VÄLISARJA

Tehtäviä

(1) Pyöräilijä haluaa ajaa 50 kilometrin matkan kahdessa tunnissa. Ajettuaan 25 kilometriä, hän huomaa ajaneensa siihen asti nopeudella 21 kilometriä tunnissa. Millä nopeudella pyöräilijän on ajettava loppumatka, jotta tavoite toteutuu?
   (a) noin 28 kilometriä tunnissa
   (b) noin 29 kilometriä tunnissa
   (c) noin 30 kilometriä tunnissa
   (d) noin 31 kilometriä tunnissa

(2) Luku a arvotaan satunnaisesti väliltä $[2, 4]$. Muodostetaan kolmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselit sekä suora $y = 2x + a$. Millä todennäköisyydellä kolmion ala on vähintään 2?
   (a) 0
   (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   (c) $2 - \sqrt{2}$
   (d) 1

(3) Tarkastellaan lukua, jonka kymmenjärjestelmäesitys saadaan kirjoittamalla luku 2023 peräkkäin 2022 kertaa. Mitä tästä luvusta voidaan sanoa?
   (a) Se on jaollinen kolmella.
   (b) Se on jaollinen viidellä.
   (c) Se on jaollinen seitsemällä.
   (d) Se on jaollinen yhdellätoista.

(4) Luvut x ja y ovat reaalilukuja. Määritä lausekkeen

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 2023$$

pienin arvo.

(5) Laatikossa on ainakin yksi pallo. Lisäksi tiedetään, että palloja on alle 100. Pallot ovat joko sinisiä, punaisia tai valkoisia. Punaisia palloja on parillinen määrä. Valkoisia ja sinisiä on yhteensä nelinkertaisesti punaisten pallojen määrä. Punaisia ja sinisiä palloja on yhteensä kuusinkertaisesti valkoisten pallojen määrä. Kuinka monta palloa laatikossa on?

(6) Piste O sijaitsee suunnikkaan $ABCD$ sisällä siten, että $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Osoita, että $\angle OBC = \angle ODC$.

(1)
(2) Pyöräilijä haluaa ajaa 50 kilometrin matkan kahdessa tunnissa. Ajettuaan 25 kilometriä, hän huomaa ajaneensa siihen asti nopeudella 21 kilometriä tunnissa. Millä nopeudella pyöräilijän on ajettava loppumatka, jotta tavoite toteutuu?
(a) noin 28 kilometriä tunnissa
(b) noin 29 kilometriä tunnissa
(c) noin 30 kilometriä tunnissa
(d) noin 31 kilometriä tunnissa
Ratkaisu: Alkuosaan on kulunut $\frac{25}{21}$ tuntia. Loppuosaan on siis käytettävissä $2-\frac{25}{21}$ tuntia. Tässä ajassa tulisi ajaa 25 kilometriä. Nopeus on siis

$$\frac{25}{2-\frac{25}{21}} \approx 31\text{km/h}.$$

(3) Luku a arvotaan satunnaisesti väliltä $[2,4]$. Muodostetaan kolmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselit sekä suora $y = 2x + a$. Millä todennäköisyydellä kolmion ala on vähintään 2?
(a) 0
(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) $2-\sqrt{2}$
(d) 1
Ratkaisu: Suora $y = 2x + a$ leikkaa y-akselin pisteessä $y = a$ ja x-akselin pisteessä $x = -\frac{a}{2}$. Kolmion ala on siis $\frac{a^2}{4}$. Ehto $\frac{a^2}{4} \geq 2$ toteutuu, kun $a^2 \geq 8$, eli $s \geq 2\sqrt{2}$ (sillä vain positiivinen arvo kelpaa). Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$.
(4) Tarkastellaan lukua, jonka kymmenjärjestelmäesitys saadaan kirjoittamalla luku 2023 peräkkäin 2022 kertaa. Mitä tästä luvusta voidaan sanoa?
(a) Se on jaollinen kolmella.
(b) Se on jaollinen viidellä.
(c) Se on jaollinen seitsemällä.
(d) Se on jaollinen yhdellätoista.
Ratkaisu: Luku 202320232023 on jaollinen kolmella. Tehtävänannon luku saadaan kertomalla tämä luku luvulla, joka on saatu kirjoittamalla $\frac{2022}{3}$ kertaa ykkönen ja aina kahden ykkösen väliin nolla. Siispä tämäkin luku on jaollinen kolmella. Väite a on oikein. Luvun viimeinen numero on 3, joten b on väärin. Luku 2023 on jaollinen luvulla 7. Siispä väite c on oikein. Luku Se luku, joka saadaan luvusta 2023 kirjoittamalla se 11 kertaa peräkkäin, on jaollinen luvulla 11. Kertomalla tämä luku luvulla, jossa on 183 ykköstä ja kahden ykkösen välissä aina $11 \cdot 4$ nollaa, on luku, joka muodostuu kirjoittamalla luku 2023 täsmälleen $183 \cdot 11 = 2013$ kertaa peräkkäin. Alkuperäinen luku saadaan tästä luvusta kertomalla se luvulla 10^{36} (jolloin loppuun saadaan 36 nollaa) ja summaamalla siihen luku, joka muodostuu kirjoittamalla 2023 yhdeksän kertaa peräkkäin. Luku, joka saadaan kirjoittamalla 2023 yhdeksän kertaa peräkkäin ei kuitenkaan ole jaollinen luvulla 11, joten myöskään kysytty luku ei ole jaollinen luvulla 11. Kohta d on siis väärin.
(5) Luvut x ja y ovat reaalilukuja. Määritä lausekkeen

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 2023$$

pienin arvo.

Ratkaisu: Täydennetään lauseke neliöiksi:

$$2x^2+y^2-2xy-2023=(x^2+2x+1)+(x^2-2xy+y^2)-2024=(x+1)^2+(x-y)^2-2024.$$

Neliöt ovat aina epänegatiivisia, joten lausekkeen arvo on vähintään -2024. Toisaalta tämä arvo saavutetaan, kun $x=-1$ ja $x=y$, eli myös $y=-1$.

(6) Laatikossa on ainakin yksi pallo. Lisäksi tiedetään, että palloja on alle 100. Pallot ovat joko sinisiä, punaisia tai valkoisia. Punaisia palloja on parillinen määrä. Valkoisia ja sinisiä on yhteensä nelinkertaisesti punaisten pallojen määrä. Punaisia ja sinisiä palloja on yhteensä kuusinkertaisesti valkoisten pallojen määrä. Kuinka monta palloa laatikossa on?

Ratkaisu: Merkitään sinisten pallojen määrää kirjaimella s, punaisten pallojen määrää kirjaimella p ja valkoisten pallojen määrää kirjaimella v. Tiedetään, että p on parillinen luku. Lisäksi

$$\begin{cases} v+s=4p \\ p+s=6v. \end{cases}$$

Vähennetään yhtälöt toisistaan, jolloin saadaan

$$v-p=4p-6v,$$

eli $7v=5p$. Luvun p on siis oltava jaollinen luvulla 7. Koska se on myös parillinen, on sen oltava jokin luvuista $0, 14, 28, \ldots$. Jos olisi $p=0$, olisi myös $v=0$, jolloin olisi myös $s=0$. Tällöin pallojen kokonaismäärä olisi nolla, mikä ei ole mahdollista.

Jos on $p=14$, niin $v=10$. Tällöin $s=4p-v=56-10=46$. Lisäksi ehto $p+s=6v$ toteutuu, sillä $14+46=6\cdot 10$. Tällöin pallojen kokonaismäärä on $14+10+46=70$.

Jos $p=28$, niin $v=20$. Tällöin $s=4p-v=112-20=92$, eli palloja on yhteensä yli sata. Tämä ei ole mahdollista. Vastaavasti käy, jos $p>28$. Siispä ainoa ratkaisu on yllämainittu, jossa $p=14$ ja pallojen kokonaismäärä 70.

(7) Piste O sijaitsee suunnikkaan $ABCD$ sisällä siten, että $\angle AOB+\angle COD=180°$. Osoita, että $\angle OBC=\angle ODC$.

Ratkaisu: Piirretään aluksi tilanteesta kuva. Lisäksi tehdään kopio alkuperäisestä suunnikkaasta ns. yhdensuuntaissiirtymän avulla, eli piirretään toinen samanlainen suunnikas, jonka vinot sivut ovat alkuperäisen suunnikkaan sivujen jatkeita. Piiretään samaan kuvaan myös valmiiksi kaksi apujanaa, jotka on merkitty katkoviivoin:

suunnikasratkaisu.png

Koska $\angle COD = \angle BO'A$, on oltava $\angle AOB + \angle BO'A = 180°$, eli $AO'BO$ on jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle ODC = \angle O'AB = \angle O'OB$. Toisaalta, koska OO' ja CB' ovat yhdensuuntaisia, on myös oltava $\angle O'OB = \angle OBC$. Väite on todistettu.