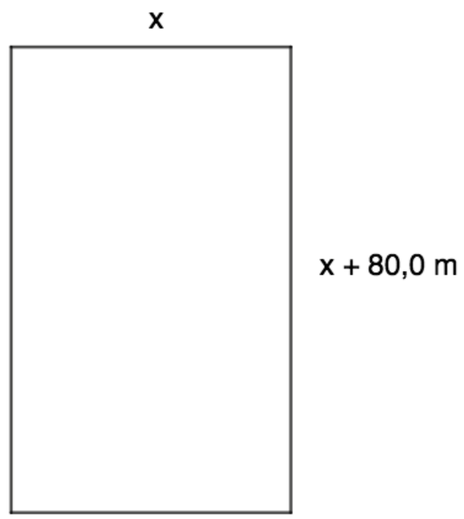
Kertauskoe – Tehtävien malliratkaisut

1.



Merkitään kentän leveyttä kirjaimella x,
jolloin pituus on x + 80,0 m.

Kun kentän juoksee kolme kertaa ympäri,
pituus on 2,70 km.

Kentän piiri on siis

$$\frac{2{,}70\text{ km}}{3} = 0{,}90\text{ km} = 900\text{ m}.$$

Muodostetaan kentän piirin avulla yhtälö
ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 2 \cdot (x + 80{,}0) &= 900 \\ 2x + 2x + 160 &= 900 \\ 4x &= 740 \quad | : 4 \\ x &= 185 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Kentän leveys on siis 185 m ja pituus 185 m + 80,0 m = 265 m.

Vastaus 185 m $\times$ 265 m

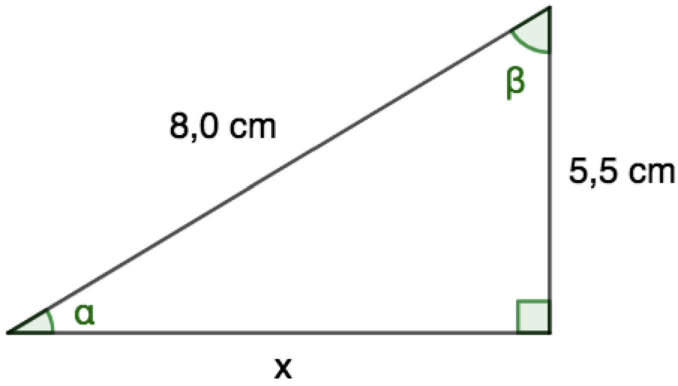
2.

a)

Merkitään kateetin *AD* pituutta kirjaimella *x.* Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 5{,}5^2 = 8{,}0^2 \qquad | -5{,}5^2$$
$$x^2 = 33{,}75 \qquad | \sqrt{}$$
$$x = \pm 5{,}809\ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $x = 5{,}809\ldots\ \text{cm} \approx 5{,}8\ \text{cm}$.



b)

Ratkaistaan kulmat α ja β sinin ja kosinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{5{,}5}{8{,}0} \qquad \cos\beta = \frac{5{,}5}{8{,}0}$$
$$\alpha = 43{,}432\ldots° \qquad \beta = 46{,}567\ldots°$$
$$\alpha \approx 43{,}4° \qquad \beta \approx 46{,}6°$$

c)

Lasketaan kolmion pinta-ala kannan ja korkeuden avulla.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5{,}809\ldots\ \text{cm} \cdot 5{,}5\ \text{cm} = 15{,}976\ldots\ \text{cm}^2 \approx 16{,}0\ \text{cm}^2$$

Vastaus **a)** 5,8 cm

b) 43,4° ja 46,6°

c) 16,0 cm^2

3.

Selvitetään ensin taikinan määrä laskemalla kulhon tilavuus.
Kulhon korkeus on 20 cm, joten myös puolipallon säde on 20 cm.

$$V_{\text{taikina}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (20\ \text{cm})^3 = 16755{,}160 \ldots\ \text{cm}^3$$

Yhden pullan säde on $\frac{6{,}0\ \text{cm}}{2} = 3{,}0\ \text{cm}.$ Lasketaan yhden pullan tilavuus.

$$V_{\text{pulla}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (3{,}0\ \text{cm})^3 = 113{,}097 \ldots\ \text{cm}^3$$

Sadan pullan valmistamiseen tarvitaan taikinaa

$$100 \cdot 113{,}097 \ldots\ \text{cm}^3 = 11309{,}7 \ldots\ \text{cm}^3.$$

Koska taikinaa on enemmän, se riittää sadan pullan valmistamiseen.

Vastaus Riittää.

4.

a)

Katto levitettynä on suorakulmio, jonka sivut ovat 40 m sekä päädyn kaaren pituus.

Lasketaan ensin puoliympyrän kaaren pituus b, kun $\pi \approx 3$.

$$b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}.$$

Lasketaan katon pinta-ala.

$$A = 15 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} = 600 \text{ m}^2$$

b)

Verrataan pinta-alan arvoa 630 m^3 a-kohdan pinta-alaan.

$$\frac{630 \text{ m}^2}{600 \text{ m}^2} = 1{,}05 = 105 \text{ \%}.$$

Myöhemmin laskettu arvo on $105 \text{ \%} - 100 \text{ \%} = 5 \text{ \%}$ suurempi.

Vastaus **a)** 600 m^2

b) 5 % suurempi

5.

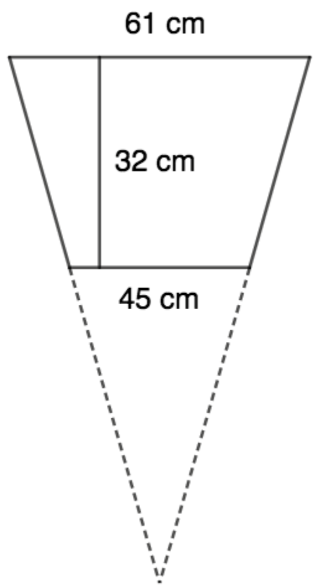
Säiliön sisäosa koostuu suorasta ympyrälieriöstä ja katkaistusta ympyräkartiosta.

Lieriön korkeus on $97 \text{ cm} - 32 \text{ cm} = 65 \text{ cm}$ ja pohjaympyrän säde

$$\frac{65 \text{ cm} - 2 \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 30{,}5 \text{ cm}.$$

Lasketaan lieriön tilavuus.

$$V_L = \pi \cdot (30{,}5 \text{ cm})^2 \cdot 65 \text{ cm} = 189960{,}326 \ldots \text{ cm}^3$$



Katkaistu kartioon suuremman pohjaympyrän säde on

$$r_1 = \frac{61 \text{ cm}}{2} = 30{,}5 \text{ cm}.$$

ja pienemmän pohjaympyrän säde on

$$r_2 = \frac{45 \text{ cm}}{2} = 22{,}5 \text{ cm}.$$

Katkaistun kartion tilavuus saadaan käyttämällä katkaistun kartion tilavuuden kaavaa.

$$\begin{aligned} V_K &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot ({r_1}^2 + r_1 r_2 + {r_2}^2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 32 \cdot (30{,}5^2 + 30{,}5 \cdot 22{,}5 + 22{,}5^2) \\ &= 71134{,}035 \ldots \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan käymälän säiliön sisätilavuus.

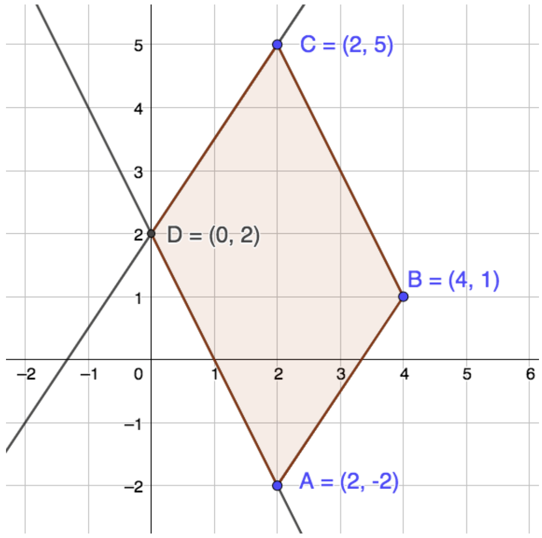
$$\begin{aligned} V &= V_L + V_K \\ &= 189960{,}326 \ldots \text{ cm}^3 + 71134{,}035 \ldots \text{ cm}^3 \\ &= 261094{,}362 \ldots \text{ cm}^3 \\ &\approx 260 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Säiliön tilavuus on siis $260 \text{ dm}^3 = 260 \text{ l}$.

Vastaus 260 l

6.

a)



Piirretään tunnetut pisteet koordinaatistoon.

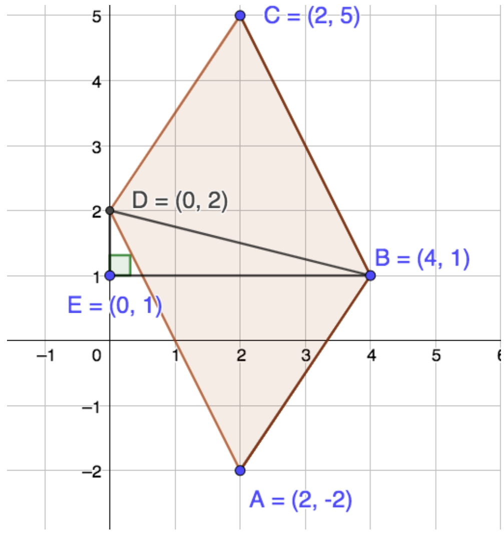
Piirretään janan AB kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen C kautta.

Piirretään janan BC kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen D kautta.

Piste D on näiden janojen leikkauspiste.

$D = (0, 2)$

b)



Piirretään suorakulmainen kolmio EBD, jonka kateettien pituudet ovat

$|ED| = 2 - 1 = 1$ ja

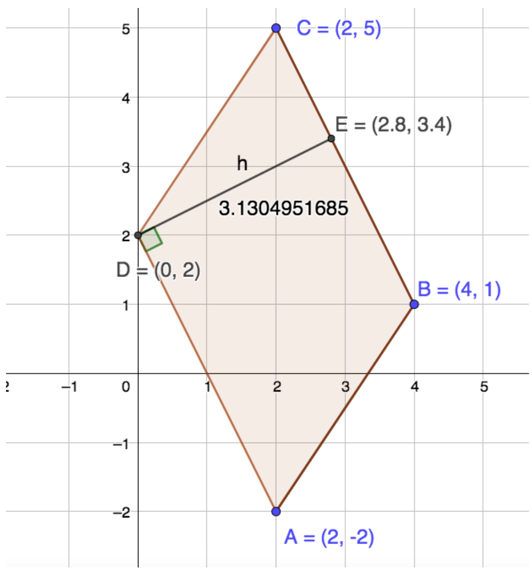
$|EB| = 4 - 0 = 4$.

Lasketaan lyhyemmän lävistäjän DB pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$|DB|^2 = 1^2 + 4^2$
$|DB| = \pm\sqrt{17}$

Pituus on aina positiivinen, joten $|DB| = \sqrt{17} \approx 4{,}1$.

c)



Korkeusjana h saadaan piirtämällä kannalle AD esimerkiksi pisteen D kautta kulkeva normaali.

Korkeusjanan pituus on 3,1.

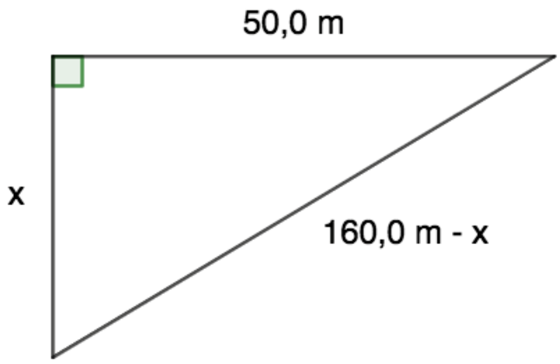
Vastaus **a)** $D = (0, 2)$

b) $\sqrt{17} \approx 4{,}1$

c) 3,1

7.

a)



Merkitään toisen kateetin pituutta kirjaimella *x.*
Tällöin hypotenuusan pituus on $160{,}0\text{ m } - x$.

Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseella.

$$50{,}0^2 + x^2 = (160{,}0 - x)^2$$
$$x = 72{,}1875$$
$$x \approx 72{,}2\ (\text{m})$$

Hypotenuusan pituus on siis
$160{,}0\text{ m} - 72{,}1875\text{ m} = 87{,}8125\text{ m} \approx 87{,}8\text{ m}$.

Sivujen pituudet ovat 50,0 m, 72,2 m ja 87,8 m.

b)

Alueen pinta-ala luonnossa on $A = \frac{1}{2} \cdot (72{,}1875\text{ m} \cdot 50{,}0\text{ m}) = 1804{,}6875\text{ m}^2$

Merkitään mittakaavaa kirjaimella *k.* Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k.*

$$\frac{72{,}1875\text{ cm}^2}{18046875\text{ cm}^2} = k^2$$
$$k = \pm 0{,}002$$

Mittakaava on positiivinen luku, joten

$$k = 0{,}002 = \frac{1}{500}.$$

Vastaus **a)** 50,0 m, 72,2 m ja 87,8 m

b) 1 : 500

8.

a)

Merkitään Kuun sädettä kirjaimella *r.* Muodostetaan kuun ympärysmitan avulla yhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$2\pi r = 10900$$
$$r = 1734{,}788\ldots\ (\mathrm{km})$$

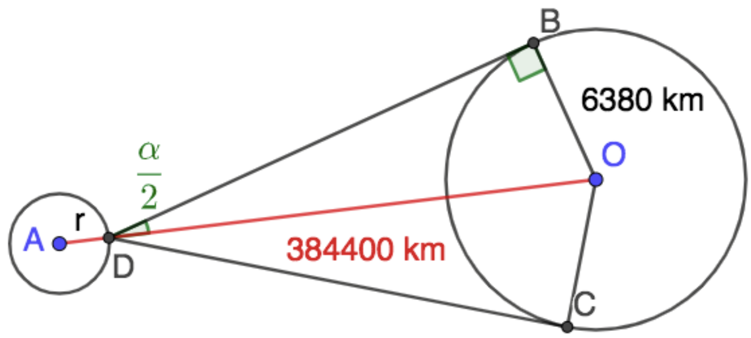
Verrataan Kuun pinta-alaa Maan pinta-alaan.

$$\frac{A_{\mathrm{Kuu}}}{A_{\mathrm{Maa}}} = \frac{4\pi \cdot (1734{,}788\ldots\ \mathrm{km})^2}{4\pi \cdot (6380\ \mathrm{km})^2} = 0{,}07393\ldots \approx 7{,}39\ \%$$

Kuun pinta-ala on 7,39 % Maan pinta-alasta.

b)

Piirretään mallikuva.



Merkitään kysyttyä kulmaa *CDB* kirjaimella α.

Näkösäteet Kuusta ovat Maapallon tangentteja.

Koska säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, kulman *CDB* puolittaja synnyttää suorakulmaisen kolmion *DOB.*

Janan *DO* pituus on
$384400\ \mathrm{km} - 1734{,}788\ldots\ \mathrm{km} = 382665{,}211\ldots\ \mathrm{km}.$

Kolmion *DOB* yksi kulma on $\frac{\alpha}{2}$. Ratkaistaan α sinin avulla.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{6380}{382665{,}211\ldots}$$
$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}955\ldots°$$
$$\alpha = 1{,}910\ldots°$$
$$\alpha \approx 1{,}91°$$

Maapallo näkyy Kuusta 1,91° kulmassa.

Vastaus **a)** 7,39 %

b) 1,91°

9.

a)
Merkitään kartion korkeutta kirjaimella *h.* Muodostetaan kartion tilavuuden yhtälö ja ratkaistaan *h.*

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}2^2 \cdot h = 165$$
$$h = 5{,}827 \ldots \text{ (cm)}$$

Kartion sivujana *s*, säde ja korkeusjana muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan sivujanan *s* pituus Pythagoraan lauseella.

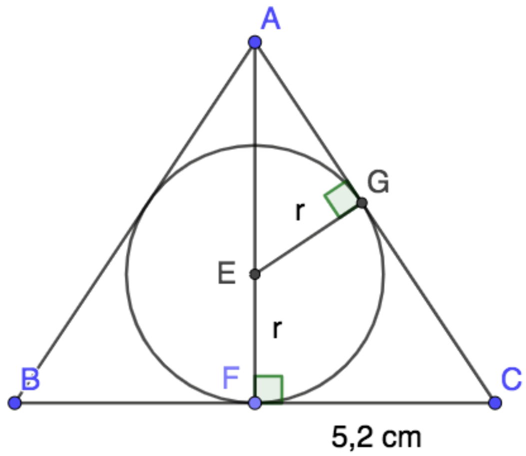
$$s^2 = 5{,}2^2 + 5{,}827 \ldots^2$$
$$s = \pm 7{,}809 \ldots$$

Pituus on aina positiivinen, joten $s = 7{,}809 \ldots$ cm.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A = \pi \cdot 5{,}2 \text{ cm} \cdot 7{,}809 \ldots \text{ cm} = 127{,}584 \ldots \text{ cm}^2 \approx 130 \text{ cm}^2$$

b)
Piirretään kartion poikkileikkaus.



Sen sisälle piirretty pallo sivuaa kartion sivujanoja, joten pallon säde *r* on kohtisuorassa sivujanaa vasten.

Kolmioilla *FCA* ja *EGA* on suora kulma vastinkulmana sekä yhteinen kulma *A*, joten ne ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen mukaan.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla verrantoyhtälö ja ratkaistaan *r.*

$$\frac{|EG|}{|FC|} = \frac{|EA|}{|AC|}$$
$$\frac{r}{5{,}2} = \frac{5{,}827 \ldots - r}{7{,}809 \ldots}$$
$$r = 2{,}329 \ldots \text{ (cm)}$$

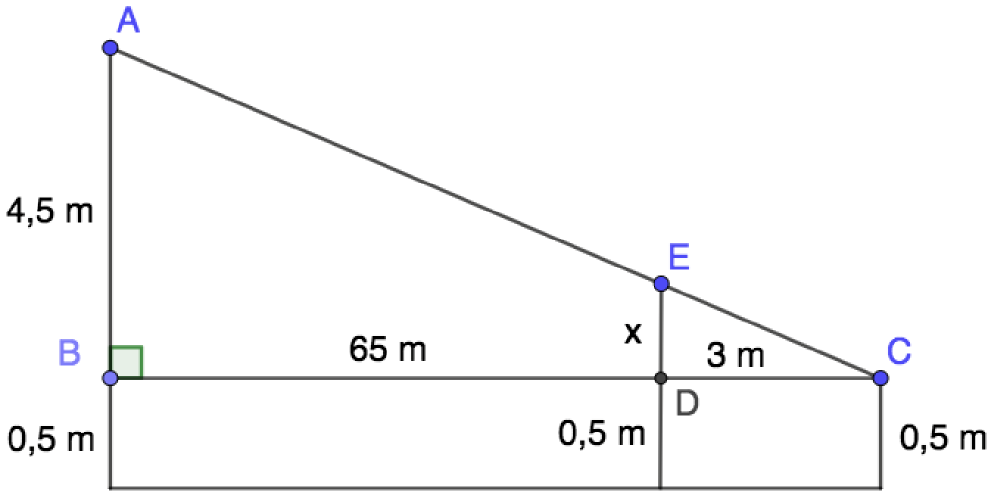
Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2{,}329 \text{ cm})^3 = 52{,}920 \ldots \text{ cm}^3 \approx 0{,}53 \text{ dl}$$

Vastaus **a)** 130 cm^2
b) 0,53 dl

10.

Piirretään mallikuva.



Bongari on pisteessä *A* ja linnunpesä pisteessä *C.* Selvitetään, kuinka korkea halkopino voi olla korkeintaan, jotta bongari näkee pesän.

Kolmioilla *BCA* ja *DCE* on suora kulma vastinkulmana ja yhteinen kulma *C.* Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset kk-lauseen mukaan.

Muodostetaan vastinsivujen suhteiden avulla yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{x}{4{,}5} = \frac{3}{68}$$

$$x = 0{,}198\ldots \text{ (m)}$$

Halkopino voi siis olla korkeintaan $0{,}5 \text{ m} + 0{,}198\ldots \text{ m} = 0{,}698\ldots \text{ m}$ korkea.

Koska halkopino on oikeasti 0,9 m korkea, bongari ei näe linnunpesää.

Vastaus Ei näe.