PERUSSARJA

Tehtäviä

(1) Suorakulmion sisälle on piirretty kolmio niin, että kolmion yksi sivu on suorakulmion sivu, ja kolmion vastakkainen kärki on suorakulmion vastakkaisella sivulla. Mitkä seuraavista väitteistä ovat välttämättä tosia?
  (a) Kolmion piiri on pienempi kuin suorakulmion piiri.
  (b) Kolmion ala on puolet suorakulmion alasta.
  (c) Kolmio on suorakulmainen.
  (d) Kolmio on teräväkulmainen.

(2) Pyöräilijä haluaa ajaa 50 kilometrin matkan kahdessa tunnissa. Ajettuaan 25 kilometriä, hän huomaa ajaneensa siihen asti nopeudella 21 kilometriä tunnissa. Millä nopeudella pyöräilijän on ajettava loppumatka, jotta tavoite toteutuu?
  (a) noin 28 kilometriä tunnissa
  (b) noin 29 kilometriä tunnissa
  (c) noin 30 kilometriä tunnissa
  (d) noin 31 kilometriä tunnissa

(3) Oheisen neliön sivun pituus on 6. Sen sisään on piirretty ympyrä, joka sivuaa neliön kaikkia sivuja. Neliön jokaisesta kulmasta on piirretty jana, joka päättyy ympyrän kaarelle ja lisäksi leikkaa ympyrän kaaren toisessa pisteessä. Nämä janat on piirretty niin, että on muodostunut neljä keskenään yhtenevää kolmiota. Lisäksi kierrettäessä myötäpäivään, huomataan, että jokaisesta kulmasta piirretyn janan se piste, jossa se leikkaa ympyrän kaaren ensimmäisen kerran, on sama piste kuin missä edellisestä kulmasta piirretty jana päättyy. Määritä yhden pikkukolmion ala.
  (a) 3
  (b) $\frac{41}{9}$
  (c) $\frac{9}{2}$
  (d) 6

(4) Luku a arvotaan satunnaisesti väliltä $[2,4]$. Muodostetaan kolmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselit sekä suora $y = 2x + a$. Millä todennäköisyydellä kolmion ala on vähintään 2?
  (a) 0
  (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
  (c) $2 - \sqrt{2}$
  (d) 1

(5) Määritellään reaalilukujen joukossa funktio f, jonka arvot ovat reaalilukuja. Funktiosta tiedetään, että $f(x) = f(2021 - x)$ ja $f(x + 10) = f(2010 - x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Lisäksi tiedetään, että

$$f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 6.$$

Määritä lausekkeen

$$f(16) + f(17) + f(18)$$

arvo.
  (a) 16

(b) $\frac{11}{3}$
(c) $\frac{9}{2}$
(d) Arvoa ei voida määrittää annetuilla tiedoilla.

(6) Tarkastellaan lukua, jonka kymmenjärjestelmäesitys saadaan kirjoittamalla luku 2023 peräkkäin 2022 kertaa. Mitä tästä luvusta voidaan sanoa?
(Vaativa versio:)
(a) Se on jaollinen kolmella.
(b) Se on jaollinen viidellä.
(c) Se on jaollinen seitsemällä.
(d) Se on jaollinen yhdellätoista.

(7) Uunipelti on suorakulmio, jonka mitat ovat 30 cm ja 40 cm. Pellillä halutaan paistaa mahdollisimman iso pizza niin, että pizza on halkaistu kahtia, ja osat asetettu kuvan mukaan vastakkain. Mikä on pizzan suurin mahdollinen halkaisija?

(8) Laatikossa on ainakin yksi pallo. Lisäksi tiedetään, että palloja on alle 100. Pallot ovat joko sinisiä, punaisia tai valkoisia. Punaisia palloja on parillinen määrä. Valkoisia ja sinisiä on yhteensä nelinkertaisesti punaisten pallojen määrä. Punaisia ja sinisiä palloja on yhteensä kuusinkertaisesti valkoisten pallojen määrä. Kuinka monta palloa laatikossa on?

Tehtävät ja ratkaisut

(1) Suorakulmion sisälle on piirretty kolmio niin, että kolmion yksi sivu on suorakulmion sivu, ja kolmion vastakkainen kärki on suorakulmion vastakkaisella sivulla. Mitkä seuraavista väitteistä ovat välttämättä tosia?

(a) Kolmion piiri on pienempi kuin suorakulmion piiri.
(b) Kolmion ala on puolet suorakulmion alasta.
(c) Kolmio on suorakulmainen.
(d) Kolmio on teräväkulmainen.

Ratkaisu: Ensimmäiset kaksi väitettä ovat tosia. Kolmion piiri muodostuu yhdestä suorakulmion sivusta ja lisäksi kahdesta sivusta, jotka ovat välttämättä lyhyempiä kuin suorakulmion muiden kolmen sivun summa. Lisäksi kolmion ala on kannan ja korkeuden tulo jaettuna kahdella, eli tasan puolet suorakulmion alasta. Kolmio ei välttämättä ole suorakulmainen: esim. olkoon suorakulmio neliö ja kolmion kärki keskellä sivua. Kolmio ei välttämättä ole myöskään teräväkulmainen, sillä jos esim. suorakulmio on hyvin matala, on kolmio tylppäkulmainen.

(2) Pyöräilijä haluaa ajaa 50 kilometrin matkan kahdessa tunnissa. Ajettuaan 25 kilometriä, hän huomaa ajaneensa siihen asti nopeudella 21 kilometriä tunnissa. Millä nopeudella pyöräilijän on ajettava loppumatka, jotta tavoite toteutuu?

(a) noin 28 kilometriä tunnissa
(b) noin 29 kilometriä tunnissa
(c) noin 30 kilometriä tunnissa
(d) noin 31 kilometriä tunnissa

Ratkaisu: Alkuosaan on kulunut $\frac{25}{21}$ tuntia. Loppuosaan on siis käytettävissä $2-\frac{25}{21}$ tuntia. Tässä ajassa tulisi ajaa 25 kilometriä. Nopeus on siis

$$\frac{25}{2-\frac{25}{21}} \approx 31\text{km/h}.$$

(3) Oheisen neliön sivun pituus on 6. Sen sisään on piirretty ympyrä, joka sivuaa neliön kaikkia sivuja. Neliön jokaisesta kulmasta on piirretty jana, joka päättyy ympyrän kaarelle ja lisäksi leikkaa ympyrän kaaren toisessa pisteessä. Nämä janat on piirretty niin, että on muodostunut neljä keskenään yhtenevää kolmiota. Lisäksi kierrettäessä myötäpäivään, huomataan, että jokaisesta kulmasta piirretyn janan se piste, jossa se leikkaa ympyrän kaaren ensimmäisen kerran, on sama piste kuin missä edellisestä kulmasta piirretty jana päättyy. Määritä yhden pikkukolmion ala.

(a) 3
(b) $\frac{41}{9}$
(c) $\frac{9}{2}$
(d) 6

Ratkaisu: Ison neliön ala on $6 \cdot 6 = 36$. Koska ympyrän halkaisija on myös 6, on sen sisään muodostuneen pikkuneliön halkaisija 6, jolloin pikkuneliön sivu on $\frac{6}{\sqrt{2}}$. Siispä pikkuneliön ala on 18. Ison neliön alasta kolmiot peittävät siis yhteensä $36 - 18 = 18$. Koska kolmiot ovat yhteneviä, on yhden kolmion ala $\frac{18}{4} = \frac{9}{2}$.

(4) Luku a arvotaan satunnaisesti väliltä $[2, 4]$. Muodostetaan kolmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselit sekä suora $y = 2x + a$. Millä todennäköisyydellä kolmion ala on vähintään 2?

(a) 0
(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $2-\sqrt{2}$
(d) 1
Ratkaisu: Suora $y = 2x + a$ leikkaa y-akselin pisteessä $y = a$ ja x-akselin pisteessä $x = -\frac{a}{2}$. Kolmion ala on siis $\frac{a^2}{4}$. Ehto $\frac{a^2}{4} \geq 2$ toteutuu, kun $a^2 \geq 8$, eli $s \geq 2\sqrt{2}$ (sillä vain positiivinen arvo kelpaa). Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$.

(5) Määritellään reaalilukujen joukossa funktio f, jonka arvot ovat reaalilukuja. Funktiosta tiedetään, että $f(x) = f(2021-x)$ ja $f(x+10) = f(2010-x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Lisäksi tiedetään, että

$$f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 6.$$

Määritä lausekkeen

$$f(16) + f(17) + f(18)$$

arvo.
(a) 16
(b) $\frac{11}{3}$
(c) $\frac{9}{2}$
(d) Arvoa ei voida määrittää annetuilla tiedoilla.
Ratkaisu: Sijoittamalla $x = 1$ ehtoon $f(x) = f(2021-x)$ saadaan $f(1) = f(2020)$. Sijoittamalla $x = -10$ ehtoon $f(x+10) = f(2010-x)$ saadaan $f(0) = f(2020)$. Siispä $f(0) = f(1)$. Sijoittamalla $x = k$ ehtoon $f(x) = f(2021-x)$ saadaan $f(k) = f(2021-k)$ ja sijoittamalla $x = k-11$ ehtoon $f(x+10) = f(2010-x)$ saadaan $f(k-1) = f(2010-k+11) = f(2011-k)$. Siispä $f(k) = f(k-1)$ kaikilla k. Tällöin $f(3) = f(4) = f(5) = f(6) = \frac{3}{2} = f(16) = f(17) = f(18)$, joten kysytyn lausekkeen arvo on $\frac{9}{2}$.

(6) Tarkastellaan lukua, jonka kymmenjärjestelmäesitys saadaan kirjoittamalla luku 2023 peräkkäin 2022 kertaa. Mitä tästä luvusta voidaan sanoa?
(a) Se on jaollinen kolmella.
(b) Se on jaollinen viidellä.
(c) Se on jaollinen seitsemällä.
(d) Se on jaollinen yhdellätoista.
Ratkaisu: Luku 202320232023 on jaollinen kolmella. Tehtävänannon luku saadaan kertomalla tämä luku luvulla, joka on saatu kirjoittamalla $\frac{2022}{3}$ kertaa ykkönen ja aina kahden ykkösen väliin nolla. Siispä tämäkin luku on jaollinen kolmella. Väite a on oikein. Luvun viimeinen numero on 3, joten b on väärin. Luku 2023 on jaollinen luvulla 7. Siispä väite c on oikein. Luku Se luku, joka saadaan luvusta 2023 kirjoittamalla se 11 kertaa peräkkäin, on jaollinen luvulla 11. Kertomalla tämä luku luvulla, jossa on 183 ykköstä ja kahden ykkösen välissä aina $11 \cdot 4$ nollaa, on luku, joka muodostuu kirjoittamalla luku 2023 täsmälleen $183 \cdot 11 = 2013$ kertaa peräkkäin. Alkuperäinen luku saadaan tästä luvusta kertomalla se luvulla 10^{36} (jolloin loppuun saadaan 36 nollaa) ja summaamalla siihen luku, joka muodostuu kirjoittamalla 2023 yhdeksän kertaa peräkkäin. Luku, joka saadaan kirjoittamalla 2023 yhdeksän kertaa peräkkäin ei kuitenkaan ole jaollinen luvulla 11, joten myöskään kysytty luku ei ole jaollinen luvulla 11. Kohta d on siis väärin.

(7) Uunipelti on suorakulmio, jonka mitat ovat 30 cm ja 40 cm. Pellillä halutaan paistaa mahdollisimman iso pizza niin, että pizza on halkaistu kahtia, ja osat asetettu kuvan mukaan vastakkain. Mikä on pizzan suurin mahdollinen halkaisija?
Ratkaisu: Olkoon pizzan säde r ja halkaisija $2r$. Piirretään jana pizzapuoliympyröiden keskipisteiden välille. Tämä jana muodostuu kahdesta säteestä, eli sen

pituus on $2r$. Se on sellaisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, jonka toinen kateetti on uunipellin lyhyempi sivu, eli 30 cm. Määritetään nyt toisen sivun pituus. Koska pizzapuoliympyrän keskipiste on r etäisyydellä pellin sivusta ja pellin leveys on 40 cm, on keskipisteiden vaakasuuntainen etäisyys $40 - 2r$. Saadaan siis yhtälö:

$$(2r)^2 = 30^3 + (40 - 2r)^2,$$

joka sievenee muotoon

$$4r^2 = 900 + 1600 - 160r + 4r^2,$$

eli

$$2500 = 160r,$$

joten $r = \frac{2500}{160} = 15{,}625$ cm.

(8) Laatikossa on ainakin yksi pallo. Lisäksi tiedetään, että palloja on alle 100. Pallot ovat joko sinisiä, punaisia tai valkoisia. Punaisia palloja on parillinen määrä. Valkoisia ja sinisiä on yhteensä nelinkertaisesti punaisten pallojen määrä. Punaisia ja sinisiä palloja on yhteensä kuusinkertaisesti valkoisten pallojen määrä. Kuinka monta palloa laatikossa on?

Ratkaisu: Merkitään sinisten pallojen määrää kirjaimella s, punaisten pallojen määrää kirjaimella p ja valkoisten pallojen määrää kirjaimella v. Tiedetään, että p on parillinen luku. Lisäksi

$$\begin{cases} v + s = 4p \\ p + s = 6v. \end{cases}$$

Vähennetään yhtälöt toisistaan, jolloin saadaan

$$v - p = 4p - 6v,$$

eli $7v = 5p$. Luvun p on siis oltava jaollinen luvulla 7. Koska se on myös parillinen, on sen oltava jokin luvuista $0, 14, 28, \ldots$. Jos olisi $p = 0$, olisi myös $v = 0$, jolloin olisi myös $s = 0$. Tällöin pallojen kokonaismäärä olisi nolla, mikä ei ole mahdollista.

Jos on $p = 14$, niin $v = 10$. Tällöin $s = 4p - v = 56 - 10 = 46$. Lisäksi ehto $p + s = 6v$ toteutuu, sillä $14 + 46 = 6 \cdot 10$. Tällöin pallojen kokonaismäärä on $14 + 10 + 46 = 70$.

Jos $p = 28$, niin $v = 20$. Tällöin $s = 4p - v = 112 - 20 = 92$, eli palloja on yhteensä yli sata. Tämä ei ole mahdollista. Vastaavasti käy, jos $p > 28$. Siispä ainoa ratkaisu on yllämainittu, jossa $p = 14$ ja pallojen kokonaismäärä 70.