.
Kuvio c – Väite A	Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on Pythagoraan lauseen mukaan 5, joten kolmion piiri on $3 + 4 + 5 = 12$.
Kuvio d – Väite E	Tasakylkisen kolmion molemmat kyljet ovat yhtä pitkät, joten kolmion piiri on $6 + 6 + 3 = 15$.
Kuvio e – Väite C	Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten neliön piiri on $4 \cdot 2{,}5 = 10$.
Kuvio f – Väite F	Suorakulmion pinta-ala on $6 \cdot 2{,}5 = 15$.

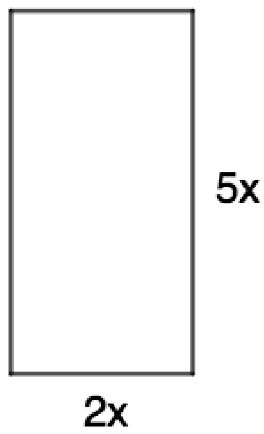
16.16

Eri suuntaisten sivujen suhde on 2 : 5.

Merkitään kantaa 2*x,* jolloin korkeus on 5*x.*

Muodostetaan suorakulmion piirin avulla yhtälö
ja ratkaistaan *x.*

$$2 \cdot 2x + 2 \cdot 5x = 112$$
$$x = 8 \text{ (m)}$$



Suorakulmion sivujen pituudet ovat siis
$2 \cdot 8 \text{ m} = 16 \text{ m}$ ja $5 \cdot 8 \text{ m} = 40 \text{ m}$.

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$$A = 16\, m \cdot 40\, m = 640\, m^2$$

Vastaus 640 m^2

16.17

Suorakulmion kannan pituus on 77 cm.

Merkitään suorakulmion korkeutta kirjaimella *x.*
Tällöin suorakulmion piiri on x + 202 cm.

Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan *x.*

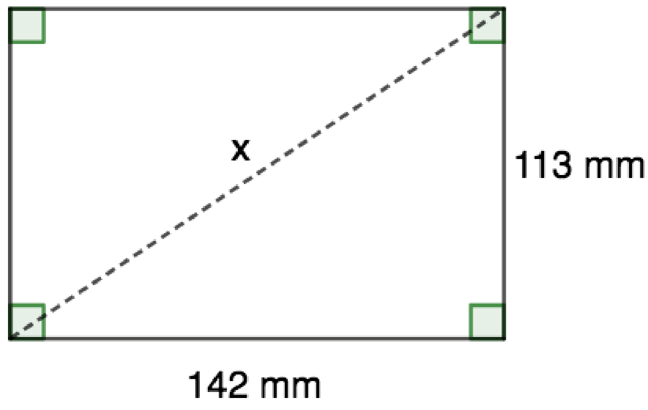
$$
\begin{aligned}
2 \cdot 77 + 2x &= x + 202 \\
x &= 48\ (\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

Suorakulmion piiri on $48\ \mathrm{cm}\ +\ 202\ \mathrm{cm} = 250\ \mathrm{cm}$.

Vastaus 250 cm

16.18

Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon.



Ratkaistaan lävistäjän pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

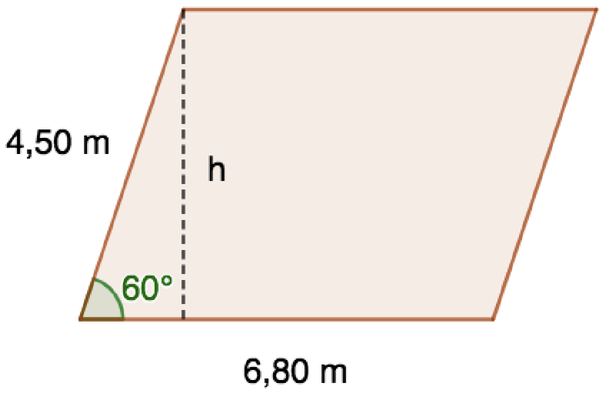
$x^2 = 113^2 + 142^2$
$x = \pm 181{,}474 \ldots$

Pituus on aina positiivinen, joten $x = 181{,}474 \ldots$ mm $\approx$ 181 mm.

Vastaus 181 mm

16.19

Merkitään suunnikkaan korkeutta kirjaimella *h.* Korkeusjana muodostaa suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on 4,50 m. Ratkaistaan korkeus *h* sinin avulla.



$$\sin 60{,}0° = \frac{h}{4{,}50}$$
$$h = 3{,}897\ldots\ (\mathrm{m})$$

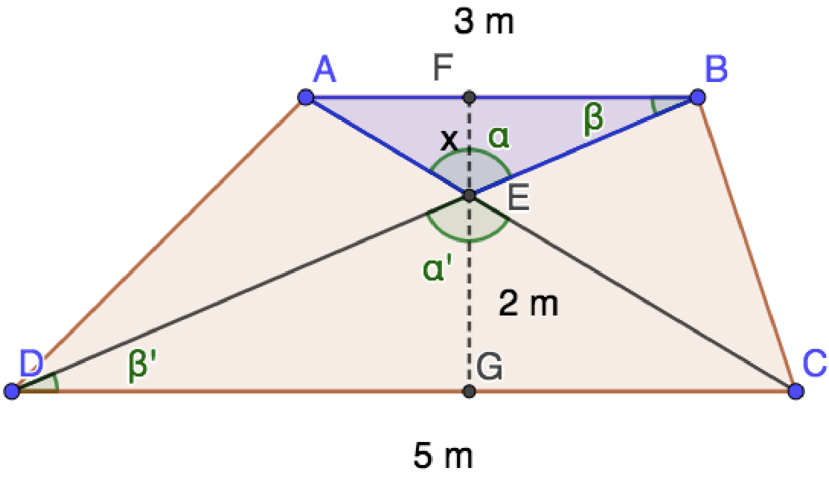
Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.

$$A = 6{,}80\ \mathrm{m} \cdot 3{,}897\ldots\ \mathrm{m} = 26{,}499\ldots\ \mathrm{m}^2 \approx 26{,}5\ \mathrm{m}^2$$

Vastaus 26,5 m^2

16.20

Piirretään mallikuva.



Tutkitaan kolmioita *DCE* ja *AEB.*

Kulmat α ja α'ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmat β ja β' ovat samankohtaiset kulmat, sillä molempien kulmien vasen kylki on jana *DB*. Koska kulmien vasemmat kyljet ovat yhdensuuntaiset, kulmat ovat myös yhtä suuret.

Kolmiot *DCE* ja *AEB* ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

Muodostetaan vastinosien suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan kolmion *AEB* korkeus *x.*

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$$
$$x = 1{,}2\ (m)$$

Lasketaan kolmion *AEB* ja puolisuunnikkaan *DCBA* pinta-alat.

$$A_{AEB} = \frac{3\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m}}{2} = 1{,}8\ \mathrm{m}^2$$

$$A_{DCBA} = \frac{3\ \mathrm{m} + 5\ \mathrm{m}}{2} \cdot (2\ \mathrm{m} + 1{,}2\ \mathrm{m}) = 12{,}8\ \mathrm{m}^2$$

Verrataan kolmion pinta-alaa puolisuunnikkaan pinta-alaan.

$$\frac{A_{AEB}}{A_{DCBA}} = \frac{1{,}8\ \mathrm{m}^2}{12{,}8\ \mathrm{m}^2} = 0{,}140 \ldots \approx 14\ \%$$

Vastaus 14 %

16.21

a)

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. Merkitään lyhemmän sivun pituutta kirjaimella *x.* Tällöin pidemmän sivun pituus on x + 4,0 cm.

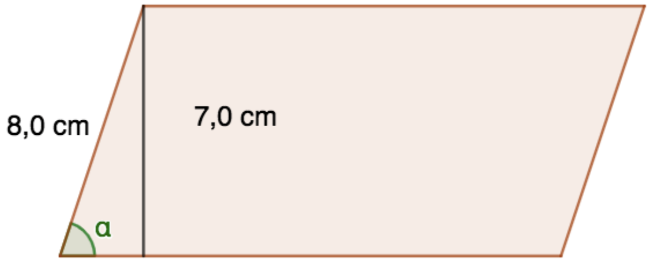
Muodostetaan piirin avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$2x + 2(x + 4{,}0) = 40$$
$$x = 8 \text{ (cm)}$$

Sivujen pituudet ovat 8,0 cm ja 12,0 cm.

b)

Piirretään mallikuva.



Korkeusjana muodostaa suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan terävä kulma α sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{7{,}0}{8{,}0}$$
$$\alpha = 61{,}044\ldots°$$
$$\alpha \approx 61°$$

Vastaus **a)** 8,0 cm ja 12,0 cm

b) 61°

16.22

Merkitään yhdensuuntaisista sivuista lyhyempää kirjaimella *x.*
Tällöin pidemmän sivun pituus on x + 5,0 cm.

Muodostetaan puolisuunnikkaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{x+(x+5{,}0)}{2}\cdot 4{,}2 = 60{,}0$$
$$x = 11{,}785\ldots\ (\mathrm{cm})$$

Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat

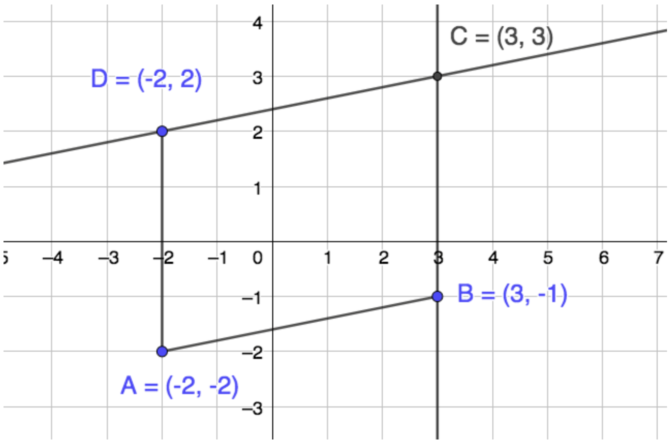
$11{,}785\ldots\ \mathrm{cm} \approx 12\ \mathrm{cm}$ ja

$11{,}785\ldots\ \mathrm{cm} + 5{,}0\ \mathrm{cm} = 16{,}785\ldots\ \mathrm{cm} \approx 17\ \mathrm{cm}.$

Vastaus 12 cm ja 17 cm

16.23

a)
Merkitään koordinaatistoon suunnikkaan kolme kärkipistettä ja piirretään suunnikkaan sivut.

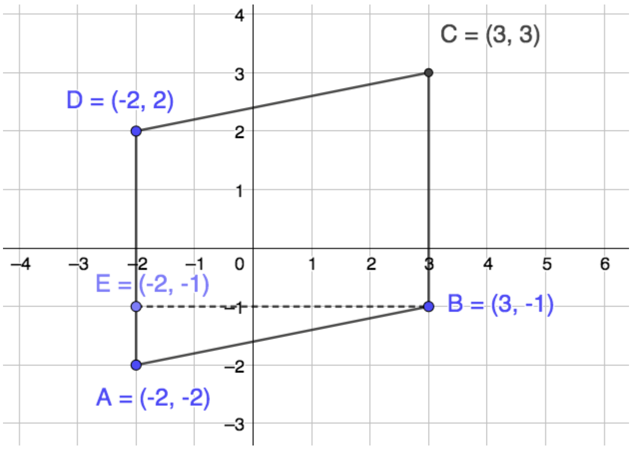


Suunnikkaan vastaiset sivun ovat yhtä pitkät ja yhden suuntaiset. Piirretään suunnikkaan sivun AB kanssa yhdensuuntainen suora ja siirretään se kulkemaan pisteen D kautta.

Piirretään suunnikkaan sivun AD kanssa yhdensuuntainen suora ja siirretään se kulkemaan pisteen B kautta.

Suunnikaan neljäs kärkipiste sijaitsee suorien leikkauspisteessä. Sen koordinaatit ovat (3, 3).

b)
Piirretään kuvaan suorakulmainen kolmio *ABE.* Kolmion kateetit ovat



$AE = -1 - (-2) = 1$ ja $EB = 3 - (-2) = 5.$

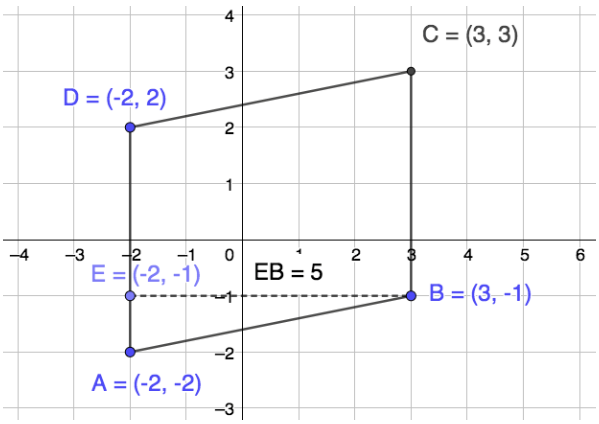
Merkitään kulmaa A kirjaimella αr ratkaistaan sen suuruus tangentin avulla.

$\tan\alpha = \dfrac{5}{1}$
$\alpha = 78{,}960\ldots°$
$\alpha \approx 79°$

Kulman B suuruus on $180° - 78{,}960\ldots° \approx 101{,}309\ldots° \approx 101°$.

Kulman A suuruus on 79° ja kulman B suuruus on 101°.

c)
Suunnikkaan korkeusjanan EB pituus on ohjelmalla mitattuna 5.

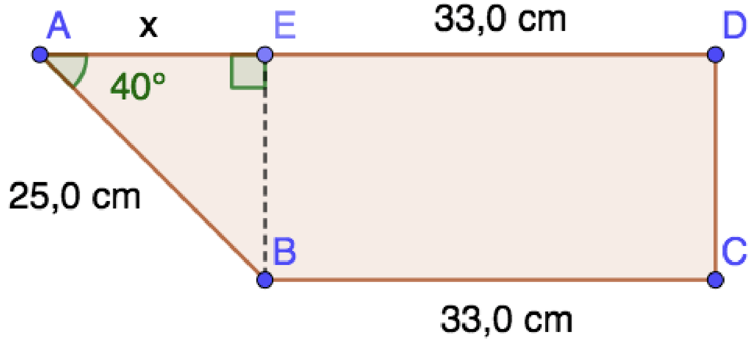


Suunnikkaan kannan DA pituus on $2 - (-2) = 4$.

Laskataan suunnikkaan pinta-ala.
$A = 5 \cdot 4 = 20$

Vastaus **a)** $C = (3, 3)$
b) kulma A = 79° ja kulma B = 101°
c) korkeus 5, pinta-ala 20

16.24



Puolisuunnikkaan korkeusjana EB muodostaa suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan kolmion toinen kateetti x kosinin avulla.

$$\cos 40° = \frac{x}{25,0}$$
$$x = 19,151 \ldots \ (\text{cm})$$

Ratkaistaan puolisuunnikkaan korkeus h sinin avulla.

$$\sin 40° = \frac{h}{25,0}$$
$$h = 16,069 \ldots \ (\text{cm})$$

Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 33,0 cm ja 19,151... cm + 33,0 cm = 52,151...cm.

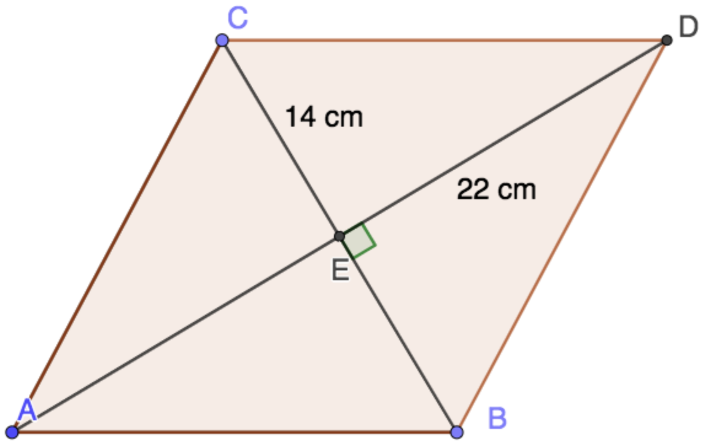
Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{33,0 \text{ cm} + 52,151 \ldots \text{ cm}}{2} \cdot 16,069 \ldots \text{ cm} = 684,145 \ldots \text{ cm}^2 \approx 684 \text{ cm}^2$$

Vastaus 684 cm^2

16.25

a)



Neljäkkään kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.

Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa, joten lävistäjät jakavat neljäkkään neljään yhtä suureen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat

$\frac{28\text{ cm}}{2} = 14\text{ cm}$ ja $\frac{44\text{ cm}}{2} = 22\text{ cm}.$

Lasketaan leijan pinta-ala kolmioiden pinta-alan avulla.

$$A_{\text{leija}} = 4 \cdot A_{\text{kolmio}} = 4 \cdot \frac{14\text{ cm} \cdot 22\text{ cm}}{2} = 616\text{ cm}^2 \approx 620\text{ cm}^2$$

b)

Leijan sivu on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa.
Merkitään sivun pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 14^2 + 22^2$$
$$x = \pm 26{,}076\ldots$$

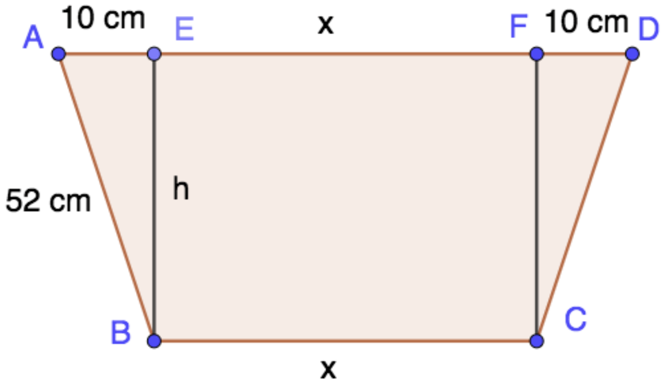
Pituus on aina positiivinen, joten $x = 26{,}076\ldots\text{ cm} \approx 26\text{ cm}$.

Vastaus **a)** 620 cm^2

b) 26 cm

16.26

Piirretään mallikuva.



Pöydän piiri on 254 cm.

Muodostetaan piirin yhtälö ja ratkaistaan lyhemmän sivun pituus *x.*

$$2 \cdot 52 + x + x + 20 = 254$$
$$x = 65 \text{ (cm)}$$

Pöydän korkeusjana h muodostaa suorakulmaisen kolmion *BEA.* Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 10^2 = 52^2$$
$$h = \pm 51{,}029 \ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $h = 51{,}029 \ldots$ cm.

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{85 \text{ cm} + 65 \text{ cm}}{2} \cdot 51{,}029 \ldots \text{ cm} \approx 3827{,}205 \ldots \text{ cm}^2 \approx 3800 \text{ cm}^2$$

Pöydän pinta-ala on $3800 \text{ cm}^2 = 38 \text{ dm}^2$.

Vastaus 38 dm^2

16.27

a)
Ympyrän säde on $r = \frac{6{,}4\text{ cm}}{2} = 3{,}2\text{ cm}$.

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$A = \pi \cdot (3{,}2\text{ cm})^2 = 32{,}169\ldots\text{ cm}^2 \approx 32\text{ cm}^2$

b)

Ratkaistaan ensin säde *r* ympyrän piirin avulla.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 145 \\ r &= \frac{145}{2\pi} \\ r &= 23{,}077\ldots\ (\text{cm}) \end{aligned}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$A = \pi \cdot (23{,}077\ldots\text{ cm})^2 = 1673{,}116\ldots\text{ cm}^2 \approx 1670\text{ cm}^2$

Vastaus **a)** 32 cm^2

b) 1670 cm^2

16.28

a)

Lasketaan ensin neliön sivun pituus s pinta-alan avulla.

$$s^2 = 6{,}25$$
$$s = \pm\, 2{,}5$$

Pituus on aina positiivinen, joten $s = 2{,}5$ cm.

Koska ympyröitä on kaksi vierekkäin, yhden ympyrän säde on neljäsosa neliön sivusta.

$$r = \frac{2{,}5\text{ cm}}{4} = 0{,}625\text{ cm}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi \cdot (0{,}625\text{ cm})^2 = 1{,}227\ldots\text{ cm}^2 \approx 1{,}23\text{ cm}^2$$

b)

Ympyröiden pinta-ala on

$$A = 4 \cdot 1{,}227\ldots\text{ cm}^2 = 4{,}908\ldots\text{ cm}^2.$$

Verrataan ympyröiden pinta-alaa neliön pinta-alaan.

$$\frac{4{,}908\ldots\text{ cm}}{6{,}25\text{ cm}} = 0{,}7853\ldots$$

Väritetyn alueen osuus neliöstä on $1 - 0{,}7853\ldots = 0{,}2147\ldots \approx 21{,}5\ \%$

Vastaus **a)** $1{,}23\text{ cm}^2$

b) $21{,}5\ \%$

16.29

Ratkaistaan ensin säde *r* ympyrän pinta-alan yhtälöstä.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 380 \\ r^2 &= \frac{380}{\pi} \\ r &= \pm 10{,}998\ldots \end{aligned}$$

Pituus on aina positiivinen, joten $r = 10{,}998\ldots$ cm.

Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$p = 2\pi \cdot 10{,}998 \text{ cm} = 69{,}102\ldots \text{ cm} \approx 69 \text{ cm}$

Vastaus 69 cm

16.30

Tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan, joten kolmio AOC on suorakulmainen. Kolmion kulmien summa on 180°. Ratkaistaan kulma α.

$$\begin{aligned} \alpha + 33° + 90° &= 180° \\ \alpha &= 57° \end{aligned}$$

Jana OC puolittaa ympyrän keskuskulman DOA, joten keskuskulman suuruus on $2 \cdot 57° = 114°$.

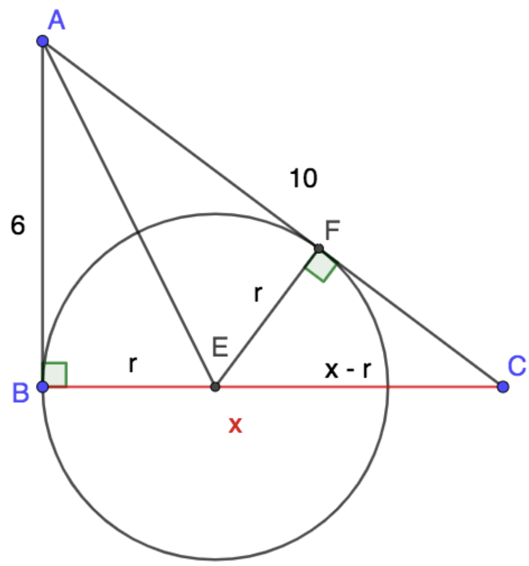
Kulma DOA ja kulma β muodostavat täysikulman, joten

$\beta = 360° - 114° = 246°$

Vastaus $\alpha = 57°, \beta = 246°$

16.31

Piirretään mallikuva.



Lasketaan tangentin AC pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + 6^2 = 10^2$$
$$x = \pm 8$$

Pituus on aina positiivinen, joten $x = 8$.

Koska jana AC on ympyrän tangentti, säde EF on kohtisuorassa janaa AC vastaan.

Kolmiot BCA ja ECF ovat molemmat suorakulmaisia kolmioita, ja niillä on yhteinen kulma C. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen mukaan.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan säde r.

$$\frac{r}{6} = \frac{8-r}{10}$$
$$10r = 6(8-r)$$
$$10r = 48 - 6r$$
$$16r = 48$$
$$r = 3$$

Ympyrän säde on 3.

Vastaus $r = 3$

16.32

a)

Muodostetaan kaaren pituuden yhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$\frac{34{,}0°}{360°} \cdot 2\pi r = 18{,}0$$
$$r = 30{,}333\ldots$$
$$r \approx 30{,}3\ (\mathrm{cm})$$

Ympyrän säde on 30,3 cm.

b)

Lasketaan säteen avulla sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{34{,}0°}{360°} \cdot \pi \cdot (30{,}333\ldots\ \mathrm{cm})^2 = 272{,}997\ldots\ \mathrm{cm}^2 \approx 273\ \mathrm{cm}^2$$

Vastaus **a)** 30,3 cm

b) 273 cm^2

16.33

Lasketaan ensin maailmanpyörän kehän pituus nopeuden ja kierrosajan avulla.

Kierrosaika on 30 min $=$ 0,5 h.

$p = 0{,}84\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}5\text{ h} = 0{,}42\text{ km} = 420\text{ m}.$

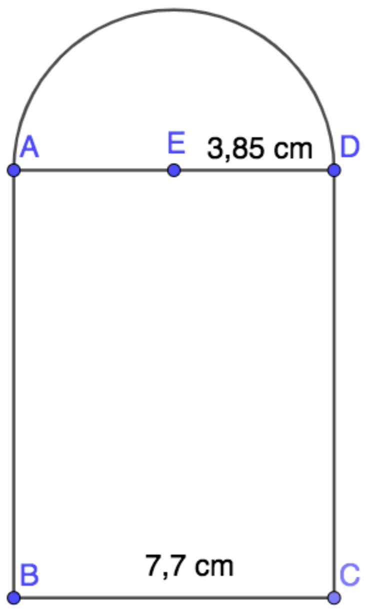
matka = nopeus · aika

Ratkaistaan halkaisija kehän pituuden avulla.

$$\begin{aligned} d\pi &= 420 \\ d &= 133{,}690\ldots \\ d &\approx 134\text{ m} \end{aligned}$$

Vastaus 134 m

16.34



Piirretään mallikuva.

Ikkuna koostuu puoliympyrästä ja suorakulmiosta.

Puoliympyrän säde on puolet ikkunan leveydestä, eli

$$r = \frac{7{,}7 \text{ cm}}{2} = 3{,}85 \text{ cm}.$$

Merkitään suorakulmion korkeutta kirjaimella h.
Muodostetaan ikkunan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan h.

$$7{,}7 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3{,}85^2 = 105$$
$$h = 10{,}612\ldots \text{ (cm)}$$

Lasketaan piiriä varten ympyrän kaaren pituus.

$$b = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3{,}85 \text{ cm} = 12{,}095\ldots \text{ cm}$$

Lasketaan ikkunan piiri.

$$p = 2 \cdot 10{,}612\ldots \text{ cm} + 12{,}095\ldots \text{ cm} + 7{,}7 \text{ cm} = 41{,}019\ldots \text{ cm} \approx 41 \text{ cm}$$

Vastaus 41 cm

16.35

Merkitään ulkoympyrän halkaisijaa r_1 ja sisärenkaan sädettä r_2.

Muodostetaan ulkorenkaan ympärysmitan avulla ja yhtälö ja ratkaistaan r_1.

$$
\begin{aligned}
2\pi \cdot r_1 &= 188 \\
r_1 &= 29{,}921\ldots\ \text{(cm)}
\end{aligned}
$$

Sisärenkaan säde on puolet halkaisijasta eli $r_2 = \frac{50{,}0\ \text{cm}}{2} = 25{,}0$ cm.

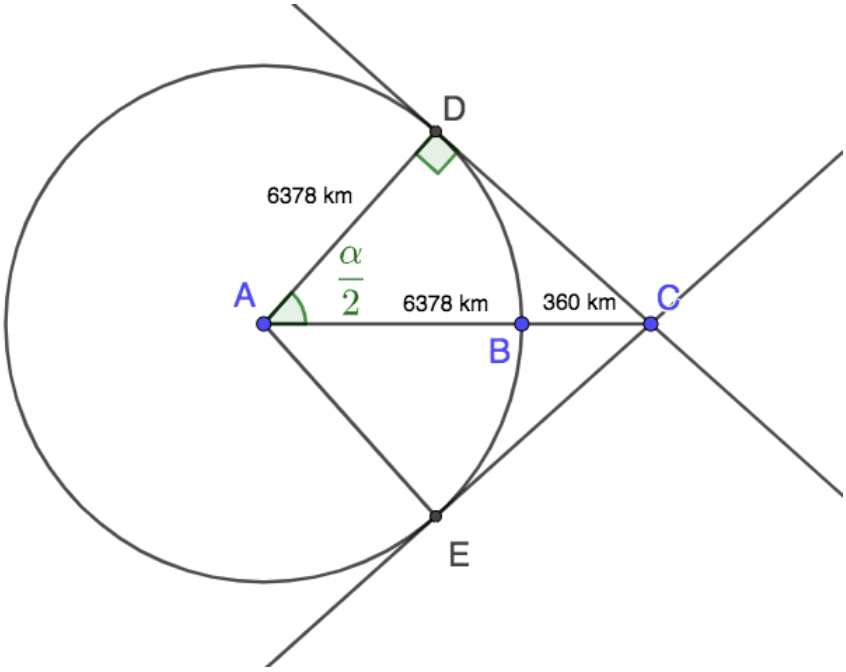
Renkaan pinta-ala on ulko- ja sisärenkaiden pinta-alojen erotus.

$$
\begin{aligned}
A &= A_{\text{ulko}} - A_{\text{sisä}} \\
&= \pi {r_1}^2 - \pi {r_2}^2 = \pi \cdot (29{,}921\ldots\ \text{cm})^2 - \pi \cdot (25{,}0\ \text{cm})^2 \\
&= 849{,}088..\text{cm}^2 \\
&\approx 849\ \text{cm}^2
\end{aligned}
$$

Vastaus 849 cm^2

16.36

Piirretään mallikuva.



Päiväntasaaja muodostaa ympyrän ja avaruusasemesta (piste C) piirretyn tangentin rajaavan näkyvän osan päiväntasaajasta.

Säde AD on kohtisuorassa tangenttia vastaan. Kolmio ACD on suorakulmainen.

Ratkaistaan keskuskulma α kosinin avulla.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{6378}{6738}$$
$$\alpha = 37{,}627\ldots°$$

Lasketaan keskuskulmaa α vastaavan sektorin pituus.

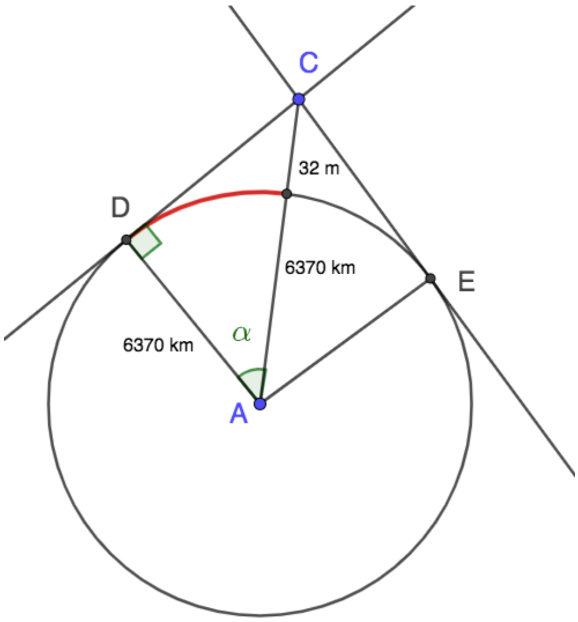
$$b = \frac{37{,}627\ldots°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6378 \text{ km} = 4188{,}592\ldots \text{ km} \approx 4200 \text{ km}$$

Astronautti näkee päiväntasaajasta 4200 km.

Vastaus 4200 km

16.37

Piirretään mallikuva.



Majakan huipulla olevan henkilön näkösädettä kuvaa pisteestä C pisteeseen D piirretty tangentti. Säde DA on kohtisuorassa tangenttia vastaan.

Kolmio DAC on suorakulmainen, jonka toisen kateetin pituus on 6370 km ja hypotenuusan pituus $6370000 \text{ m} + 32 \text{ m} = 6370032 \text{ m}$.

Ratkaistaan ensin kulman αsuuruus kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{6370000}{6370032}$$
$$\alpha = 0{,}181\ldots°$$

Ratkaistaan kulmaa α vastaavan kaaren pituus.

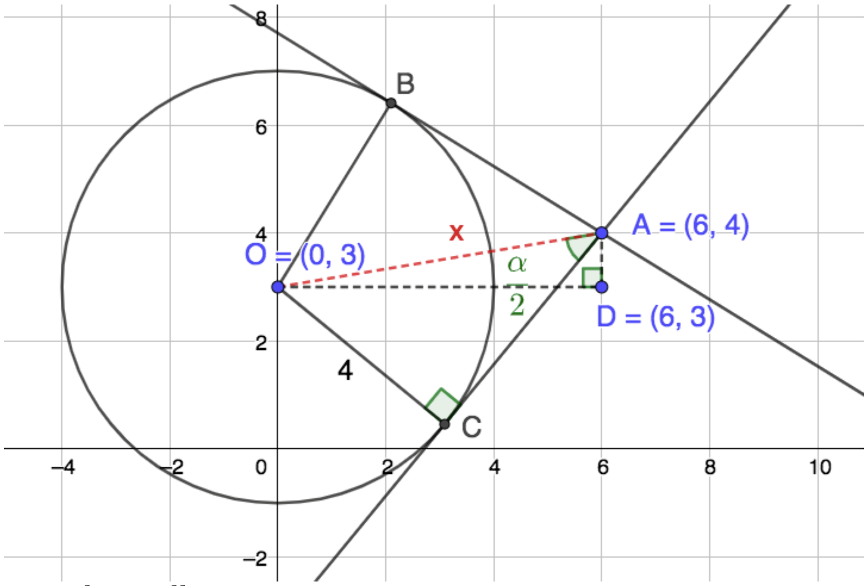
$$b = \frac{0{,}181\ldots°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370 \text{ km} = 20{,}191\ldots \text{ km} \approx 20 \text{ km}$$

Majakan huipulta näkee 20 km päähän.

Vastaus 20 km

16.38

a)



Piirretään mallikuva.

Muodostetaan apukolmio *OAD*, joka on suorakulmainen kolmio.

Merkitään kolmion hypotenuusaa *OA* kirjaimella *x*. Kolmion kateettien pituudet saadaan koordinaattien avulla.

$AD = 4 - 3 = 1$

$OD = 6 - 0 = 6$

Ratkaistaan janan *OA* pituus Pythagoraan lauseella.

$x^2 = 1^2 + 6^2$
$x = \pm\sqrt{37}$

Pituus on positiivinen, joten $x = \sqrt{37}$.

Merkitään tangenttien välistä kulmaa kirjaimella α. Kulma *OAC* on tangenttien välisen kulman puolikas. Kolmio *CAO* on suorakulmainen, sillä säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan. Ratkaistaan kulman α suuruus sinin avulla.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{\sqrt{37}}$$
$$\alpha = 82{,}233\ldots°$$
$$\alpha \approx 82°$$

b)

Merkitään sektorin *CB* keskuskulmaa kirjaimella β. Keskuskulman ja tangenttikulman summa on 180°, joten $\beta = 180° - 82{,}233\ldots° = 97{,}767\ldots°$.

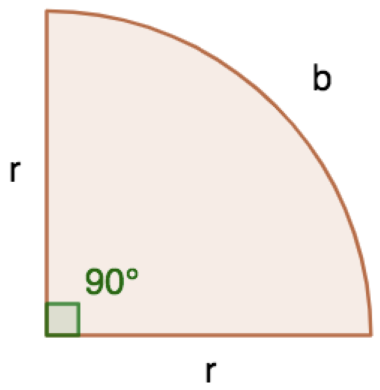
Lasketaan kaaren pituus.

$$b = \frac{97{,}767\ldots°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4 = 6{,}825\ldots \approx 6{,}8$$

Vastaus **a)** 82°

b) 6,8

16.39



Merkitään sektorin sädettä kirjaimella *r.*

Sektorin kaaren pituuden lauseke on

$$b = \frac{90°}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2}\pi r.$$

Piiri muodostuu kahdesta säteestä ja kaaresta.
Muodostetaan piirin avulla yhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$\begin{aligned} 2r + \frac{1}{2}\pi r &= 67 \\ r &= 18{,}763\ldots\ (\mathrm{cm}) \end{aligned}$$

Lasketaan sektorin pinta-ala säteen avulla.

$$A = \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot (18{,}763\ldots\ \mathrm{cm})^2 = 276{,}509\ldots\ \mathrm{cm}^2 \approx 277\ \mathrm{cm}^2$$

Vastaus $277\ \mathrm{cm}^2$

16.40

a)

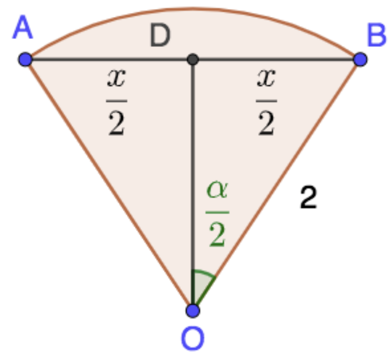
Merkitään keskuskulmaa kirjaimella α.

Muodostetaan kaaren pituuden avulla yhtälö ja ratkaistaan keskuskulman suuruus.

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2{,}0 = 2{,}5$$
$$\alpha = 71{,}619\ldots°$$
$$\alpha \approx 72°$$

b)

Merkitään jänteen AB pituutta kirjaimella x.



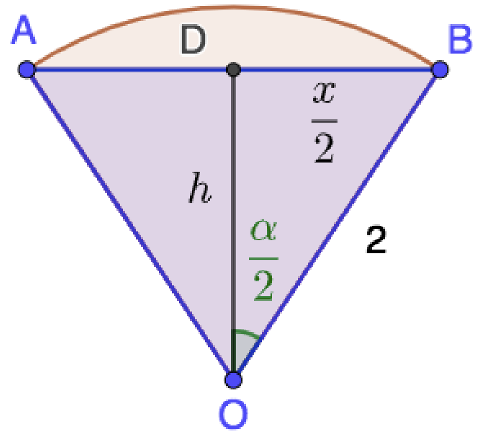
Tasakylkisen kolmion OBA korkeusjana OD synnyttää kaksi suorakulmaista kolmiota ja puolittaa keskuskulman α ja jänteen AB.

Ratkaistaan jänteen pituus sinin avulla.

$$\frac{\sin(71{,}619\ldots°)}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{2}$$
$$x = 2{,}340\ldots$$
$$x \approx 2{,}3\ \text{(m)}$$

Jänteen pituus on 2,3 m.

c)



Punaisen segmentin pinta-ala on sektorin ja sinisen kolmion pinta-alojen erotus.

Ratkaistaan kolmion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + \left(\frac{2{,}340\ldots}{2}\right)^2 = 2^2$$
$$h = \pm 1{,}621\ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $h = 1{,}621\ldots\ \mathrm{m}$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{\mathrm{kolmio}} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}621\ldots\ \mathrm{m} \cdot 2{,}340\ldots\ \mathrm{m} = 1{,}897\ldots\ \mathrm{m}^2$$

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_{\mathrm{sektori}} = \frac{71{,}619\ldots°}{360°} \cdot \pi \cdot (2{,}0\ \mathrm{m})^2 = 2{,}5\ \mathrm{m}^2$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= A_{\mathrm{sektori}} - A_{\mathrm{kolmio}} \\ &= 2{,}5\ \mathrm{m}^2 - 1{,}897\ldots\ \mathrm{m}^2 \\ &= 0{,}602\ldots\ \mathrm{m}^2 \\ &\approx 0{,}60\ \mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

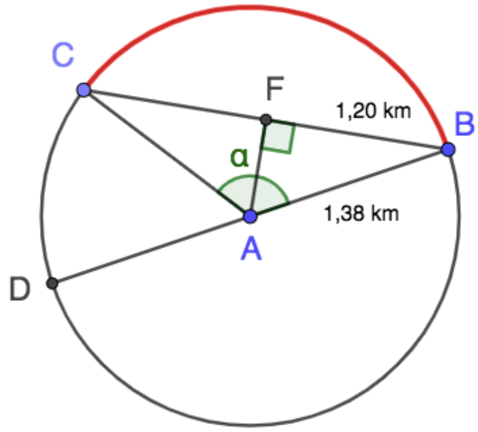
Vastaus **a)** 72°

b) 2,3 m

c) $0{,}60\ \mathrm{m}^2$

16.41

Piirretään mallikuva.



Saaren säde on $\frac{2{,}76 \text{ km}}{2} = 1{,}38$ km.

Hotellit sijaitsevat pisteissä C ja B.

Hotellien välinen jänne ja saaren säteet muodostavat tasakylkisen kolmion ABC.

Kolmion korkeusjana puolittaa jänteen CB ja keskuskulman α.

Se synnyttää myös suorakulmaisen kolmion ABF, jonka hypotenuusa on ympyrän säde ja toisen kateetin pituus $\dfrac{2{,}40 \text{ km}}{2} = 1{,}20$ km.

Ratkaistaan α sinin avulla.

$$\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{1{,}20}{1{,}38}$$
$$\alpha = 120{,}816\ldots°$$

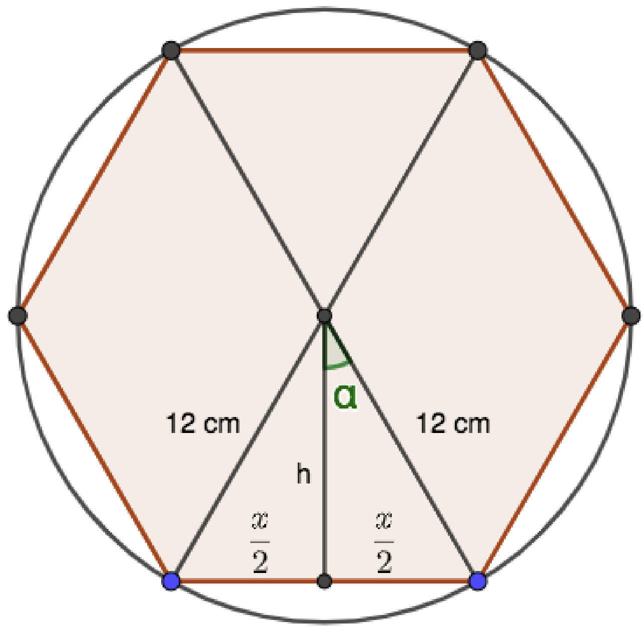
Hotellien etäisyys rantaviivaa pitkin on kaaren BC pituus. Lasketaan kaaren pituus keskuskulman avulla.

$$b = \frac{120{,}816\ldots°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1{,}38 \text{ km} = 2{,}909\ldots \text{ km} \approx 2{,}91 \text{ km}$$

Vastaus 2,91 km

16.42

Säännöllinen kuusikulmio muodostuu kuudesta tasakylkisestä kolmiosta, joiden kylkien pituus on 12 cm.



Kolmion korkeusjana h puolittaa kolmion kannan x sekä kolmion huippukulman.

Merkitään huippukulman puolikasta kirjaimella α. Koska kaikki kolmiot ovat yhteneviä, kulman α suuruus on

$$\alpha = \frac{360°}{12} = 30°.$$

Ratkaistaan yhden kolmion kannan pituus x sinin avulla.

$$\sin 30° = \frac{\frac{x}{2}}{12}$$
$$x = 12 \text{ (cm)}$$

Kuusikulmion piirin pituus on siis $6 \cdot 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}$.

Lasketaan ympyrän kehän pituus.

$$p = 2 \cdot \pi \cdot 12 \text{ cm} = 75{,}398 \ldots \text{ cm}$$

Verrataan kuusikulmion piirin pituutta ympyrän kehän pituuteen.

$$\frac{72 \text{ cm}}{75{,}398 \ldots \text{ cm}} = 0{,}954 \ldots \approx 95\ \%$$

Vastaus 95 %

16.43

a)

Merkitään kysytyn matkan pituutta luonnossa kirjaimella *x.*
Muodostetaan mittakaavan avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\begin{aligned}\frac{1}{40000} &= \frac{8{,}4}{x} \\ x &= 8{,}4 \cdot 40000 \\ x &= 336000\ (\text{cm})\end{aligned}$$

$\dfrac{\text{pituus kartalla}}{\text{pituus luonnossa}}$

Tien pituus luonnossa on $336000\ \text{cm} = 3360\ \text{m} \approx 3{,}4\ \text{km}$.

b)

Merkitään kysyttyä pinta-alaa kartalla kirjaimella *x.*
Muutetaan järven oikea pinta-ala neliösenttimetreiksi.

$2{,}1\ \text{ha} = 21000\ \text{m}^2 = 210000000\ \text{cm}^2$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Muodostetaan mittakaavan avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan *x.*

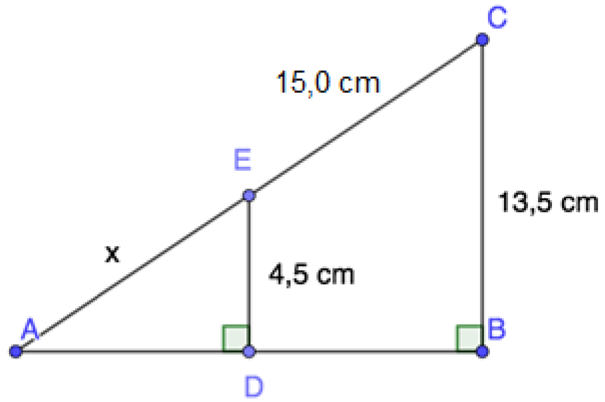
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{40000}\right)^2 &= \frac{x}{21000000} \\ \frac{1}{40000^2} &= \frac{x}{210000000} \\ 40000^2 x &= 210000000 \qquad |:40000^2 \\ x &= 0{,}131\ldots\ (\text{cm}^2) \\ x &\approx 0{,}13\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Vastaus **a)** 3,4 km

b) $0{,}13\ \text{cm}^2$

16.44

Kolmioilla *ADE* ja *ABC* on yhteinen kulma *A* sekä suora kulma vastinkulmana. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen mukaan.



Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{4{,}5}{13{,}5} = \frac{x}{x + 15{,}0}$$

$$13{,}5x = 4{,}5(x + 15{,}0)$$

$$13{,}5x = 4{,}5x + 67{,}5$$

$$9{,}0x = 67{,}5 \quad | : 9{,}0$$

$$x = 7{,}5 \text{ (cm)}$$

Sivun *AE* pituus on 7,5 cm.

Vastaus 7,5 cm

16.45

a)

Kolmioiden EFC ja ABC korkeusjanojen suhde on $1:2 = \frac{1}{2}$.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{EFC}}{A_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

b)

Merkitään kantaa EF kirjaimella x. Muodostetaan vastinosien suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan x.

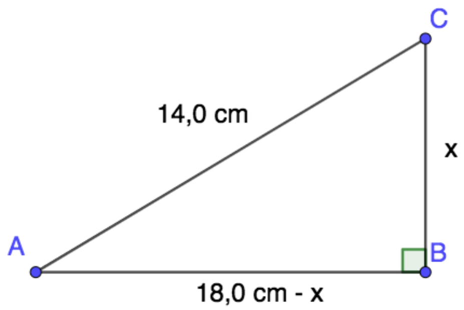
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{x}{8} \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $\frac{1}{4}$

b) 4 cm

16.46

a)
Merkitään toisen kateetin pituutta kirjaimella *x.*
Tällöin toisen kateetin pituus on 18,0 cm – *x.*



Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + (18{,}0 - x)^2 = 14{,}0^2$$
$$x = 4{,}876\ldots \quad \text{tai} \quad x = 13{,}123\ldots$$

Ratkaisuna voi olla joko lyhyemmän tai pidemmän kateetin pituus.

Kateettien pituudet kartalla ovat

$4{,}876\ldots\ \text{cm} \approx 4{,}88\ \text{cm}$ ja
$18{,}0\ \text{cm} - 4{,}876\ldots\ \text{cm} = 13{,}123\ldots\ \text{cm} \approx 13{,}1\ \text{cm}.$

b)
Muodostetaan kartan mittakaava hypotenuusan pituuksien avulla.

Muutetaan hypotenuusan pituus luonnossa senttimetreiksi.

$2{,}8\ \text{km} = 280000\ \text{cm}$

Mittakaava on pituuksien suhde.

$$k = \frac{14}{280000}^{(14} = \frac{1}{20000}$$

Kartan mittakaava on 1 : 20 000.

c)
Lasketaan kolmion pinta-ala kartalla.

$$A_{\text{kartta}} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}876\ldots\ \text{cm} \cdot 13{,}123\ldots\ \text{cm} = 32\ \text{cm}^2$$

Merkitään kolmion pinta-alaa luonnossa kirjaimella *A.* Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan *A.*

$$\frac{32}{A} = \left(\frac{1}{20000}\right)^2$$
$$A = 12\,800\,000\,000\ (\text{cm}^2)$$

Muutetaan pinta-ala hehtaareiksi.

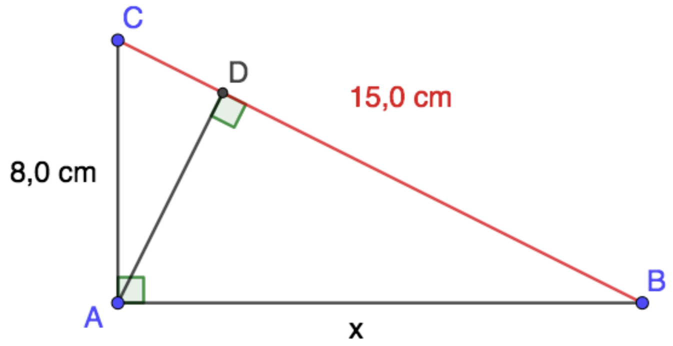
$$A = 12\,800\,000\,000\ \text{cm}^2 = 128\ \text{ha}$$

Vastaus **a)** 4,88 cm ja 13,1 cm **b)** 1 : 20 000 **c)** 128 ha

16.47

Merkitään janan *AB* pituutta kirjaimella *x.*

Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseen avulla.



$$x^2 + 8{,}0^2 = 15{,}0^2$$
$$x = \pm 12{,}688\ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten
$x = 12{,}688\ldots$ cm.

Kolmioilla *ABC* ja *ABD* on molemmilla suora kulma. Lisäksi kolmioilla on yhteinen kulma *B.*

Kolmiot *ABC* ja *ABD* ovat siis yhdenmuotoiset kk-lauseen mukaan.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan *AD* pituus.

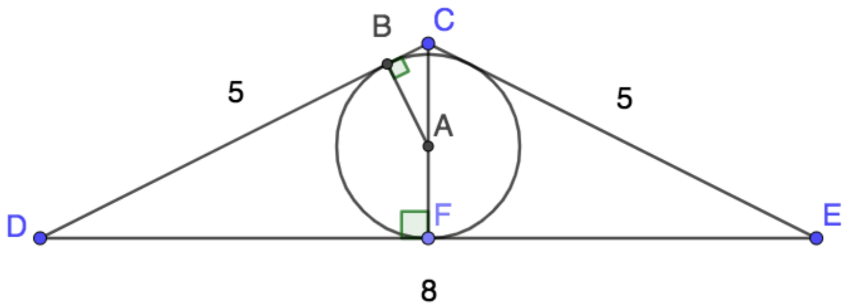
$$\frac{|AD|}{8{,}0} = \frac{12{,}688\ldots}{15{,}0}$$
$$|AD| = 6{,}767\ldots$$
$$|AD| \approx 6{,}8 \text{ (cm)}$$

Sivun *AD* pituus on 6,8 cm.

Vastaus 6,8 cm

16.48

a)
Piirretään mallikuva.



Ympyrä sivuaa kolmion sivuja, joten jana *DC* on ympyrän tangentti ja säde *BA* on kohtisuorassa sivua *DC* vastaan.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana *CF* puolittaa kannan *DE* ja synnyttää suorakulmaisen kolmion *DFC,* jonka kateetin *DF* pituus on $\frac{8}{2} = 4$.

Ratkaistaan tasakylkisen kolmion korkeusjanan *FC* pituus Pythagoraan lauseella.

$$4^2 + |FC|^2 = 5^2$$
$$|FC| = \pm 3$$

Kolmioilla *DFC* ja *ACB* on suora kulma vastinkulmana sekä yhteinen kulma *C*,
joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan ympyrän säde *r.*

$$\frac{|DC|}{|CA|} = \frac{|FD|}{|AB|}$$
$$\frac{5}{3-r} = \frac{4}{r}$$
$$r = \frac{4}{3}$$

b)

Kolmioiden *DFC* ja *ACB* pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.
Kolmion *DFC* pinta-ala on $A_{DFC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

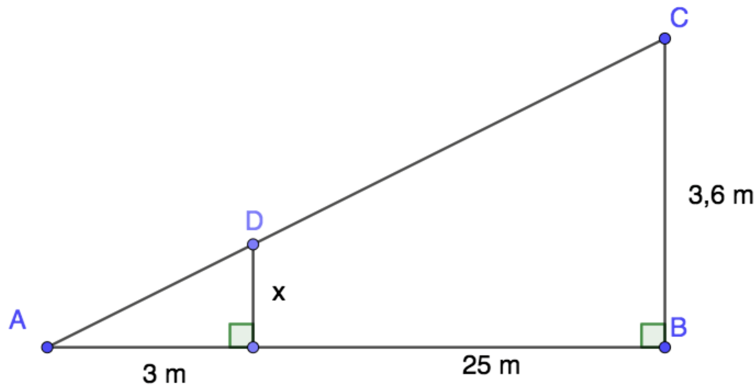
Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kolmion *ACB* pinta-ala A_{ACB}.

$$\frac{A_{ACB}}{A_{DFC}} = \left(\frac{FD}{AB}\right)^2$$
$$\frac{A_{ACB}}{6} = \frac{4^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}$$
$$A_{ACB} = \frac{2}{3}$$

Vastaus **a)** $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$

16.49

Piirretään mallikuva.



Merkitään muurin korkeutta kirjaimella *x* ja selvitetään, kuinka korkea muuri voi olla.

Kun Riina näkee kissan juuri ja juuri, muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota *AED* ja *ABC.*

Kolmioilla on suora kulma vastinkulmana ja kulma *A* on kolmioille yhteinen kulma.

Kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

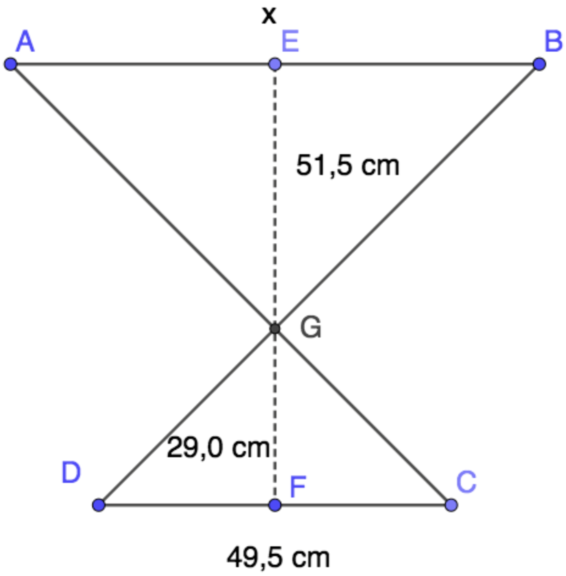
$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|CB|}$$
$$\frac{3}{28} = \frac{x}{3,6}$$
$$x = 0,385\ldots \text{ (m)}$$

Koska muurin korkeus on 2,0 m, Riina ei näe kissaa.

Vastaus Ei näe.

16.50

Piirretään mallikuva.



Jalat muodostavat kaksi kolmioita, joista alemman korkeus GF on 29,0 cm.

Ylemmän kolmion korkeus GE on
80,5 cm – 29,0 cm = 51,5 cm.

Kolmioiden kärkipisteeseen G muodostuvat kulmat ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmilla CDG ja GBA on vasempana kylkenä jana DB. Näin ollen ne ovat samakohtaisia kulmia. Koska janat AB ja DC ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Kolmioilla DCG ja GBA on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

Muodostetaan vastinsivujen ja korkeuksien suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$\frac{|EG|}{|FG|} = \frac{|AB|}{|DC|}$$
$$\frac{51{,}5}{29{,}0} = \frac{x}{49{,}5}$$
$$x = 87{,}905\ldots$$
$$x = 87{,}9\ (\text{cm})$$

Silityslaudan leveys on 87,9 cm

Vastaus 87,9 cm

16.51

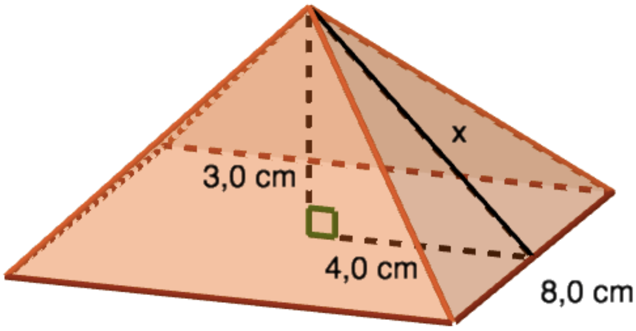
a)

Lasketaan pyramidin tilavuus.

$V = \frac{1}{3} \cdot (8{,}0\text{ cm})^2 \cdot 3{,}0\text{ cm} = 64\text{ cm}^3$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{pohja}} \cdot h$

b)



Merkitään sivujanan pituutta kirjaimella *x*. Pyramidin sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat korkeus 3,0 cm ja puolet sivusta $\frac{8{,}0\text{ cm}}{2} = 4{,}0\text{ cm}$.

Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseella.

$x^2 = 3{,}0^2 + 4{,}0^2$
$x = \pm 5{,}0$

Pituus on aina positiivinen, joten $x = 5{,}0$ cm.

c)

Vaippa koostuu neljästä samanlaisesta kolmiosta, joiden kanta on 8,0 cm ja korkeus 5,0 cm. Lasketaan vaipan pinta-ala.

$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8{,}0\text{ cm} \cdot 5{,}0\text{ cm} = 80\text{ cm}^2$

Vastaus **a)** 64 cm^3

b) 5,0 cm

c) 80 cm^2

16.52

a)

Suuremman kuution sivun pituus on $s_1 = 12{,}0$ cm.

Suuremman kuution tilavuus on

$V_1 = (12{,}0 \text{ cm})^3 = 1728 \text{ cm}^3$.

Pienemmän kuution sivun pituus on $s_2 = \frac{12{,}0 \text{ cm}}{2} = 6{,}0$ cm.

Pienemmän kuution tilavuus on $V_2 = (6{,}0 \text{ cm})^3 = 216 \text{ cm}^3$

Verrataan pienemmän kuution tilavuutta suuremman kuution tilavuuteen.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{216 \text{ cm}^3}{1728 \text{ cm}^3} = 0{,}125 = 12{,}5 \text{ \%}$$

Kuution tilavuus pienenee $100 \text{ \%} - 12{,}5 \text{ \%} = 87{,}5$ %.

b)

Kuution pinta-ala koostuu kuudesta neliöstä.

Suuremman kuution pinta-ala on $A_1 = 6 \cdot (12{,}0 \text{ cm})^2 = 864 \text{ cm}^2$.

Pienemmän kuution pinta-ala on $A_2 = 6 \cdot (6{,}0 \text{ cm})^2 = 216 \text{ cm}^2$.

Verrataan pienemmän kuution pinta-alaa suuremman kuution pinta-alaan.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{216 \text{ cm}^2}{864 \text{ cm}^2} = 0{,}25 = 25 \text{ \%}$$

Kuution pinta-ala pienenee $100 \text{ \%} - 25 \text{ \%} = 75$ %.

Vastaus **a)** 87,5 %

b) 75 %

16.53

a)

Merkitään pohjaympyrän sädettä kirjaimella *r.*
Muodostetaan tilavuuden avulla yhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$\begin{aligned} \pi r^2 \cdot 12{,}0 &= 155 \\ r &= \pm 2{,}027\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= \pi r^2 \cdot h \end{aligned}$$

Pituus on aina positiivinen, joten $r = 2{,}027\ldots\ \text{cm} \approx 2{,}03\ \text{cm}$.

b)

Lasketaan pohjaympyrän säteen avulla lieriön vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \cdot 2{,}027\ldots\ \text{cm} \cdot 12{,}0\ \text{cm} \\ &= 152{,}883\ldots\ \text{cm}^2 \\ &\approx 153\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$A_{\text{vaippa}} = ph = 2\pi r \cdot h$$

Vastaus **a)** 2,03 cm

b) 153 cm^2

16.54

a)

Merkitään sädettä kirjaimella *r.* Muodostetaan tilavuuden avulla kartion yhtälö ja ratkaistaan *r.*

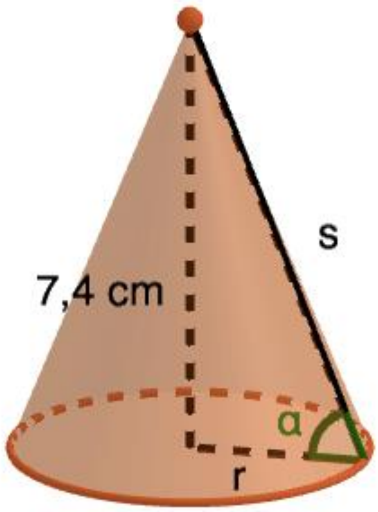
$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 7{,}4 = 234$$
$$r = \pm 5{,}495 \ldots$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{pohja}} \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

Pituus on aina positiivinen, joten $r = 5{,}495 \ldots\ \text{cm} \approx 5{,}5\ \text{cm}$.

b)

Lasketaan ensin sivujanan *s* pituus. Säde, korkeusjana ja sivujana muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan *s* Pythagoraan lauseella.



$$s^2 = 7{,}4^2 + 5{,}495 \ldots^2$$
$$s = \pm 9{,}217 \ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $s = 9{,}217 \ldots\ \text{cm}$.

Kartion pinta-ala koostuu vaipasta ja pohjaympyrästä. Lasketaan kartion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= \pi \cdot (5{,}495 \ldots\ \text{cm})^2 + \pi \cdot 5{,}495 \ldots\ \text{cm} \cdot 13{,}198 \ldots\ \text{cm} \\ &= 253{,}985 \ldots\ \text{cm}^2 \\ &\approx 250\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

c)

Ratkaistaan pohjan ja sivujanan välinen kulma sinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{7{,}4}{9{,}217 \ldots}$$
$$\alpha = 53{,}402 \ldots°$$
$$\alpha \approx 53°$$

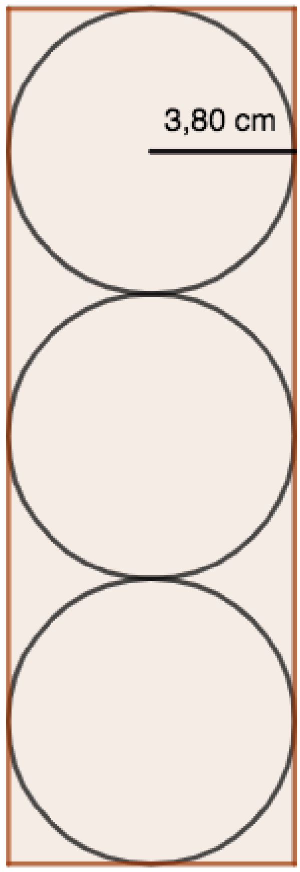
Vastaus **a)** 5,5 cm

b) 250 cm^2

c) 53°

16.55

Piirretään mallikuva poikkileikkauksesta.



Purkin korkeus on kuusi pallon sädettä.

$h = 6 \cdot 3{,}80 \text{ cm} = 22{,}8 \text{ cm}$

Purkin pohjan säde on sama kuin pallon säde.

Lasketaan purkin tilavuus.

$V_{\text{purkki}} = \pi \cdot (3{,}80 \text{ cm})^2 \cdot 22{,}8 \text{ cm} = 1034{,}312 \ldots \text{ cm}^3$

$V_{\text{pallot}} = 3 \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3{,}80 \text{ cm})^3 = 689{,}541 \ldots \text{ cm}^3$

Lasketaan tyhjän tilan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{purkki}} - V_{\text{pallot}} \\ &= 1034{,}312 \ldots \text{ cm}^3 - 689{,}541 \ldots \text{ cm}^3 \\ &= 344{,}771 \ldots \text{ cm}^3 \\ &\approx 345 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

b)

Purkin pinta-ala koostuu vaipasta kahdesta ympyränmuotoisesta kannesta.

Lasketaan purkin kokonaispinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2\pi \cdot (3{,}80 \text{ cm})^2 + 2\pi \cdot 3{,}80 \text{ cm} \cdot 22{,}8 \text{ cm} \\ &= 635{,}104 \ldots \text{ cm}^2 \\ &\approx 635 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** 345 cm^3

b) 635 cm^3

16.56

Merkitään taikinan määrää eli munkkien tilavuutta kirjaimella *V.* Lasketaan tilavuuden avulla munkkipallojen säteet.

Merkitään suuremman munkin sädettä r_1. Muodostetaan tilavuuden ja pinta-alan lausekkeet.

$V = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi {r_1}^3 = 4\pi {r_1}^3$

$A_1 = 3 \cdot 4\pi {r_1}^2 = 12\pi {r_1}^2$

Merkitään pienemmän munkin sädettä r_2. Muodostetaan tilavuuden ja pinta-alan lausekkeet.

$V = 24 \cdot \frac{4}{3}\pi {r_2}^3 = 32\pi {r_2}^3 = 32A_2 \cdot r_2$

$A_2 = 24 \cdot 4\pi {r_2}^2 = 96\pi {r_2}^2$

Ratkaistaan säteiden suhde tilavuuden avulla.

$$\begin{aligned} 4\pi {r_1}^3 &= 32\pi {r_2}^3 && | : (4\pi) \\ {r_1}^3 &= 8{r_2}^3 && | \sqrt[3]{} \\ r_1 &= 2r_2 \end{aligned}$$

Lasketaan kokonaispinta-alojen suhde.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{96\pi {r_2}^2}{12\pi {r_1}^2} = \frac{96{r_2}^2}{12 \cdot (2r_2)^2} = \frac{96{r_2}^2}{48{r_2}^2} = \frac{2}{1}$$

Pienempien ja suurempien munkkien sokerimäärän suhde on 2 : 1.

Vastaus 2 : 1

16.57

a)

Lasketaan Merkuriuksen säde r muodostamalla yhtälö ympärysmitan avulla.

$$2\pi r = 15300$$
$$r = 2435{,}070\ldots\ \text{(km)}$$

Muodostetaan Merkuriuksen ja Maan pinta-alojen lausekkeet.

$A_{\text{Me}} = 4\pi \cdot (2435{,}070\ldots\ \text{km})^2$ $\qquad$ $A_{\text{Maa}} = 4\pi \cdot (6380\ \text{km})^2$

Verrataan Merkuriuksen pinta-alaa Maan pinta-alaan.

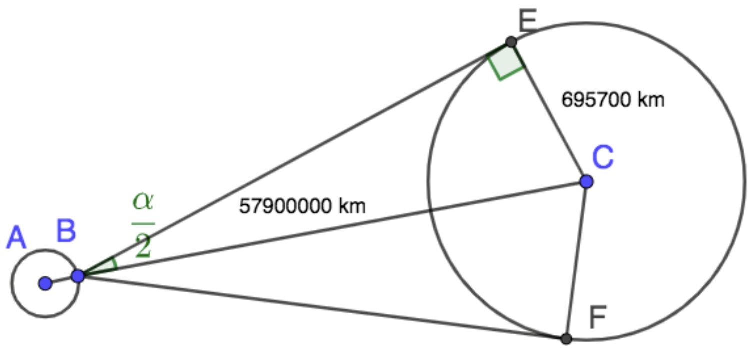
$$\frac{A_{\text{Me}}}{A_{\text{Maa}}} = \frac{4\pi \cdot (2435{,}070\ldots\ \text{km})^2}{4\pi \cdot 6380\ \text{km}} = 0{,}14567\ldots \approx 14{,}6\ \%$$

Merkuriuksen pinta-ala on 14,6 % Maan pinta-alasta.

b)

Näkösäteet Merkuriuksesta ovat Auringon tangentteja.

Koska säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, kulman B puolittaja synnyttää suorakulmaisen kolmion BCE.



Janan AC pituus on

$$57900000\ \text{km} - 2435{,}070\ldots\ \text{km}$$
$$= 57897564{,}929\ldots\ \text{km}$$

Merkitään tangenttikulmaa kirjaimella α.

Tällöin kolmion BCE yksi kulma on $\frac{\alpha}{2}$. Ratkaistaan αsinin avulla.

$$\frac{\sin\alpha}{2} = \frac{695700}{57897564{,}929\ldots}$$
$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}688\ldots°$$
$$\alpha = 1{,}376\ldots°$$
$$\alpha \approx 1{,}38°$$

Aurinko näkyy Merkuriuksesta 1,38° kulmassa.

c)

Merkitään ympyrän keskuskulmaa kirjaimella β ja lasketaan sen suuruus tangenttikulman α avulla.

$\beta = 180° - 1{,}376\ldots° = 178{,}623\ldots°$

Lasketaan keskuskulmaa vastaavan ympyrän kaaren pituus.

$$b = \frac{178{,}623\ldots°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 695700\ \text{km} = 2168886{,}487\ldots\ \text{km} \approx 2170000\ \text{km}$$

Auringon ympärysmitasta voi nähdä 2 170 000 km.

Vastaus **a)** 14,6 %

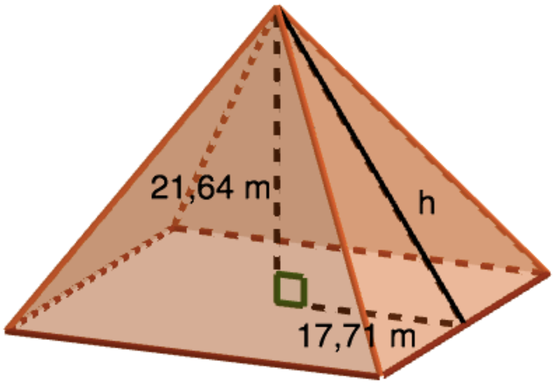
b) 1,38°

c) 2 170 000 km

16.58

Pyramidin vaippa koostuu neljästä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta, joiden kannan pituus on 35,42 m ja korkeus *h.*

Ratkaistaan korkeus *h* Pythagoraan lauseella.



$$h^2 = 21{,}64^2 + 17{,}71^2$$
$$h = \pm 27{,}963\ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $h = 27{,}963\ldots$ m.

Lasketaan pyramidin vaipan pinta-ala.

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 35{,}42\text{ m} \cdot 27{,}963\ldots\text{ m}$$
$$= 1980{,}904\ldots\text{ m}^2$$

Merkitään särmiön korkeutta kirjaimella *b.* Muodostetaan särmiön sivutahkojen ja katon pinta-alan yhtälö ja ratkaistaan *b.*

$$4 \cdot 35{,}42 \cdot b + 35{,}42^2 = 1980{,}904\ldots$$
$$b = 5{,}126\ldots\text{ m}$$

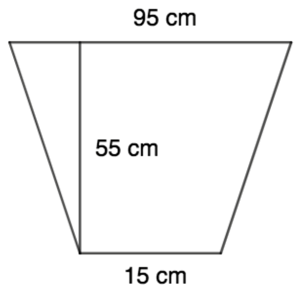
Verrataan särmiön tilavuutta pyramidin tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{särmiö}}}{V_{\text{pyramidi}}} = \frac{(35{,}42\text{ m})^2 \cdot 5{,}126\ldots\text{ m}}{\frac{1}{3} \cdot (35{,}42\text{ m})^2 \cdot 21{,}64\ldots\text{ m}} = 0{,}710\ldots \approx 71\ \%$$

Vastaus 71 %

16.59

a)



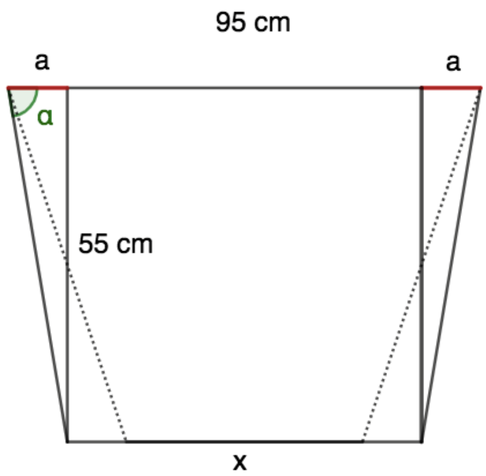
Ojaa voidaan mallintaa suorana särmiönä,
jonka pohja on puolisuunnikas.

Laksetaan särmiön tilavuus.

$$V = \frac{0{,}95 \text{ m} + 0{,}15 \text{ m}}{2} \cdot 0{,}55 \text{ m} \cdot 104 \text{ m} = 31{,}46 \text{ m}^2 \approx 31 \text{ m}^2 \quad \longleftarrow \boxed{V = A_{\text{pohja}} \cdot h}$$

Maata on poistettu 31 m^2.

b)



Merkitään ojan pohjan leveyttä kirjaimella *x.*
Ojasta on nyt poistettu maata yhteensä

$31{,}46 \text{ m}^2 + 5{,}0 \text{ m}^2 = 36{,}46 \text{ m}^2$.

Muodostetaan ojan tilavuuden yhtälö
ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{0{,}95 + x}{2} \cdot 0{,}55 \cdot 104 = 36$$
$$x = 0{,}324 \ldots$$
$$x \approx 0{,}32 \text{ (m)}$$

Ojan pohjan uusi leveys on 32 cm.

Merkitään kaltevuuskulmaa vaakatasoon nähden kirjaimella *x.*
Korkeusjana muodostaa suorakulmaisen kolmion, jonka kateetit ovat 55 cm ja *a.*

Lasketaan kateetin a pituus yhdensuuntaisten sivujen avulla.

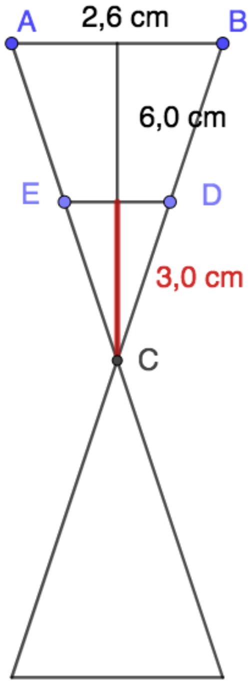
$$a = \frac{95 \text{ cm} - 31{,}46 \text{ cm}}{2} = 31{,}77 \text{ cm}$$

Ratkaistaan kulma αtangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{55}{31{,}77}$$
$$\alpha = 59{,}987 \ldots°$$
$$\alpha \approx 60°$$

Vastaus **a)** 31 m^2
b) 32 cm, 60°

16.60



Piirretään mallikuva tiimalasin poikkileikkauksesta. Selvitetään hiekan kokonaismäärä laskemalla ylemmän kartion tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1{,}3\ \text{cm})^2 \cdot 6{,}0\ \text{cm} = 10{,}618 \ldots\ \text{cm}^3$$

Kun hiekan pinta on laskenut 3 cm, muodostaa jäljellä oleva määrä ympyräpohjaisen kartion, jonka korkeus on 3,0 cm ja pohjan halkaisija *d.*

Poikkileikkauksen kolmiot ACB ja ECD ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia, sillä

- niillä on yhteinen kulma C
- kulmat CED ja CAB ovat yhtä suuret, sillä ne ovat samankohtaiset ja janat ED ja AB yhdensuuntaiset.

Muodostetaan vastinosien suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan *d.*

$$\frac{d}{1{,}3} = \frac{3{,}0}{6{,}0}$$
$$d = 0{,}65\ (\text{cm})$$

Lasketaan, paljonko hiekkaa on vielä valumatta.

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}65\ \text{cm})^2 \cdot 3{,}0\ \text{cm} = 1{,}327 \ldots\ \text{cm}^3$$

Tämän hiekkamäärän valumiseen kuluu aikaa

$$t = \frac{1{,}327 \ldots\ \text{cm}^3}{10{,}618 \ldots \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}} = 0{,}125\ \text{min} = 7{,}5\ \text{s}$$

Aikaa on kulunut siis $60\ \text{s} - 7{,}5\ \text{s} = 52{,}5\ \text{s} \approx 53\ \text{s}$.

Vastaus 53 s