MAA9 KOE 2021 RATKAISUT

OSIO A

1. a) Määrää funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ se integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta.

   b) Määrää funktion $g(x) = x^2 - 2x + 3$ se integraalifunktio, jolla on nollakohta $x = 3$.

   RATKAISU: Funktion $f(x)$ kaikki integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

   Edelleen

$$\begin{aligned} F(0) = \frac{1}{4}e^0 + C &= 1 \\ \frac{1}{4} + C &= 1 \quad \Big| - \frac{1}{4} \\ C &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

   Siis $F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}$.

   b) Aluksi funktion $g(x)$ kaikki integraalifunktiot ovat muotoa

$$G(x) = \int (x^2 - 2x + 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + C.$$

   Edelleen $G(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 + 3 \cdot 3 + C = 0$, mistä $C = -9$.

   VASTAUS: a) $\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 9$.

2. Laske integraalit

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^6 |2x - 4|\,dx$

   RATKAISU: a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \ln\sqrt{x^2+1} + C.$

   HUOM: Kumpikin kahdesta viimeisestä muodosta kelpaa vastaukseksi.

   b) Aluksi yhtälön $2x - 4 = 0$ ratkaisu on $x = 2$. Siis

$$|2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4, & \text{kun } x < 2, \\ 2x - 4, & \text{kun } x \geq 2. \end{cases}$$

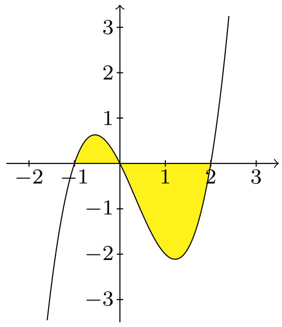
   Siten

$$\begin{aligned} \int_0^6 |2x-4|\,dx &= \int_0^2 (-2x+4)\,dx + \int_2^6 (2x-4)\,dx \\ &= \Big/_0^2 (-x^2 + 4x) + \Big/_2^6 (x^2 - 4x) \\ &= (-2^2 + 4 \cdot 2) - 0 + (6^2 - 4 \cdot 6) - (2^2 - 4 \cdot 2) \\ &= 4 - 0 + 12 + 4 = 20. \end{aligned}$$

3. Laske funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman kaksiosaisen alueen pinta-ala.

RATKAISU: Funktion nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2 &= 0 \\ x(x^2 - x - 2) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}$$



Alueet sijaitseva siis väleillä $[-1, 0]$ ja $[0, 2]$, Oheisen kuvaajna perusteella pinta-ala on

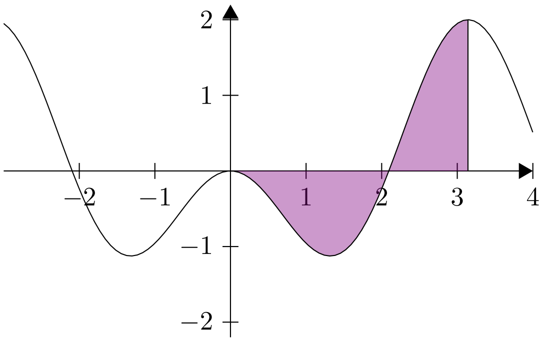
$$\begin{aligned} A = &A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx - \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx \\ &= \Big/_{-1}^{0} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right) - \Big/_{0}^{2} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right) \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) + 0 = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

VASTAUS: $\frac{37}{12}$ (p.a.y).

OSIO B.

4. Laske käyrän $\cos 2x - \cos x$ ja x-akselin välillä $[0, \pi]$ rajaaman alueen pinta-ala.

RATKAISU: Piirretään kuva tilanteesta



Ratkaistaan funktion $f(x) = \cos 2x - \cos x$ nollakohdat:

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos x &= 0 \\ \cos 2x &= \cos x \\ 2x &= \pm x + n2\pi. \end{aligned}$$

Jaetaan yhtälö kahteen osaan. Yhtälöstä $2x = x + n2\pi$ saadaan $x = n2\pi$, mistä ainoastaan $x = 0$ kuuluu välille $[0, \pi]$. Toinen yhtälö

$$\begin{aligned} 2x &= -x + n2\pi \\ 3x &= n2\pi \\ x &= n\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Näistä $x = 0$ ja $x = \frac{2\pi}{3}$ kuuluvat välille $[0, \pi]$. Kuvan perusteella kuvaaja on x-akselin alapuolella välillä $[0, \frac{2pi}{3}]$ ja $x$akselin yläpuolella välillä $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$. Lasketaan ala kahdessa osassa:

$$A_1 = -\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} (\cos 2x - \cos x)\,dx = -\Big/_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \sin x\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ja

$$A_2 = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\cos 2x - \cos x)\, dx = -\Big/_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \sin x\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

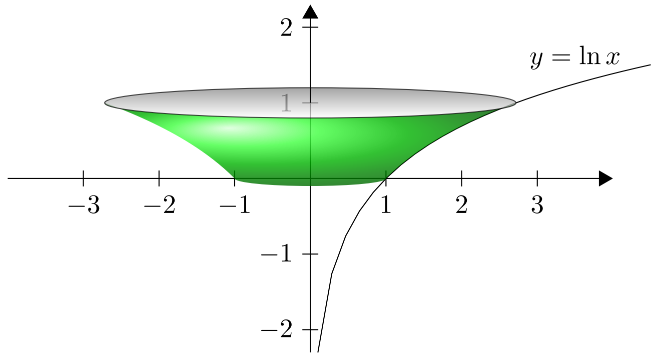
Nyt

$$A = A_1 + A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60.$$

VASTAUS: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$ (p.a.y).

5. Käyrä $y = \ln x$ pyörähtää y-akselin ympäri, kun x on välillä $[1, e]$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

RATKAISU: Aluksi yhtälöstä $y = \ln x$ saadaan $x = e^y$. Integroimisrajat ovat $\ln 1 = 0$ ja $\ln e = 1$. Siis pyörähdyskappaleen tilavuus on

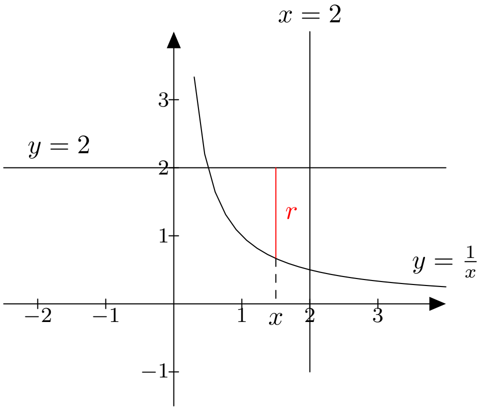


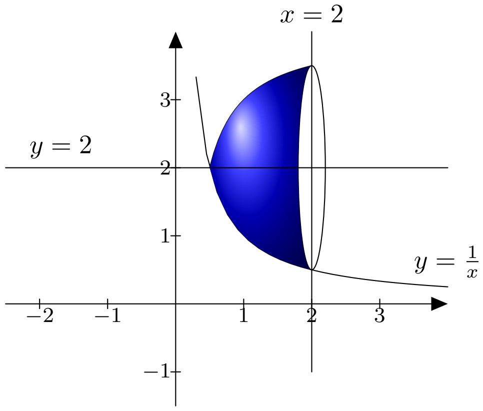
$$V = \pi \int_0^1 (e^y)^2\, dy = \pi \int_0^1 e^{2y}\, dy = \frac{1}{2}\pi \int_0^1 2e^{2y}\, dy$$
$$= \frac{\pi}{2} \Big/_0^1 e^{2y} = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1).$$

VASTAUS: $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \approx 10,0$ (t.y.).

6. Käyrän $y = \dfrac{1}{x}$ ja suorien $y = 2$ ja $x = 2$ rajaama alue pyörähtää suoran $y = 2$ ympäri. Mikä muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus on?

RATKAISU: Aluksi kohdassa x pyörähdyskappaleen säde $r = 2 - \frac{1}{x}$.





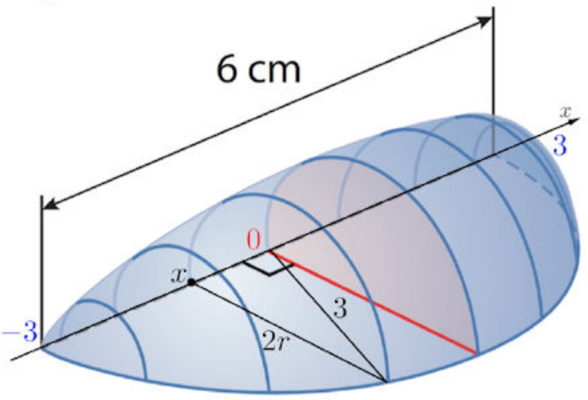
Käyrän $y = \dfrac{1}{x}$ leikkauspiste suoran $y = 2$ saadaan yhtälöstä $\dfrac{1}{x} = 2$, mistä $x = \dfrac{1}{2}$.

Tilavuus on

$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \pi \Big/_{\frac{1}{2}}^{2} \left(4x - 4\ln x - \frac{1}{x}\right) = \pi\left(\frac{15}{2} - 8\ln 2\right) \approx 6,141256.$$

VASTAUS: $\pi\left(\dfrac{15}{2} - 8\ln 2\right) \approx 6,14.$

7. Lilian tulosti 3D-tulostimella kaulakorun. Korun pohja on puoliympyrä, jonka halkaisija on 6,0 cm. Kaikki pohjaympyrän halkasisijaa vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat puoliympyröitä. Kuinka paljon koru painaa, kun käytetyn muovin tiheys on 1,2 g/cm^3?



RATKAISU: Kuvan merkintöjen mukaisesti poikkileikkauksen kohdalla x säde totoeuttaa yhtälön

$$x^2 + (2r)^2 = 3^2,$$

mistä

$$r^2 = \frac{1}{4}(9 - x^2).$$

Poikkileikkauksen pinta-ala on siis

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{8}(9 - x^2).$$

Tilavuus on siten

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^{3} A(x)\,dx = \frac{\pi}{8}\int_{-3}^{3}(9 - x^2)\,dx \\ &= \frac{\pi}{8} \Big/_{\frac{\pi}{8}-3}^{3} \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right) \\ &= \frac{\pi}{8}((27-9) - (-27+9)) \\ &= \frac{9\pi}{2}\ (\mathrm{cm}^3). \end{aligned}$$

Lopuksi korun massa on

$$m = \frac{9\pi}{2}\mathrm{cm}^3 \cdot 1{,}2\,\mathrm{g/cm}^3 = 16,9646\ldots\,\mathrm{g} \approx 17\,\mathrm{g}.$$

VASTAUS: 17 g.