# TEHTÄVIEN RATKAISUT

**1-1.** **a)** Kappaleen nopeus on suurin aikavälillä 10…20 s.

**b)** Kappale liikkuu hitaimmin aikavälillä 30…40 s.

**c)** Kappale on liikkumatta aikavälillä 0…10 s, aikavälillä 20…30 s ja aikavälillä 40…50 s.

**d)** Kappaleen nopeus on negatiivinen aikavälillä 30…40 s.

**1-2.** **a)** Kappaleen siirtymä on $\Delta x = x_2 - x_1 = 4{,}0\text{ m} - 2{,}0\text{ m} = 2{,}0\text{ m}$.

**b)** Nopeus on $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{2{,}0\text{ m}}{1{,}0\text{ s}} = 2{,}0\text{ m/s}$, suunta eteenpäin.

**c)** Kappaleen siirtymä on $\Delta x = x_2 - x_1 = -2{,}0\text{ m} - 4{,}0\text{ m} = -6{,}0\text{ m}$.

**d)** Nopeus on $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-6{,}0\text{ m}}{1{,}0\text{ s}} = -6{,}0\text{ m/s}$: nopeus on 6,0 m/s, suunta taaksepäin.

**e)** Kappaleen siirtymä aikavälillä 0,0…3,0 s on $\Delta x = x_2 - x_1 = (-2{,}0\text{ m}) - (2{,}0\text{ m}) = -4{,}0\text{ m}$.

**1-3.** **a)** Aluksi auto liikkuu eteenpäin 3,0 s ajan vakionopeudella. Tämän jälkeen auto lähtee taaksepäin pienemmällä nopeudella. Hetkellä 10,0 s auto on lähtöpaikassaan. Matka jatkuu vielä tästä taaksepäin, ja lopuksi auton paikka on 6,0 m lähtöpaikasta taaksepäin.

**b)** Kappaleen aikavälillä 0,0…10,0 s kulkema matka on

$s = 6{,}0\text{ m} + 6{,}0\text{ m} = 12\text{ m}$.

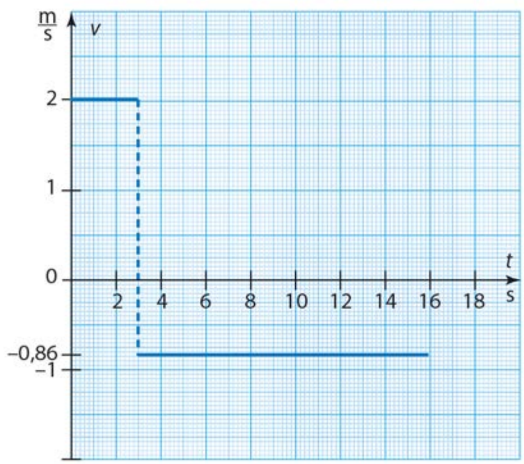
**c)** Nopeudet ovat

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6{,}0 \text{ m} - 0{,}0 \text{ m}}{3{,}0 \text{ s} - 0{,}0 \text{ s}} = \frac{6{,}0 \text{ m}}{3{,}0 \text{ s}} = 2{,}0 \text{ m/s},$$ suunta eteenpäin.

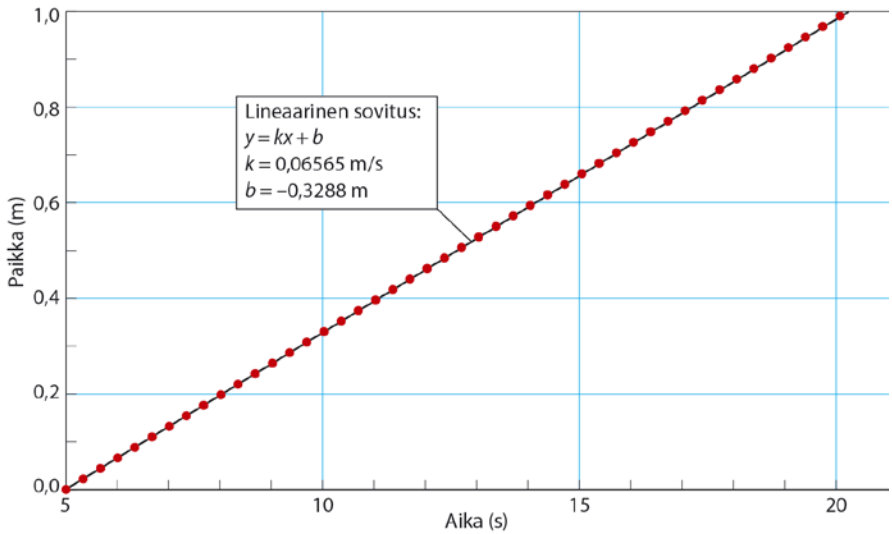
ja

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}0 \text{ m} - 6{,}0 \text{ m}}{10{,}0 \text{ s} - 3{,}0 \text{ s}} = \frac{-6{,}0 \text{ m}}{7{,}0 \text{ s}} \approx -0{,}86 \text{ m/s}:$$ nopeus on 0,86 m/s, suunta taaksepäin.

**d)** Nopeuden kuvaaja:

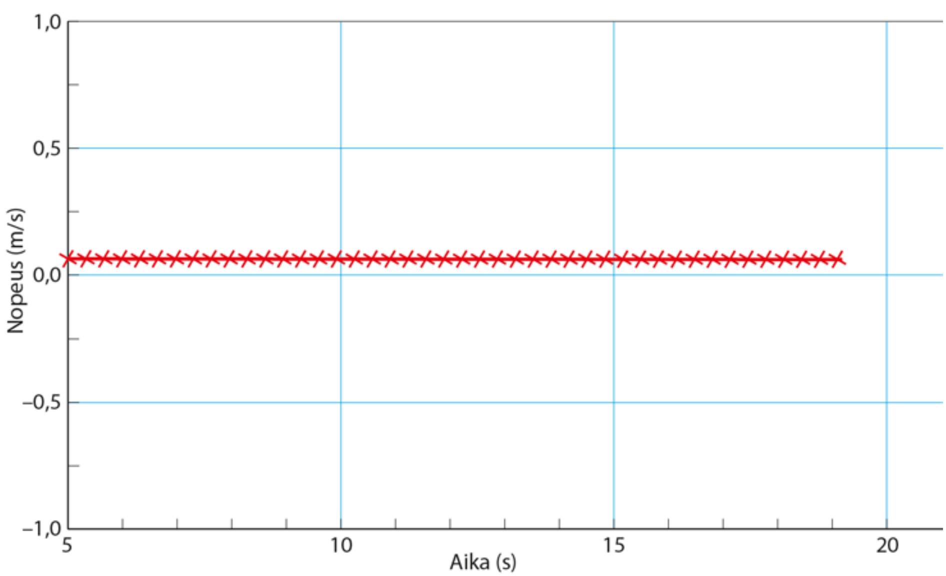


**1-4.** **a)** Paikan kuvaaja:




Suoran fysikaalinen kulmakerroin on kysytty ilmakuplan nopeus eli $v = 6{,}6$ cm/s.

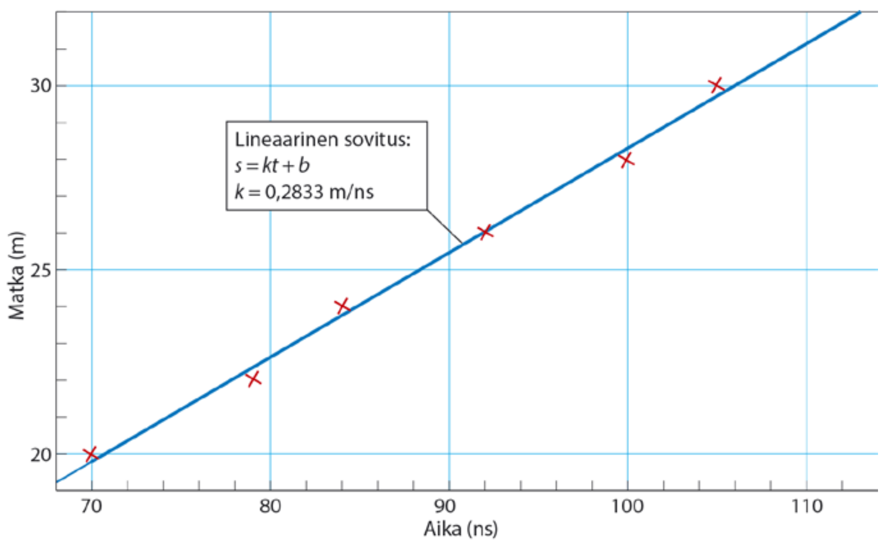
**b)** Nopeuden kuvaaja:



**1-5.** Koska valo heijastuu peilistä takaisin, peilin etäisyys on kerrottava kahdella, jotta saadaan valon kulkema matka.

| $t$ (ns) | $s$ (m) |
|---|---|
| 70 | 20,00 |
| 79 | 22,00 |
| 84 | 24,00 |
| 92 | 26,00 |
| 100 | 28,00 |
| 105 | 30,00 |
| 113 | 32,00 |

Viedään mittausdata mittausohjelmaan.




Suoran fysikaalinen kulmakerroin on kysytty valon nopeus eli $c = 0{,}2833\ \text{m/ns} \approx 2{,}8 \cdot 10^8\ \text{m/s}$.

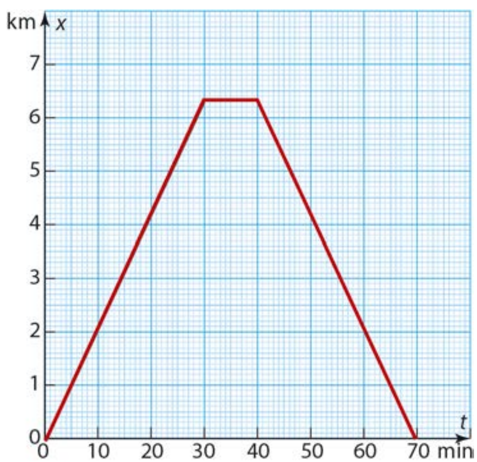
**1-6.** Valitaan liikkeen positiiviseksi suunnaksi liikkeen alkusuunta, paikan nollakohdaksi lähtöpiste (origo) ja ajan nollakohdaksi liikkeelle lähtemisen hetki.

Paikka 30 minuutin kuluttua on

$s = vt = 3{,}5\ \mathrm{m/s} \cdot 1800\ \mathrm{s} = 6300\ \mathrm{m} = 6{,}3\ \mathrm{km}.$

Koska paluumatkalla nopeus on myös 3,5 m/s, paluumatkaan kuluu aikaa 30 min. Kokonaisaika on siis 70 min.

Liike *t*,*x*-koordinaatistossa:




Liike *t*,*v*-koordinaatistossa:

**1-7.** Jääpalan paikka on $x = x_0 + vt = 2{,}3\text{ m} + 1{,}9\text{ m/s} \cdot 4{,}5\text{ s} \approx 11\text{ m}$.

**1-8.** Oikea vaihtoehto on b.

Paikan yhtälöstä $x = x_0 + vt$ nopeus on

$$v = \frac{x - x_0}{t} = \frac{8{,}3\,\text{m} - 0{,}35\,\text{m}}{6{,}1\,\text{s}} \approx 1{,}3\text{ m/s}.$$

**1-9.** Pesäpallon nopeus on 150 km/h ≈ 41,6667 m/s. Reaktioajassa 0,20 s pallo kulkee matkan

$s = vt = 41{,}6667\text{ m/s} \cdot 0{,}20\text{ s} \approx 8{,}3\text{ m}$.

Siepparin tulee olla vähintään noin 8,3 m etäisyydellä lyöjästä ehtiäkseen reagoida palloon.

**1-10.** Ääneltä kuluva aika on $\Delta t_{\text{ääni}} = \dfrac{\Delta x}{v_{\text{ääni}}} = \dfrac{16{,}5\text{ m}}{340\text{ m/s}} \approx 0{,}048529\text{ s}$.

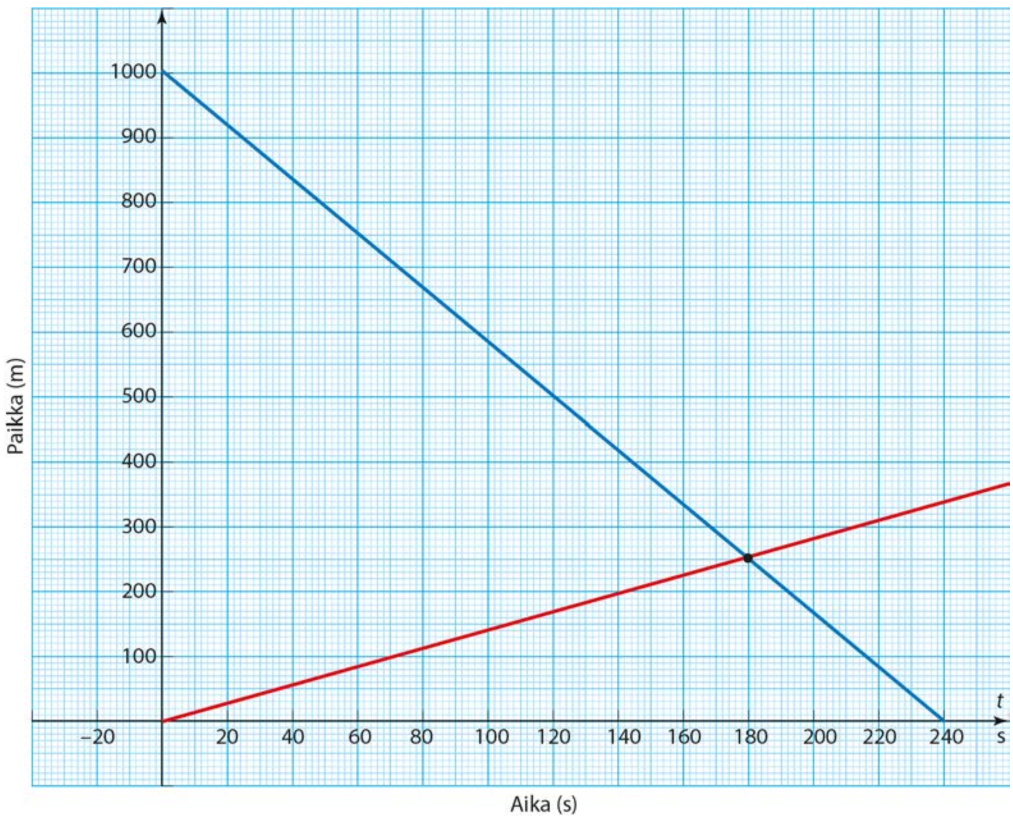
Keilapallon matkaan kuluva aika on

$\Delta t_{\text{kp}} = \Delta t - \Delta t_{\text{ääni}} = 2{,}4\text{ s} - 0{,}048529\text{ s} = 2{,}35147\text{ s}$.

Keilapallon nopeus on $v_{\text{kp}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t_{\text{kp}}} = \dfrac{16{,}5\text{ m}}{2{,}35147\text{ s}} \approx 7{,}0\text{ m/s}$.

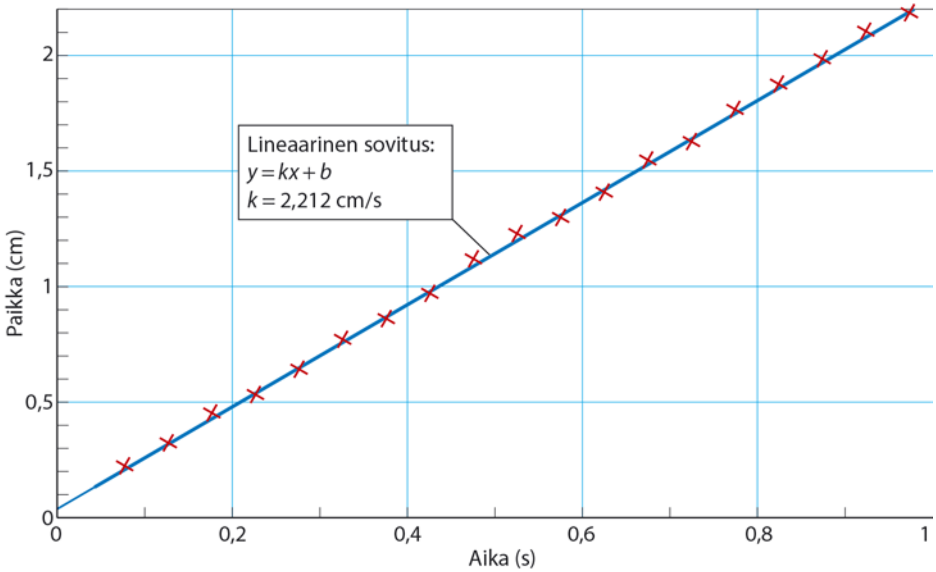
**1-11.** **a)** Valitaan liikkeen positiiviseksi suunnaksi Sinin liikkeen suunta, paikan nollakohdaksi Sinin lähtöpiste ja ajan nollakohdaksi liikkeelle lähtemisen hetki. Tällöin Sinin rata on suora, joka alkaa origosta ja jonka fysikaalinen kulmakerroin on 5,0 km/h ≈ 1,4 m/s.

Jonin rata on suora, joka lähtee pisteestä $(t, x) = (0, 1000\ \text{m})$ ja jonka kulmakerroin on −15 km/h ≈ − 4,2 m/s. Suoran kulmakerroin on negatiivinen, koska Jonin siirtymä $x$ on negatiivinen.




**b)** Kuvasta todetaan, että Sini ja Joni kohtaavat pisteessä $(t,x) \approx (180\ \text{s}, 250\ \text{m})$. Kohtaamispaikka on siis 250 m etäisyydellä Sinin lähtöpisteestä ja aikaa lähdöstä on kulunut 180 s.

**1-12.** Koska kappaleen paikan kuvaaja on suora, kappaleen liike on tasaista.




Kappaleen nopeus oli 2,2 cm/s.

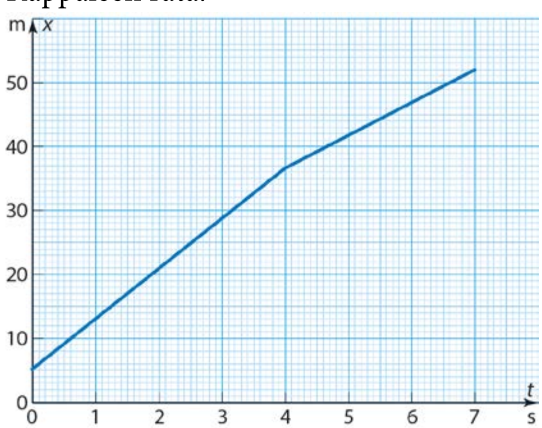
**1-13.** Kappaleen nopeus aikavälillä 0,0…4,0 s on 8,0 m/s ja aikavälillä 4,0…7,0 s on 5,0 m/s. Kappaleen paikka

– hetkellä 0,0 s on $x_0 = 5{,}0$ m

– hetkellä 4,0 s on $x = x_0 + vt = 5{,}0 \text{ m} + 8{,}0 \text{ m/s} \cdot 4{,}0 \text{ s} = 37 \text{ m}$ ja

– hetkellä 7,0 s on $x = x_0 + vt = 37 \text{ m} + 5{,}0 \text{ m/s} \cdot 3{,}0 \text{ s} = 52 \text{ m}$.

Kappaleen rata:



**1-14** **a)** Tasaisessa liikkeessä olevan kappaleen nopeus on

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{5{,}5\,\text{m} - 1{,}5\,\text{m}}{2{,}0\,\text{s} - 0{,}0\,\text{s}} = \frac{4{,}0\,\text{m}}{2{,}0\,\text{s}} = 2{,}0\,\text{m/s}.$$

Kappaleen paikan yhtälö on $x = x_0 + vt$. Koska kappaleen paikka hetkellä $t_0 = 0$ s on $x_0 = 1{,}5$ m ja kappaleen nopeus $v_0 = 2{,}0$ m/s, kappaleen paikan riippuvuus ajasta on $x = 1{,}5\,\text{m} + 2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$.

**b)** Kappaleen nopeus $t,v$-koordinaatistossa:


Kappaleen aikavälillä 0…2,5 s kulkema matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

$\Delta s = v \cdot \Delta t = 2{,}0$ m/s · 2,5 s = 5,0 m.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**2-1.** **a)** Mopoauto on lähtenyt liikkeelle levosta.

Aikavälillä 0,0…6,0 s mopoauton nopeus kasvaa tasaisesti.

Aikavälillä 6,0…10,0 s mopoauto etenee vakionopeudella.

Aikavälillä 10,0…14,0 s mopoauton nopeus pienenee tasaisesti, ja lopuksi mopoauto pysähtyy.

**b)** Aikavälillä 0,0…6,0 s mopoauton kiihtyvyys on

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{12{,}0\,\text{m/s}-0{,}0\,\text{m/s}}{6{,}0\,\text{s}-0{,}0\,\text{s}}=2{,}0\ \text{m/s}^2.$$

Aikavälillä 6,0…10,0 s liike on tasaista, joten kiihtyvyys $a = 0\ \text{m/s}^2$.

Aikavälillä 10,0…14,0 s kiihtyvyys on

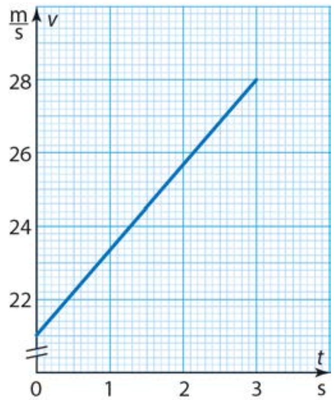
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{0{,}0\,\text{m/s}-12{,}0\,\text{m/s}}{14{,}0\,\text{s}-10{,}0\,\text{s}}=-3{,}0\ \text{m/s}^2:$$ kiihtyvyys on 3,0 $\text{m/s}^2$, kiihtyvyyden suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen.

**c)** Mopoauton 14,0 sekunnin aikana kulkema matka saadaan $t,v$-koordinaatistosta fysikaalisena pinta-alana. Kuvaajan ja $t$-akselin rajaama kuvio on puolisuunnikas. Kuljettu matka on

$$s=\frac{14{,}0\,\text{s}+4{,}0\,\text{s}}{2}\cdot 12{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 110\ \text{m}.$$

**2-2.** **a)** Nopeus alkuhetkellä on 75 km/h ≈ 21 m/s ja 3,0 sekunnin kuluttua 101 km/h ≈ 28 m/s.

Nopeuden kuvaaja:




**b)** Koska liike on tasaisesti kiihtyvää, keskinopeus voidaan laskea alku- ja loppunopeuden keskiarvona:

$$v_{\mathrm{k}} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{75\ \mathrm{km/h} + 101\ \mathrm{km/h}}{2} = 88\ \mathrm{km/h}.$$

**c)** Kappaleen kulkema matka on

$$x = v_{\mathrm{k}} \cdot t = \frac{88}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}0\,\mathrm{s} \approx 73\ \mathrm{m}.$$

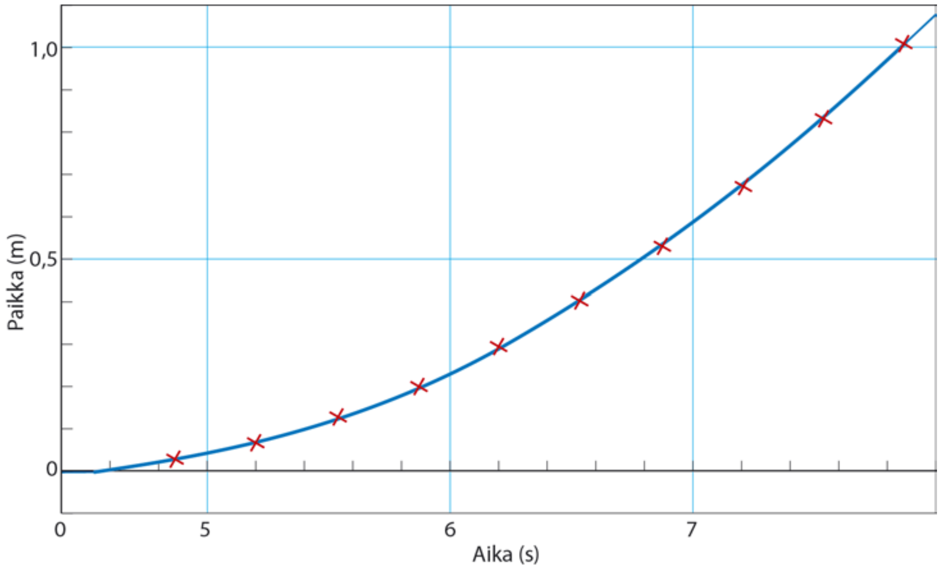
**2-3.** Tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen liittyvät kuvaajat ovat a ja c.

**2-4.** **a)** Moottorikelkan loppunopeus on $v = at = 4{,}0\ \mathrm{m/s^2} \cdot 10{,}0\ \mathrm{s} = 40\ \mathrm{m/s}$.

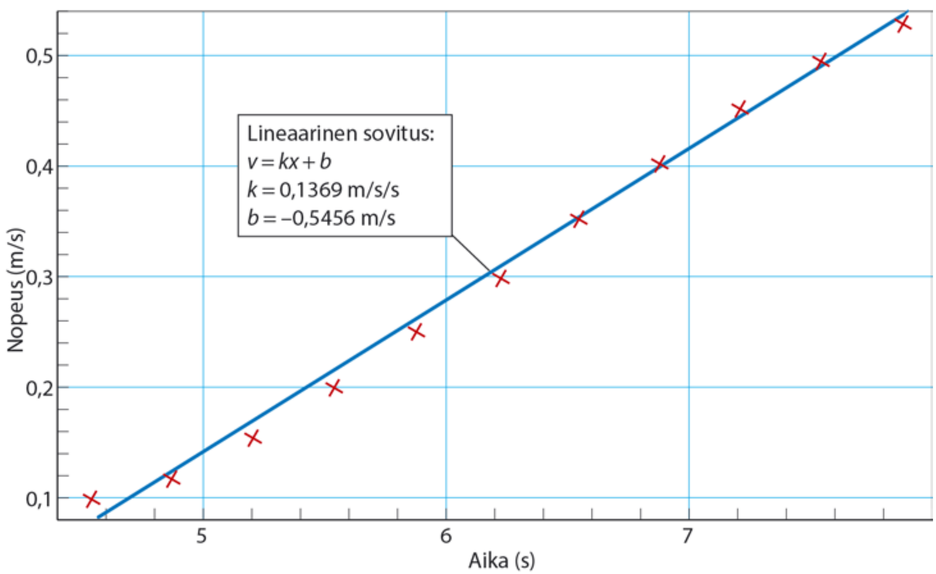
**b)** Kelkan keskinopeus on $v_{\mathrm{k}} = \dfrac{v_0 + v}{2} = \dfrac{0\ \mathrm{m/s} + 40\ \mathrm{m/s}}{2} = 20\ \mathrm{m/s}$.

c) Kelkka kulkee matkan $s = \dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 4{,}0\,\mathrm{m/s^2} \cdot (10{,}0\,\mathrm{s})^2 = 200\ \mathrm{m}$.

**2-5.** Paikan kuvaaja:




Nopeuden kuvaaja:




Kappaleen liike on mittaustarkkuuden rajoissa tasaisesti kiihtyvää. Kiihtyvyys saadaan aika-nopeus-koordinaatistosta fysikaalisena kulmakertoimena; kiihtyvyys on 0,14 m/s$^2$.

**2-6.** **a)** Moottoripyörän kiihtyvyys on

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}0\,\text{s}} = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}0\,\text{s}} = 3{,}33333\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

**b)** Ohituksen aikana pyörä kulkee matkan

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 3{,}33333\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3{,}0\,\text{s})^2 \approx 60\text{ m}.$$

**2-7.** **a)** Kiihtyvyys jarrutuksen aikana on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0\text{ km/h} - 45\text{ km/h}}{4{,}0\text{ s}} = \frac{-\frac{45}{3{,}6}\text{m/s}}{4{,}0\text{ s}} = -3{,}125\text{ m/s}^2 \approx -3{,}1\text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyys on 3,1 m/s$^2$, kiihtyvyyden suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen.

**b)** Jarrutuksen aikana kuljettu matka on

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{45}{3{,}6}\text{m/s} \cdot 4{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-3{,}125\text{ m/s}^2) \cdot (4{,}0\,\text{s})^2 = 25\text{ m}.$$

**c)** Reaktioaikana skootterin kulkema matka on

$$s = vt = \frac{45}{3{,}6}\text{ m/s} \cdot 0{,}50\text{ s} = 6{,}25\text{ m}.$$

Skootterin kulkema matka on 25 m + 6,25 m ≈ 31 m.

**2-8.** **a)** Tilanteessa A jarrupoljinta painetaan ensin kevyesti, mutta painaminen kasvaa jarrutuksen edetessä. Tilanteessa B jarrupoljinta painetaan koko ajan samalla voimakkuudella.

Tilanteessa C jarrupoljinta painetaan ensi hyvin voimakkaasti, mutta jarrutuksen edetessä poljinta löysätään hieman.

**b)** Kuljettu matka saadaan $t, v$-koordinaatistosta fysikaalisena pinta-alana.

Koska käyrän C ja koordinaattiakselien rajaama pinta-ala on pienin, on tämän mallin mukaan myös jarrutusmatka pienin jarrutettaessa mallin C mukaan.

**c)** Jarrutusmatka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3$$
$$= 5{,}0\ \text{m/s} \cdot 0{,}90\ \text{s} + \frac{15{,}0\ \text{m/s} \cdot 0{,}90\,\text{s}}{2} + \frac{5{,}0\ \text{m/s} \cdot 1{,}20\,\text{s}}{2}$$
$$= 14{,}25\ \text{m} \approx 14\ \text{m}.$$

**2-9.** **a)** Sijoitetaan yhtälö $v = v_0 + at$ yhtälöön $\Delta x = v_k t$:

$$\Delta x = v_k t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + at}{2} \cdot t$$
$$= \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right) \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Koska $\Delta x = x - x_0$, saadaan $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

**b)** Yhtälöstä $v = at$ saadaan $t = \frac{v}{a}$, joka sijoitetaan:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}.$$

Yhtälöstä saadaan $2ax = v^2$, josta nopeudeksi saadaan $v = \sqrt{2ax}$.

**c)** Loppunopeus on $v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \cdot 8{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot 15\ \text{m}} \approx 16\ \text{m/s}$.

**2-10.** **a)** Koska hissin kiihtyvyys on vakio, ja hissi lähtee levosta ($v_0 = 0$ m/s), hissin keskinopeus ensimmäisen 5,0 m matkalla on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v}{2}$, jossa $v$ on tällä matkalla saavutettu loppunopeus ja myös hissin nopeus tasaisen liikkeen aikana.

Ensimmäisen 5,0 m matkalla hissin keskinopeus on

$$v_k = \frac{s}{t} = \frac{5{,}0 \text{ m}}{2{,}5 \text{ s}} = 2{,}0 \text{ m/s}.$$

Hissin loppunopeus ensimmäisen osuuden jälkeen eli hissin nopeus tasaisen liikkeen aikana on

$v = 2v_k = 2 \cdot 2{,}0$ m/s $= 4{,}0$ m/s.

**b)** Hissi kulkee 19 kerrosväliä eli matkan 19 · 2,8 m = 53,2 m. Jarrutusmatka on 53,2 m – 5,0 m – 44,0 m = 4,2 m ja tähän kuluva aika

$$t = \frac{s}{v_k} = \frac{4{,}2 \text{ m}}{\frac{4{,}0 \text{ m/s} + 0{,}0 \text{ m/s}}{2}} = 2{,}1 \text{ s}.$$

Koska hissi kulkee 44,0 m vakionopeudella, tähän kuluu aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{44{,}0 \text{ m}}{4{,}0 \text{ m/s}} = 11 \text{ s}.$$

Koko matkaan kuluva aika on 2,5 s + 2,1 s + 11 s ≈ 16 s.

**2-11.** Yhtälöstä $v = at$ kiihdytykseen ja myös jarrutukseen kuluva aika on

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{155}{3{,}6} \text{ m/s}}{1{,}1 \text{ m/s}^2} \approx 39{,}1414 \text{ s}$$

eli kaikkiaan 2 · 39,1414 = 78,2828 s = 1,3047 min.

Tässä ajassa kuljettu matka (kiihdytys ja jarrutus) on

$$s = \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2}at^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}at^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}1 \text{ m/s}^2 \cdot (39{,}1414 \text{ s})^2 \approx 1{,}68525 \text{ km}.$$

Huippunopeudella voidaan ajaa matka

145 km – 1,68525 km ≈ 143,315 km.

Tähän kuluu aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{143{,}315\ \text{km}}{155\ \text{km/h}} \approx 0{,}92461\ \text{h} = 55{,}4768\ \text{min.}$$

Lyhin aika on 55,4768 min + 1,3047 min ≈ 57 min.

**2-12.** **a)** Koska kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, kuulan keskinopeus saadaan yhtälöstä $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$. Koska kuula lähtee levosta, on $v_0 = 0$ m/s ja keskinopeuden yhtälö saadaan muotoon $v_k = \frac{v}{2}$. Kuulan loppunopeudeksi saadaan $v = 2v_k = 2 \cdot 1{,}9$ m/s = 3,8 m/s.

**b)** Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen nopeuden yhtälö on $v = v_0 + at$. Koska alkunopeus on $v_0 = 0$ m/s, loppunopeus on $v = at$, josta saadaan kiihtyvyys $a = \frac{v}{t}$. Jotta kiihtyvyys voidaan laskea, on tiedettävä liikkeen kesto eli aika $t$.

Yhtälöstä $x = v_k t$ saadaan aika $t = \frac{x}{v_k} = \frac{1{,}70\ \text{m}}{1{,}9\ \text{m/s}} \approx 0{,}894737\ \text{s}$.

Kiihtyvyys on $a = \frac{v}{t} = \frac{3{,}8\ \text{m/s}}{0{,}894737\ \text{s}} \approx 4{,}2\ \text{m/s}^2$.

**2-13.** Oikein on b.

Laskijan kulkema matka on $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ eli $\frac{1}{2}at^2 + v_0 t - s = 0$.
Ratkaistaan yhtälö toisen asteen ratkaisukaavaa käyttäen ja huomioidaan alkuarvot $a = 5{,}4$ m/s², $v_0 = 22$ m/s ja $s = 25$ m:

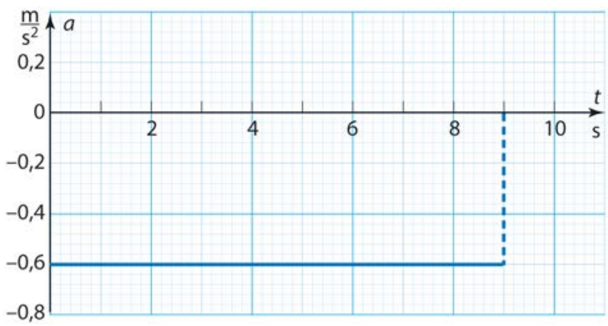
$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot (-s)}}{2 \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{-22\ \text{m/s} \pm \sqrt{(22\ \text{m/s})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5{,}4\ \text{m/s}^2) \cdot (-25\ \text{m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5{,}4\ \text{m/s}^2)}$$

Yhtälön ratkaisut ovat $t_1 \approx 1{,}01094$ s tai $t_2 \approx -9{,}15909$ s. Ajan negatiivinen arvo ei käy, joten kysytty aika on 1,0 s.

**2-14.** **a)** Nopeuden kuvaaja on suora, joten kiihtyvyys on vakio. Kiihtyvyys saadaan kuvaajan fysikaalisena kulmakertoimena:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}0\ \text{m/s} - 3{,}65\ \text{m/s}}{9{,}0\ \text{s} - 3{,}0\ \text{s}} \approx -0{,}61\ \text{m/s}^2.$$

Raitiovaunun kiihtyvyyden kuvaaja:




**b)** Matka saadaan $t,v$ -kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9{,}0\ \text{s} \cdot 5{,}5\ \text{m/s} \approx 25\ \text{m}.$$

(Vaihtoehtoisesti matkan voi laskea yhtälöstä

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 5{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9{,}0\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-0{,}608333\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (9{,}0\ \text{s})^2 \approx 25\ \text{m.})$$

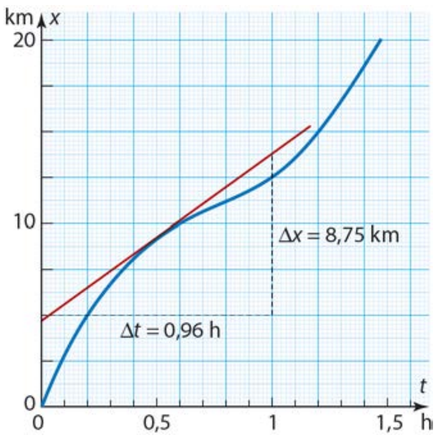
## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**3-1.** **a)** Pyöräilijän paikka hetkellä 0,20 h on 5,0 km ja hetkellä 1,00 h on 12,5 km.

**b)** Pyöräilijän keskinopeus välillä 0,20…1,00 h on

$$v_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12{,}5\ \mathrm{km} - 5{,}0\ \mathrm{km}}{1{,}00\ \mathrm{h} - 0{,}20\ \mathrm{h}} = \frac{7{,}5\ \mathrm{km}}{0{,}80\ \mathrm{h}} \approx 9{,}4\ \mathrm{km/h}.$$

**c)**

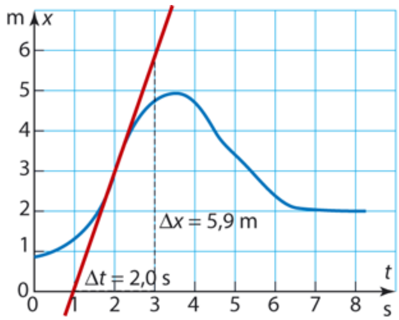



Nopeus hetkellä 0,50 h saadaan tangentin fysikaalisena kulmakertoimena:

$$v(0{,}50\,\mathrm{h}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8{,}75\ \mathrm{km}}{0{,}96\ \mathrm{h}} \approx 9{,}1\ \mathrm{km/h}.$$

**3-2.** **a)** Kappaleen nopeus on suurin hetkellä 2,0 s, koska tällöin kuvaaja on jyrkin.

**b)**

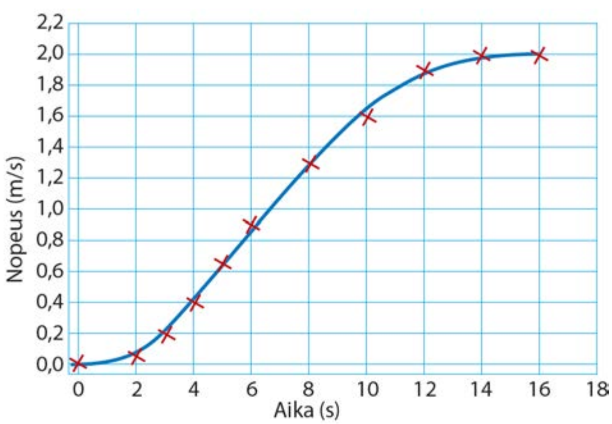



Suurin nopeus on $v(2{,}0\,\text{s}) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{5{,}9\text{ m}}{2{,}0\text{ s}} \approx 3{,}0\text{ m/s}.$

**c)** Kappaleen pienin nopeus on 0 m/s.

**d)** Kappaleen liikkeen suunta muuttuu hetkellä 3,5 s.

**3-3.** **a)** Nopeuden kuvaaja.

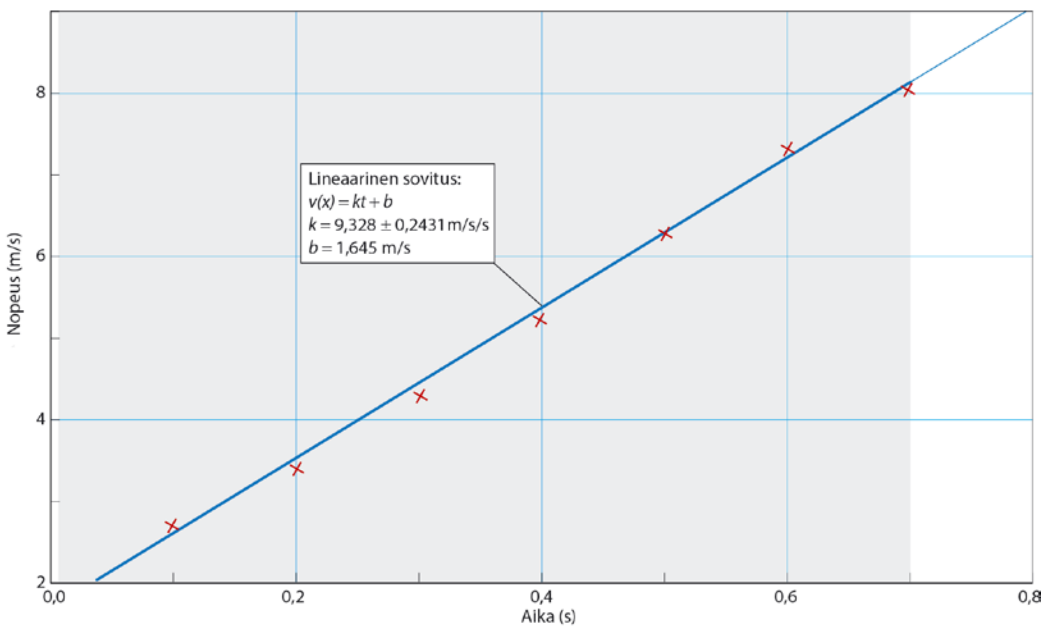


**b)** Mittausohjelman mukaan matka on 18 m.

Matkan voi myös laskea $t,v$-koordinaatistosta graafisen integroinnin avulla. Kuvaajan ja aika-akselin väliin jäävä pinta-ala on 45 ruutua. Kukin ruutu vastaa matkaa 0,20 m/s · 2,0 s = 0,40 m. Kokonaismatka aikavälillä 0…16 s on 45 · 0,40 m = 18 m.

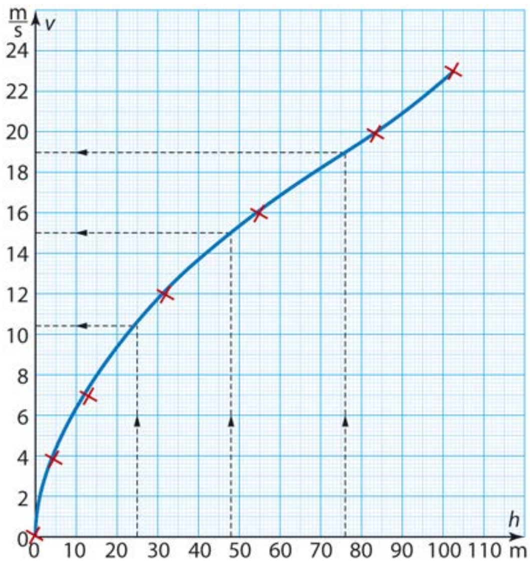
**c)** Keskinopeus saadaan kohdan b avulla jakamalla kokonaismatka siihen kuluneella ajalla: $v_k = \frac{s}{t} = \frac{18\,\text{m}}{16\,\text{s}} \approx 1{,}1$ m/s.

**3-4.** Pallon nopeuden kuvaaja:




Pallon kiihtyvyys on $9{,}3\ \text{m/s}^2 \pm 0{,}2\ \text{m/s}^2$.

**3-5.** **a)** Nopeuden kuvaaja korkeuden funktiona:




**b)** Kun raketin lentokorkeus on 76 m, sen nopeus on 19 m/s.

**c)** Kun raketti on korkeudella 25 m, sen nopeus on 10,5 m/s.

Kun raketti on korkeudella 48 m, sen nopeus on 15,0 m/s.

Raketin keskikiihtyvyys aikavälillä 4,0…6,0 s on

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15{,}0\,\text{m/s} - 10{,}5\ \text{m/s}}{6{,}0\,\text{s} - 4{,}0\,\text{s}} \approx 2{,}3\ \text{m/s}^2.$$

**3-6.** **a)** Kuvaajasta saadaan kappaleiden siirtymät:

$\Delta x_A = 3{,}0\ \text{m} - 0{,}0\ \text{m} = 3{,}0\ \text{m}$ ja

$\Delta x_B = 2{,}0\ \text{m} - 0{,}7\ \text{m} = 1{,}3\ \text{m}$.

Koska kappaleet liikkuvat suoraviivaisesti, kappaleiden kulkemat matkat ovat samat kuin siirtymät.

**b)** Kummallakin kappaleella on sama keskinopeus, koska kummankin aikavälillä 2,0…10,0 s kulkema matka on sama:

$$v_{\mathrm{kA}} = v_{\mathrm{kB}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3{,}8\ \mathrm{m} - 0{,}8\ \mathrm{m}}{10{,}0\ \mathrm{s} - 2{,}0\ \mathrm{s}} \approx 0{,}38\ \mathrm{m/s}.$$

**c)** Kappaleilla on sama nopeus silloin, kun nopeutta kuvaavat käyrien fysikaaliset kulmakertoimet ovat yhtä suuret eli hetkellä $t = 7{,}2$ s.

**3-7.** **a)** Metrojunan suurin nopeus on 36 m/s.

**b)** Junan kiihdytysaika on 45 s.

**c)** Junan jarrutusaika on 30 s.

**d)** Junan liike on tasaista 30 s.

**e)** Junan keskikiihtyvyys pysäkiltä lähdettäessä on

$$a_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{36{,}0\ \mathrm{m/s} - 0{,}0\ \mathrm{m/s}}{45{,}0\ \mathrm{s} - 0{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{36{,}0\ \mathrm{m/s}}{45{,}0\ \mathrm{s}} \approx 0{,}80\ \mathrm{m/s^2}.$$

ja jarrutettaessa ennen seuraavaa pysäkkiä

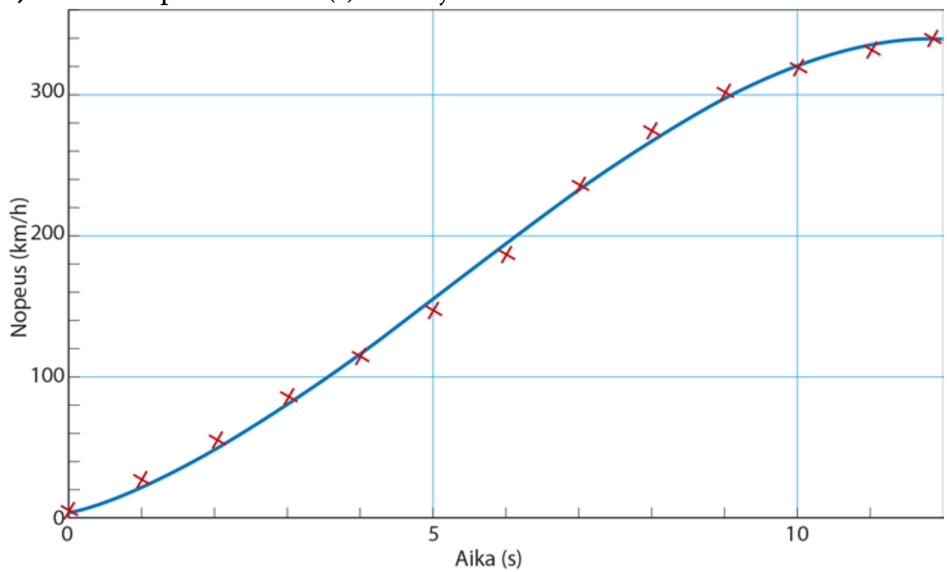
$$a_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}0\ \mathrm{m/s} - 30\ \mathrm{m/s}}{105{,}0\ \mathrm{s} - 75{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{-30\ \mathrm{m/s}}{30{,}0\ \mathrm{s}} = -1{,}2\ \mathrm{m/s^2}:$$

jarrutettaessa kiihtyvyys on 1,0 $\mathrm{m/s^2}$, kiihtyvyyden suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen.

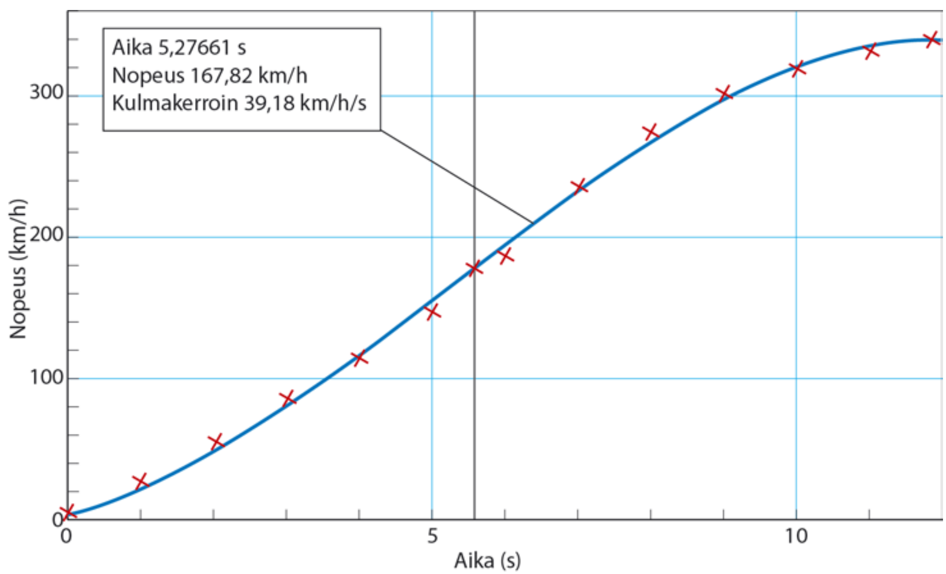
**f)** Metroasemien välinen etäisyys saadaan fysikaalisena pinta-alana:

$$s = \frac{\Delta t_1 v}{2} + \Delta t_2 v + \frac{\Delta t_3 v}{2}$$
$$= \frac{45{,}0\,\mathrm{s} \cdot 36{,}0\,\mathrm{m/s}}{2} + (75{,}0\,\mathrm{s} - 45{,}0\,\mathrm{s}) \cdot 36{,}0\,\mathrm{m/s} + \frac{(105{,}0\,\mathrm{s} - 75{,}0\,\mathrm{s}) \cdot 30{,}0\,\mathrm{m/s}}{2} \approx 2{,}4\ \mathrm{km}.$$

**3-8.** **a)** Auton nopeuden $v = v(t)$ kuvaaja:




**b)** Mittausohjelman mukaan kiihtyvyyden suurin arvo saavutetaan hetkellä $t = 5{,}3$ s.



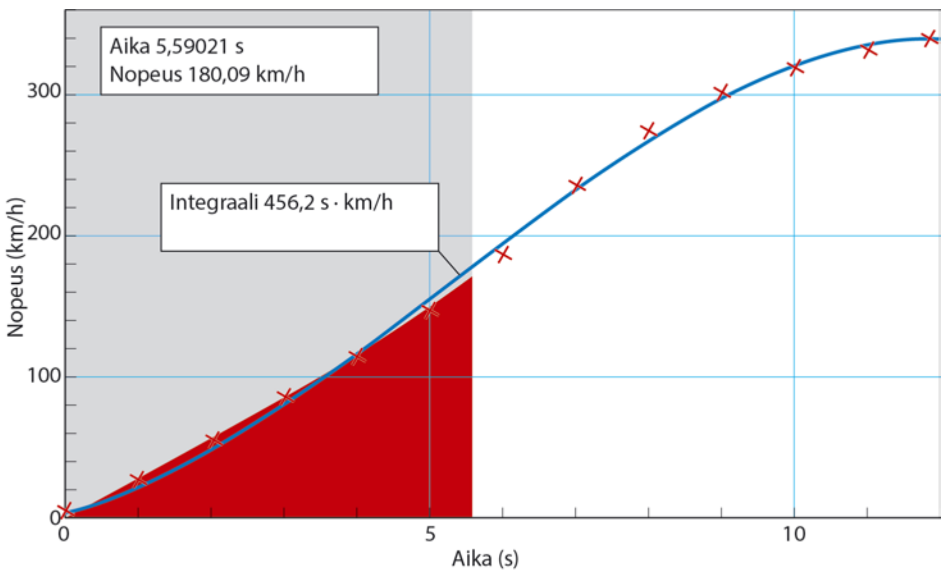
Suurin kiihtyvyys on

$$a_{\max}(5{,}3\,\mathrm{s}) = \frac{39{,}18\ \mathrm{km/h}}{\mathrm{s}} = \frac{\dfrac{39{,}18}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} \approx 11\ \mathrm{m/s^2}.$$

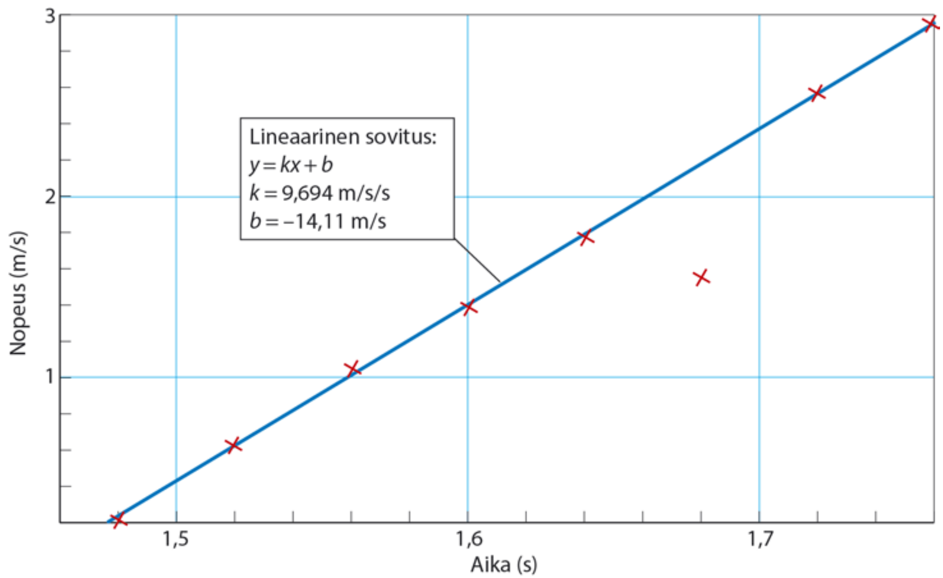
Huomaa, että ajanhetki riippuu hieman siitä, minkälainen käyrä on sovitettu pistejoukkoon.

**c)** Matka saadaan määritettyä *t*, *v*-koordinaatiston kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana. Mittausohjelman mukaan matka on

$$s = 456{,}2\ \mathrm{s \cdot km/h} = \frac{456{,}2}{3{,}6}\ \mathrm{s \cdot m/s} \approx 130\ \mathrm{m}.$$




**3-9.** Esitetään mittaustulokset *t*, *v*-koordinaatistossa. Mittauspisteet näyttäisivät pistettä (1,68 s, 1,57 m/s) lukuun ottamatta asettuvan suoralle; ko. havainto on epäonnistunut eikä mittauspistettä huomioida.




Mittausohjelman mukaan pallon putoamiskiihtyvyys on 9,7 m/s$^2$.

**3-10.** Paketti saa pudotuksessa vaakasuuntaisen alkunopeuden koneelta, joten tilanne vastaa vaakasuoraa heittoliikettä. Paketti putoaa alaspäin 550 m matkan.

Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ paketin putoamiseen kuluva aika on

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 550\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}} = 10{,}5892\ \text{s} \approx 11\ \text{s}.$$

Tänä aikana paketti liikkuu vaakasuunnassa matkan

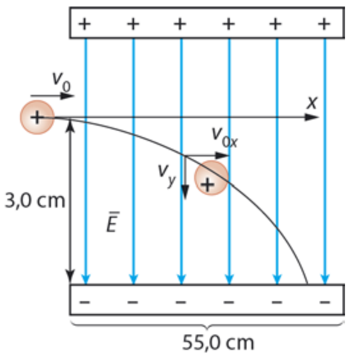
$$s = vt = \frac{198}{3{,}6}\ \text{m/s} \cdot 10{,}5892\ \text{s} = 582{,}406\ \text{m}.$$

Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, paketti tulee pudottaa, kun kone on 580 m:n etäisyydellä kohteesta vaakasuunnassa mitattuna. Tällöin lentäjä näkee kohteen alaviistossa.

Suuntakulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{s}{y} = \frac{582{,}406\ \text{m}}{550\ \text{m}}$,
josta kulma $\alpha \approx 47°$.

Pudotustilanteessa paketti jää ilmanvastuksen vaikutuksesta melko kauaksi kylästä, jos lentäjä ei osaa ottaa huomioon ilmanvastuksen vaikutusta. Paketin vaakasuora alkunopeus on suuri, jolloin ilmanvastus on suuri.

**3-11.** **a)** Protonin rata hahmoteltuna.




**b)** Protoni on pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Protonilla ei ole alkunopeutta pystysuunnassa. Valitaan suunta alas positiiviseksi.

Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}at^2$ aika on

$$t = \sqrt{\frac{2y}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}030\ \text{m}}{1{,}2 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2}} = 7{,}07107 \cdot 10^{-8}\ \text{s} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{s}.$$

**c)** Protonin nopeus vaakasuunnassa on vakio eli $v_{0x} = v_x = 6{,}5$ Mm/s.

Protonin ajassa $t = 7{,}07107 \cdot 10^{-8}$ s vaakasuunnassa kulkema matka on

$x = v_x t = 6{,}5 \cdot 10^6\ \text{m/s} \cdot 7{,}07107 \cdot 10^{-8}\ \text{s} \approx 0{,}46\ \text{m}$.

**d)** Kun protoni osuu negatiiviseen levyyn, sen nopeuden vaakasuora komponentti on $v_x = 6{,}5$ Mm/s. Nopeuden pystysuora komponentti on

$v_y = at = 1{,}2 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2 \cdot 7{,}07107 \cdot 10^{-8}\ \text{s} = 8{,}48528 \cdot 10^5\ \text{m/s}$.

Protonin nopeuden suuruus sen osuessa negatiiviseen levyyn on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(6{,}5 \cdot 10^6\ \text{m/s})^2 + (8{,}48528 \cdot 10^5\ \text{m/s})^2} \approx 6{,}6\ \text{Mm/s}.$$

## TESTAA, OSAATKO S. 35

**1.** a c **2.** a c **3.** c **4.** b **5.** a b **6.** c **7.** b **8.** a b **9.** b c

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**4-1.** **a)** Sauvamagneetin ja Maan välillä vallitsee gravitaatiovuorovaikutus. Maan ja magneetin välillä on magneettinen vuorovaikutus. Kosketusvuorovaikutus on langan ja magneetin välillä. Magneetin ja ilman välillä on kosketusvuorovaikutus.

**b)** Gravitaatiovuorovaikutus: kärryt ja Maa.

Kosketusvuorovaikutus: lattia ja kärryt.

Kosketusvuorovaikutus: työntäjä ja kärry.

Kosketusvuorovaikutus: lattia ja kärryt.

Kosketusvuorovaikutus: kärryt ja ilma.

**c)** Gravitaatiovuorovaikutus: Maa ja pallo.

Sähköinen vuorovaikutus: pallot keskenään.

Kosketusvuorovaikutus: lanka ja pallo.

Kosketusvuorovaikutus: pallo ja ilma.

**4-2.** **a)** Aurinko ja Kuu ovat etävuorovaikutuksessa Maan kanssa. Muutkin taivaankappaleet ovat etävuorovaikutuksessa Maan kanssa, mutta niiden gravitaatiovuorovaikutus on merkittävästi heikompi.

**b)** Kun autoa työnnetään, se on kosketusvuorovaikutuksessa työntäjien ja tienpinnan kanssa ja myös ilman kanssa.

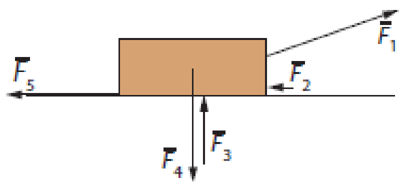
**4-3.** Jousivaakojen lukemat ovat yhtä suuret.

**4-4.** **a)** Lukema on 150 N.

**b)** Lukema on 150 N.

**c)** Koska siima kestää 200 N vetovoiman, siima kestää vedon 150 N voimalla.

**4-5.** **a)** Kappale liikkuu oikealle.




Voimat ovat

$\overline{F}_1 = \overline{F}$ vetävä voima,

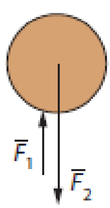
$\overline{F}_2 = \overline{F}_{vast}$ ilmanvastus,

$\overline{F}_3 = \overline{N}$ pinnan tukivoima,

$\overline{F}_4 = \overline{G}$ Maan vetovoima eli kappaleeseen kohdistuva paino ja

$\overline{F}_5 = \overline{F}_\mu$ kitka.

**b)** Pallo putoaa.

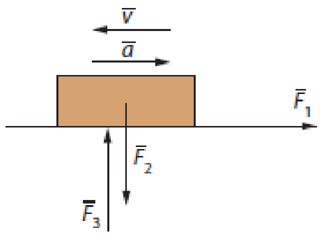



Voimat ovat

$\overline{F}_1 = \overline{F}_i$ ilmanvastus ja

$\overline{F}_2 = \overline{G}$ Maan vetovoima eli kappaleeseen kohdistuva paino.

**c)** Kappale on hidastuvassa liikkeessä vasemmalle.




Voimat ovat

$\overline{F}_1 = \overline{F}_\mu$ kitka,

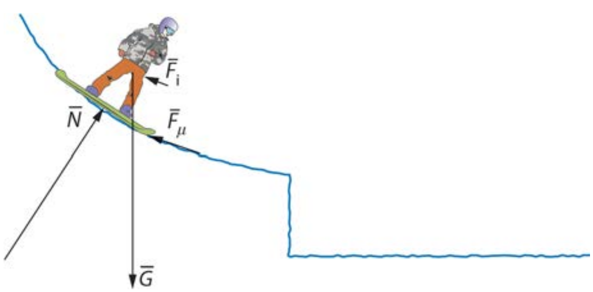
$\overline{F}_2 = \overline{G}$ Maan vetovoima eli kappaleeseen kohdistuva paino ja

$\overline{F}_3 = \overline{N}$ pinnan tukivoima.

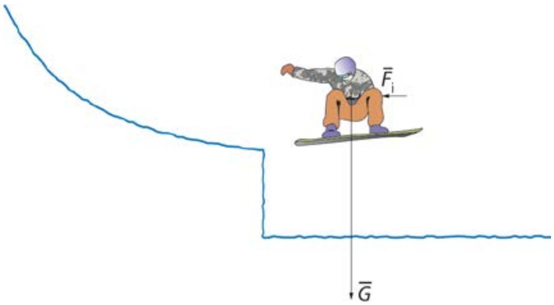
**4-6.** **a)** Jannika on kosketusvuorovaikutuksessa köyden, seinän ja ilman kanssa sekä etävuorovaikutuksessa Maan kanssa.

Kun Jannika laskeutuu köyden varassa pitkin seinää, häneen kohdistuu paino, köyden jännitysvoima, seinän tukivoima, seinän kitka, (ilman hyvin pieni noste) ja mahdollisesta tuulesta johtuva ilmanvastus.

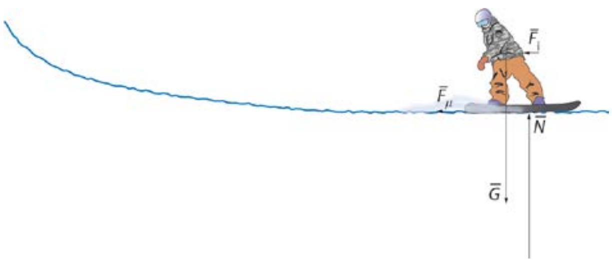
**b)** Ennen hyppyriä lumilautailijaan kohdistuvat paino $\overline{G}$, rinteen tukivoima $\overline{N}$, ilmanvastus $\overline{F}_\text{i}$ ja kitka $\overline{F}_\mu$ laudan ja lumen välillä.



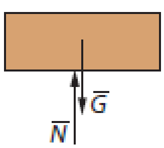
Kun lautailija on ilmassa, häneen kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja ilman vastus $\overline{F}_{\text{i}}$ (ja häviävän pieni noste).



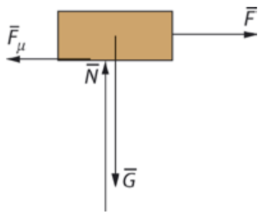

Hypyn jälkeen, kun lautailija on taas maassa, häneen kohdistuvat paino $\overline{G}$, pinnan (rinteen) tukivoima $\overline{N}$, ilmanvastus $\overline{F}_{\text{i}}$ ja kitka $\overline{F}_{\mu}$.



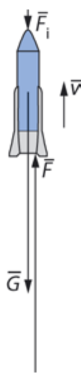

**4-7.** **a)** Kirjaan vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$ ja pinnan tukivoima $\overline{N}$.



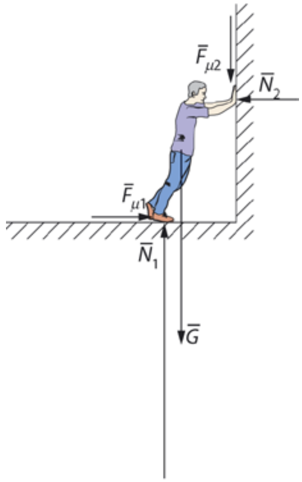
**b)** Pulkkaan vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$, jään pinnan tukivoima $\overline{N}$, liikettä vastustavat kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja vetävä voima $\overline{F}$.



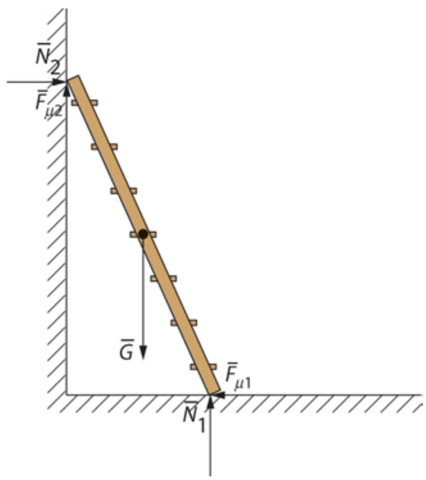

**c)** Vakionopeudella ylöspäin nousevaan rakettiin vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$, joiden summa on yhtä suuri kuin ylös suuntautuva voima $\overline{F}$, joka syntyy purkautuvien palamiskaasujen rakettiin aiheuttamasta voimasta.




**d)** Seinää työntävään henkilöön vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$, lattian ja seinän tukivoimat $\overline{N}_1$ ja $\overline{N}_2$, kitka $\overline{F}_{\mu 2}$seinäpinnassa sekä jalkojen ja lattian välinen kitka $\overline{F}_{\mu 1}$.



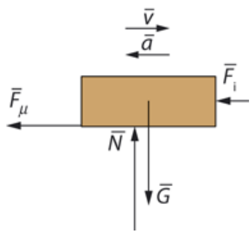

**e)** Tikapuihin vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$, lattian ja seinän tukivoimat $\overline{N}_1$ ja $\overline{N}_2$, kitka $\overline{F}_{\mu 2}$ seinäpinnassa sekä tikkaiden alapään ja lattian välinen kitka $\overline{F}_{\mu 1}$.




**4-8.** **a)** Kiekko on kosketusvuorovaikutuksessa jään pinnan ja ilman kanssa sekä etävuorovaikutuksessa Maan kanssa.

**b)** Voimat ovat kiekkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, alustan tukivoima $\overline{N}$, kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$, jonka merkitys on hyvin vähäinen.

**c)** Voimakuvio:




**d)** Painon $\overline{G}$ vastavoima on voima, jolla kiekko vetää Maata.

Tukivoiman $\overline{N}$ vastavoima on voima, jolla kiekko painaa jäätä.

Kitkan $\overline{F}_\mu$ vastavoima on voima, jolla kiekko vaikuttaa jään pintaan.

Ilmanvastuksen $\overline{F}_\text{i}$ vastavoima on voima, jolla kiekko vaikuttaa ilmaan.

**4-9.** Havaitsemissasi ilmiöissä kyse ei ole voimista vaan siitä, että massasi vastustaa liikkeesi muuttumista, kun bussin liike muuttuu. Kaikki havaitsemasi ilmiöt johtuvat massan hitaudesta.

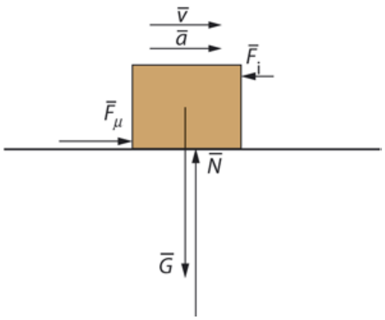
**4-10.** **a)** Voimat $\overline{F}_3$ ja $\overline{F}_4$ eivät ole voima ja vastavoima, koska ne vaikuttavat samaan kappaleeseen (lamppuun).

**b)** Voiman $\overline{F}_2$ vastavoima on $\overline{F}_3$.

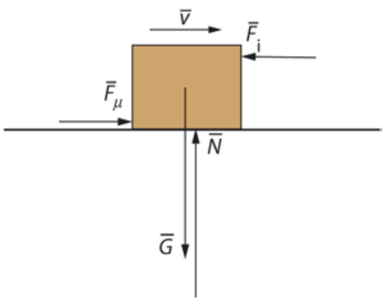
**c)** Voiman $\overline{F}_6$ vastavoima on voima, jolla lamppu vetää Maata.

**d)** Voima $\overline{F}_5$ on tukivoima, jolla naru estää lampun putoamisen. Voima $\overline{F}_6$ on voima, jolla Maa vetää lamppua.

**4-11.** **a)** Auton nopeus kasvaa. Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, lavan tukivoima $\overline{N}$, kitka $\overline{F}_\mu$ liikkeen suuntaan ja liikesuunnalle vastakkainen ilmanvastus $\overline{F}_\text{i}$.

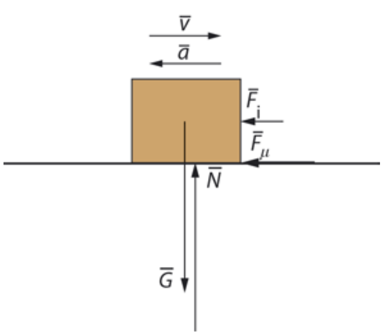



**b)** Auto liikkuu vakionopeudella. Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, lavan tukivoima $\overline{N}$ sekä kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$, jotka ovat yhtä suuria keskenään.

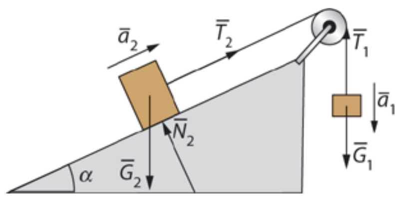



**c)** Auton nopeus pienenee.

Vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, lavan tukivoima $\overline{N}$, kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$. Kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$ ovat liikkeen suunnalle vastakkaiset.



**4-12.** Voimakuvio:



## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**5-1.** **a)** A. Valitaan suunta vasemmalle positiiviseksi.

Alustan suuntainen kokonaisvoima on $\Sigma F = 19\ \text{N} + 17\ \text{N} - 16\ \text{N} = 20\ \text{N}$ vasemmalle.

B. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.

Alustan suuntainen kokonaisvoima on $\Sigma F = 27\ \text{N} - 27\ \text{N} = 0\ \text{N}$.

**b)** Kappaleiden kiihtyvyydet:

A. Newtonin II lain mukaan kiihtyvyys on $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{20\ \text{N}}{2{,}5\ \text{kg}} = 8{,}0\ \text{m/s}^2$ vasemmalle.

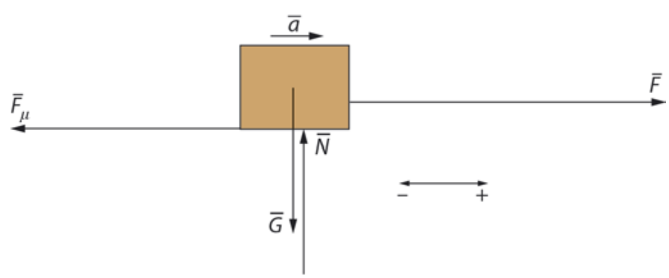
B. Kiihtyvyys on $0\ \text{m/s}^2$.

**5-2.** **a)** Valitaan suunta alas positiiviseksi.

Kiihtyvyyden suuruus on $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{55\ \text{N} - 6{,}5\ \text{N}}{5{,}6\ \text{kg}} \approx 8{,}7\ \text{m/s}^2$, suunta alas.

**b)** Palloon vaikuttava kokonaisvoima on 0 N. Pallon kiihtyvyys on $0\ \text{m/s}^2$.

**5-3.** **a)** Voimakuvio:

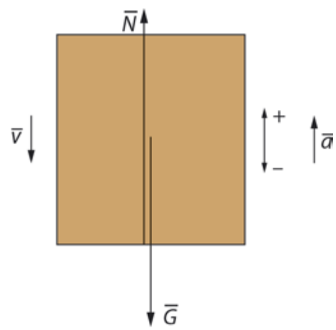



**b)** Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, kokonaisvoima on $\Sigma F = 755\ \text{N} - 620\ \text{N} = 135\ \text{N}$.

c) Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_{\mu} = m\overline{a}$. Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_{\mu} = ma$.

Kiihtyvyys on $a = \dfrac{F - F_{\mu}}{m} = \dfrac{755\ \text{N} - 620\ \text{N}}{35\ \text{kg}} \approx 3{,}9\ \text{m/s}^2$.

**5-4.** Koska hissi liikkuu alas ja vaa'an lukema on suurempi kuin henkilön massa, hissin kiihtyvyys on ylös.




Newtonin II lakia soveltaen yhtälö $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Voiman ja vastavoiman lain mukaan vaa'an tukivoima $\overline{N}$ vaikuttaa abiturienttiin yhtä suurella voimalla kuin abiturientti hissi lattiaan.

Skalaariyhtälöstä $N - mg = ma$ hissin kiihtyvyyden suuruus on

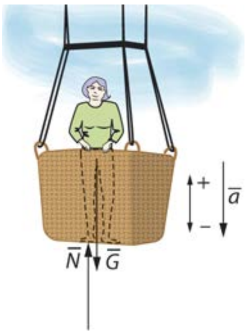
$$a = \frac{N - mg}{m} = \frac{73{,}4\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 62{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{62{,}0\ \text{kg}} \approx 1{,}8\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on ylös.

Kokonaisvoiman ja kiihtyvyyden suunta on liikkeelle vastakkainen, koska hissi on hidastuvassa liikkeessä alas (eli hissi on pysähtymässä).

**5-5.** **a)** Elsaan kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja korin pohjan tukivoima $\overline{N}$.

**b)** Korin pohjaan kohdistuvaa voimaa emme pysty laskemaan. Voiman ja vastavoiman lain mukaan tukivoima $\overline{N}$ vaikuttaa Elsaan yhtä suurella voimalla kuin Elsa vaikuttaa korin pohjaan. Tukivoima $\overline{N}$ voidaan laskea.




Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $N - mg = -ma$ saadaan tukivoiman suuruudeksi

$N = mg - ma = m(g - a) = 55\ \text{kg} \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 - 1{,}5\ \text{m/s}^2) \approx 460\ \text{N}$.

Elsa painaa korin pohjaa 460 N:n suuruisella voimalla.

**5-6.** Elementin kiihtyvyys $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ on vakio kaikilla alla olevilla aikaväleillä. Kiihtyvyyksien suuruudet saadaan kuvaajasta fysikaalisena

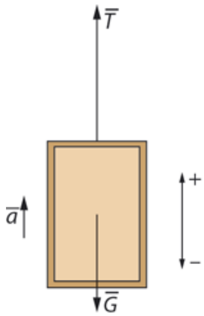
kulmakertoimena:

0,0…4,0 s: $a_1 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{1{,}5\ \text{m/s} - 0{,}0\ \text{m/s}}{4{,}0\ \text{s}} = 0{,}375\ \text{m/s}^2$.

4,0…10,0 s: $a_2 = 0\ \text{m/s}^2$ (liike on tasaista)

10,0…12,0 s: $a_3 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0{,}0\ \text{m/s} - 1{,}5\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{s}} = -0{,}75\ \text{m/s}^2$.

Newtonin II lain seurauksena yhtälö $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon
$\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$.




Sovitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $T - mg = ma$ kannatinvaijeria jännittävä voima on

$T = mg + mg$.

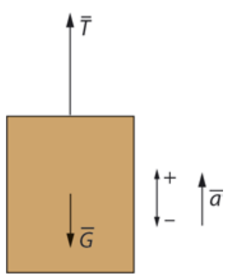
Kiihtyvyyksiä vastaavat jännitysvoimat ovat

$T_1 = ma_1 + mg = m(a_1 + g) = 480\ \text{kg} \cdot (0{,}375\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 4{,}9\ \text{kN}$,

$T_2 = mg = 480\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 4{,}7\ \text{kN}$ ja

$T_3 = ma_3 + mg = m(a_3 + g) = 480\ \text{kg} \cdot (-0{,}75\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 4{,}3\ \text{kN}$.

**5-7.** **a)**

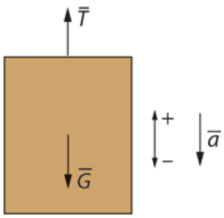



Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$, jossa $\overline{T}$ on vaijerin jännitysvoima. Valitaan hissin liikesuunta eli suunta ylös positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $T - G = ma$ saadaan vaijerin jännitysvoimaksi

$T = ma + G = ma + mg = m(a + g) = 850\ \text{kg} \cdot (2{,}4\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 10\ \text{kN}.$

**b)**

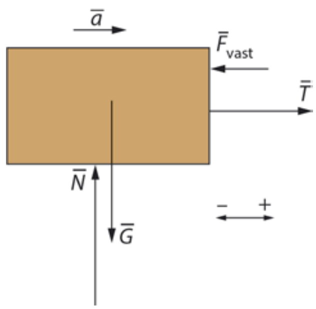



Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$. Nyt liike on hidastuvaa eli kiihtyvyyden suunta on liikkeen suunnalle vastainen eli alas. Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $T - G = -ma$ saadaan vaijerin jännitysvoimaksi

$T = -ma + mg = m(-a + g) = 850\ \text{kg} \cdot (-2{,}4\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 6{,}3\ \text{kN}.$

(Huomaa: Tiukalla olevan langan päihin vaikuttavat yhtä suuret, ulospäin suuntautuvat voimat. Newtonin III lain mukaan naru vaikuttaa sitä kiristäviin kappaleisiin vastaavilla vastavoimilla (ne on piirretty kuviin). Narussa on kaikkialla **sama jännitys** (jos narun omaa painoa ei huomioida). Se **ei ole voima** vaan skalaarisuure, jonka suuruus on sama kuin narun päihin vaikuttava, narua kiristävä voima. **Jännitysvoimia ovat narun päihin vaikuttavat voimat.**)

**5-8.** Oikein on kohta c) 720 N.
Perävaunun voimakuvio:



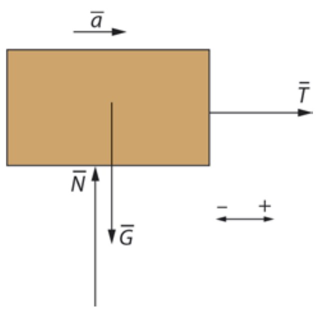

Newtonin II lain mukaan on $\sum\bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{T} + \bar{F}_{\text{vast}} + \bar{N} + \bar{G} = m\bar{a}$ .
Tienpinnan suhteen on $\sum\bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{T} + \bar{F}_{\text{vast}} = m\bar{a}$ . Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälöstä $T - F_{\text{vast}} = m_{\text{p}}a$ saadaan voiman suuruudeksi

$$T = F_{\text{vast}} + m_{\text{p}}a = 190\text{ N} + 1050\text{ kg} \cdot 0{,}50\text{ m/s}^2 \approx 720\text{ N}.$$

**5-9.** Sovitaan liikkeen suunta oikealle positiiviseksi. Newtonin II lain mukaan kelkan ja reen kiihtyvyys on

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{250\text{ N}}{8{,}5\text{ kg} + 65\text{ kg}} \approx 3{,}40136\text{ m/s}^2$$ , suunta liikkeen suunta.

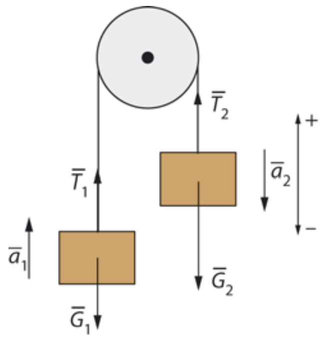
Pulkan voimakuvio:



Koska pulkan kiihtyvyys on sama kuin reen, Newtonin II lain mukaan on $\sum\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$ . Alustan suhteen on $\sum\overline{F} = m_1\overline{a}$ eli $\overline{T} = m_1\overline{a}$ .

Narussa vaikuttavan jännitysvoiman suuruus on
$T = m_1 a = 8{,}5\ \text{kg} \cdot 3{,}40136\ \text{m/s}^2 \approx 29\ \text{N}.$

**5-10.** **a)**




Kirjoitetaan liikeyhtälöt erikseen kummallekin kappaleelle. Koska venymättömän langan jännitysvoima on langan molemmissa päissä yhtä suuri, on $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$ . Kappaleilla on sama kiihtyvyyden suuruus, koska ne liikkuvat yhdessä: $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$ .

Kappale $m_1$: Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m_1\overline{a}_1$ eli $\overline{T}_1 + \overline{G}_1 = m_1\overline{a}_1$ .
Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$T - G_1 = m_1 a_1$ eli $T - m_1 g = m_1 a_1$.

Kappale $m_2$: Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m_2\overline{a}_2$ eli $\overline{T}_2 + \overline{G}_2 = m_2\overline{a}_2$ .
Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$T - G_2 = -m_2 a_2$ eli $T - m_2 g = -m_2 a_2$.

Saadaan yhtälöpari:

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$T - m_2 g = -m_2 a.$$

Kerrotaan alempi yhtälö luvulla –1 ja lasketaan yhtälöt yhteen (eli vähennetään puolittain ylemmästä yhtälöstä alempi). Näin saadaan yhtälö $g(m_2 - m_1) = (m_2 + m_1)a$, josta kiihtyvyys on

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{2{,}0\ \text{kg}}{16{,}0\ \text{kg}} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1{,}22625\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}2\ \text{m/s}^2 .$$

Koska kiihtyvyyden arvo on positiivinen, kappaleen 1 kiihtyvyys on ylös ja kappaleen 2 vastaavasti alas kuten tilanteesta on muutenkin pääteltävissä.

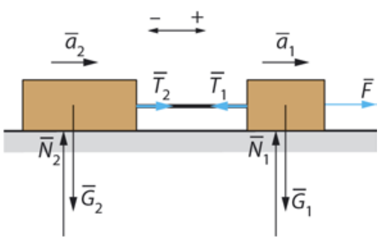
Langan jännitysvoiman suuruus on

$$T = m_1 a + m_1 g = m_1(a + g) = 7{,}0\ \text{kg} \cdot (1{,}22625\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 77\ \text{N}.$$

b) Kappale $m_2$ törmää lattiaan nopeudella

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 1{,}22625\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}0\ \text{m}} \approx 1{,}6\ \text{m/s} .$$

**5-11.** Piirretään voimakuvio.




Newtonin II lain mukaan on

kappaleelle 1 $\bar{F} + \bar{T}_1 + \bar{G}_1 + \bar{N}_1 = m_1\bar{a}_1$ ja

kappaleelle 2 $\bar{T}_2 + \bar{N}_2 + \bar{G}_2 = m_2\bar{a}_2$ .

Koska liike tapahtuu vaakasuunnassa ja pystysuunnassa voimat kumoavat toisensa, pystysuuntaa ei tarvitse tarkastella.

Koska langan jännitys on jokaisessa kohdassa yhtä suuri, niin $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = T$ . Koska kappaleet liikkuvat venymättömän langan takia yhdessä, kummankin kiihtyvyyden suuruus on yhtä suuri eli $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$. Kappaleita voidaan tarkastella erillisinä systeemeinä.

Kun suunta oikealle on positiivinen, saadaan skalaariyhtälöt

kappaleelle 1: $F - T = m_1a$

kappaleelle 2: $T = m_2a$.

Sijoitetaan yhtälö $T = m_2a$ yhtälöön $F - T = m_1a$, jolloin saadaan

$F - m_2a = m_1a$ eli $F = (m_1 + m_2)a$.

**a)** Koska kappaleiden välissä on venymätön lanka, voima $F$ antaa kiihtyvyyden $a$ koko systeemille, jolloin kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{8{,}5\,\mathrm{N}}{0{,}23\ \mathrm{kg} + 0{,}33\ \mathrm{kg}} = 15{,}1786\ \mathrm{m/s^2} \approx 15\ \mathrm{m/s^2}.$$

Kiihtyvyyden suunta on oikealle.

**b)** Langan jännitysvoiman suuruus on

$T = m_2a = 0{,}33\ \mathrm{kg} \cdot 15{,}1786\ \mathrm{m/s^2} \approx 5{,}0\ \mathrm{N}$.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**6-1.** Voimien resultantin suuruus on $F=\sqrt{(36\ \mathrm{N})^2+(17\ \mathrm{N})^2}\approx 39{,}8121\ \mathrm{N}$.

Kappaleen kiihtyvyyden suuruus saadaan yhtälöstä $F=ma$:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{39{,}8121\ \mathrm{N}}{25\ \mathrm{kg}}\approx 1{,}6\ \mathrm{m/s^2}.$$

Kiihtyvyyden suunta on sama kuin resultantin suunta: $\tan\alpha=\frac{17\ \mathrm{N}}{36\ \mathrm{N}}$,

josta kulma $\alpha\approx 25°$ vaakasuunnasta vinosti vasemmalle ylös.

**6-2.** Voimien akselien suuntaiset komponentit ovat

$F_{1x}=1{,}0$ N ja $F_{1y}=2{,}0$ N,

$F_{2x}=-1{,}0$ N ja $F_{2y}=2{,}0$ N,

$F_{3x}=-2{,}0$ N ja $F_{3y}=-3{,}0$ N.

Voimien summa

$x$-suunnassa on $\sum F_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=1{,}0\ \mathrm{N}+(-1{,}0\ \mathrm{N})+(-2{,}0\ \mathrm{N})=-2{,}0\ \mathrm{N}$
ja $y$-suunnassa $\sum F_y=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=2{,}0\ \mathrm{N}+2{,}0\ \mathrm{N}+(-3{,}0\ \mathrm{N})=1{,}0\ \mathrm{N}$.

Voimien resultantin suuruus on

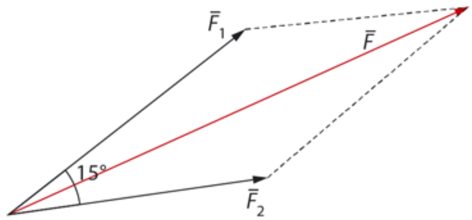
$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{(-2{,}0\ \mathrm{N})^2+(1{,}0\ \mathrm{N})^2}\approx 2{,}23607\ \mathrm{N},$$

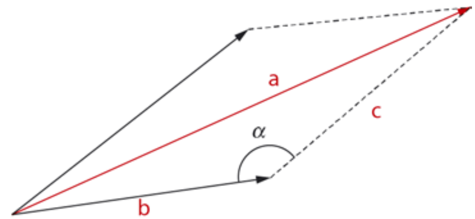
ja suunta saadaan yhtälöstä $\tan\alpha=\frac{F_y}{F_x}=\left|\frac{1{,}0\ \mathrm{N}}{-2{,}0\ \mathrm{N}}\right|$, josta kulma $\alpha\approx 27°$

osoittaa vinosti vasemmalle ylös.

Kappaleen kiihtyvyyden suuruus on $a=\frac{F}{m}=\frac{2{,}23607\ \mathrm{N}}{0{,}50\ \mathrm{kg}}\approx 4{,}5\ \mathrm{m/s^2}$, ja kiihtyvyyden suunta on sama kuin resultantin suunta.

**6-3.** Piirretään kuva tilanteesta:




Graafinen ratkaisu:

Päätä mittakaava, esimerkiksi 1 cm vastaa 50 newtonia: tällöin 350 N:n voimavektorin pituus on 7,0 cm ja 250 N:n voimavektorin pituus 5,0 cm.

Piirrä voimavektorit oikeisiin pituuksiinsa ja niiden väliseksi kulmaksi 15 astetta.

Täydennä kuvio suunnikkaaksi.

Mittaa suunnikkaan lävistäjän pituus ja muuta se vastaamaan newtoneja.

Laskemalla:

$F_1 = 350$ N ja $F_2 = 250$ N.

Sovelletaan kosinilausetta $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos\alpha$, josta

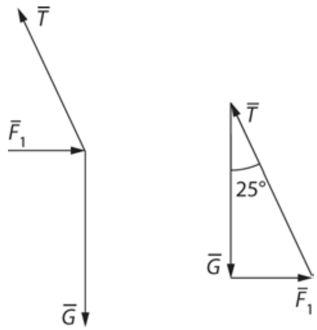
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2b\cos\alpha}$ .

Nyt kulma on $\alpha = \dfrac{360° - 2 \cdot 15°}{2} = 165°$. Resultantin suuruus on

$F = \sqrt{(250\text{ N})^2 + (350\text{ N})^2 - 2 \cdot 250\text{ N} \cdot 350\text{ N} \cdot \cos 165°} \approx 600$ N.

**6-4.** Oikea vaihtoehto b) 550 N.

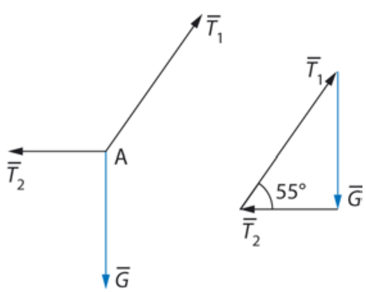
Tasapainotilanteessa voimien summa on Newtonin II lain mukaan nolla eli $\sum \overline{F} = \overline{0}$ .




Voimakuvion mukaan on $\tan 25° = \dfrac{F_1}{G}$, josta kysytty vaakasuoran voiman suuruus on

$F_1 = G \tan 25° = 120 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 25° \approx 550 \text{ N}.$

**6-5.** Nailonsiiman ja lampun johdon liitoskohtaan A vaikuttaa kolme voimaa: nailonsiiman jännitysvoima, lamppuun kohdistuva paino sekä sähköjohdon jännitysvoima.



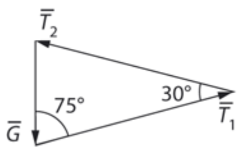

Liitoskohtaan vaikuttava kokonaisvoima on Newtonin II lain mukaan nolla, koska voimien vektorisummana muodostuu nollavektori eli $\Sigma\overline{F} = \overline{T}_2 + \overline{T}_1 + \overline{G} = \overline{0}$ .

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö $\tan 55° = \dfrac{G}{T_2} = \dfrac{mg}{T_2}$, josta saadaan nailonsiiman jännitysvoiman suuruudeksi

$$T_2 = \frac{mg}{\tan 55°} = \frac{7{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\tan 55°} \approx 52\ \text{N}.$$

Se on suurempi kuin nailonsiiman suurin vetolujuus 40 N. Siima ei siis kestää.

**6-6.** Symmetrian perusteella $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T = 12\,\text{kN}$.




Koska Newtonin II lain mukaan tasapainotilanteessa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$, sinilausetta soveltaen saadaan yhtälö

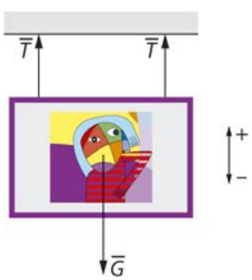
$$\frac{G}{\sin 30°} = \frac{T}{\sin 75°} \text{ eli } \frac{mg}{\sin 30°} = \frac{12\ \text{kN}}{\sin 75°},$$

josta saadaan massan suuruudeksi

$$m = \frac{12\ \text{kN} \cdot \sin 30°}{g \cdot \sin 75°} = \frac{12\ \text{kN} \cdot \sin 30°}{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 75°} \approx 630\ \text{kg}.$$

**6-7.**

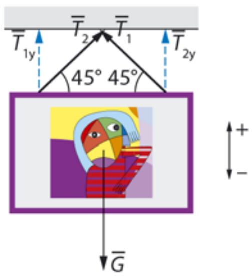
Vasemmanpuoleinen taulu:



Koska taulu pysyy seinällä, Newtonin II lain mukaan on voimassa ehto $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T} + \overline{T} + \overline{G} = \overline{0}$. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $2T - G = 0$ saadaan langan jännitysvoiman suuruudeksi

$$T = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{6{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} \approx 31\ \text{N}.$$

Oikeanpuoleinen taulu:



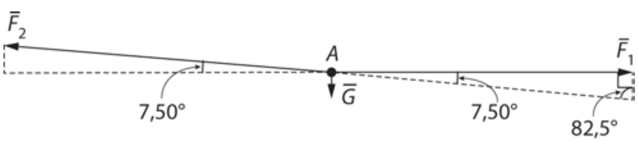

Koska taulu pysyy seinällä, Newtonin II lain mukaan on voimassa ehto $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T}_{1y} + \overline{T}_{2y} + \overline{G} = \overline{0}$ ja symmetriasta johtuen $|\overline{T}_{1y}| = |\overline{T}_{2y}| = T_y$. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $2T_y - G = 0$ eli saadaan

$2 \cdot T\cos\alpha - mg = 0$ langan jännitysvoiman suuruudeksi

$$T = \frac{mg}{2\cos\alpha} = \frac{6{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2 \cdot \cos 45°} \approx 44\ \text{N}.$$

Jännitysvoimat ovat suuremmat oikeanpuoleisessa taulussa.

**6-8.**




Voiman $F_1$ suuruus: $\tan 7{,}50° = \dfrac{G}{F_1}$, josta

$$F_1 = \frac{mg}{\tan 7{,}50°} = \frac{7{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\tan 7{,}50°} \approx 559\ \text{N}.$$

Voiman $F_2$ suuruus: $\tan 7{,}50° = \dfrac{G}{F_2}$, josta

$$F_2 = \frac{mg}{\sin 7{,}50°} = \frac{7{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\sin 7{,}50°} \approx 564\ \text{N}.$$

Tehtävän voi ratkaista myös sinilauseen avulla:

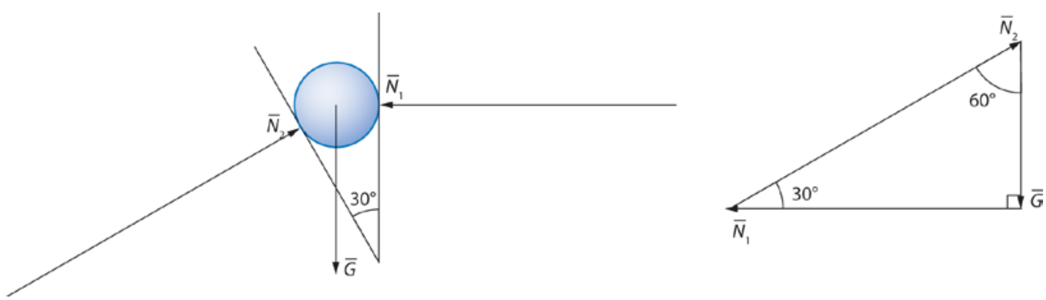
Yhtälöstä $\dfrac{F_1}{\sin 82{,}50°} = \dfrac{G}{\sin 7{,}50°}$ saadaan vaakasuorassa olevan vaijerin jännitysvoiman suuruudeksi

$$F_1 = \frac{mg \cdot \sin 82{,}50°}{\sin 7{,}50°} = \frac{7{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 82{,}50°}{\sin 7{,}50°} \approx 559\ \text{N}.$$

Yhtälöstä $\dfrac{F_2}{\sin 90°} = \dfrac{G}{\sin 7{,}50°}$ saadaan vaijerin vinon osan jännitysvoiman suuruudeksi

$$F_2 = \frac{G \cdot \sin 90°}{\sin 7{,}50°} \approx 564\,\text{N}.$$

**6-9.**



Koska ehto $\sum \overline{F} = \overline{0}$ on voimassa, vektorikuviosta saadaan yhtälö

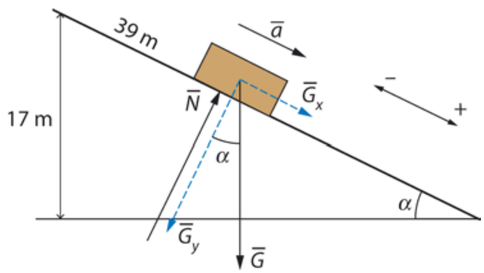
$\tan 60° = \dfrac{N_1}{G}$,josta voiman $\overline{N}_1$ suuruus on

$N_1 = mg \cdot \tan 60° = 4{,}7 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 60° \approx 80 \text{ N}$,

ja $\cos 60° = \dfrac{G}{N_2}$, josta voiman $\overline{N}_2$ suuruus on

$$N_2 = \frac{G}{\cos 60°} = \frac{mg}{\cos 60°} = \frac{4{,}7 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{\cos 60°} \approx 90 \text{ N}.$$

**6-10.**




**a)** Rinteen kaltevuuskulma saadaan yhtälöstä $\sin\alpha = \dfrac{h}{s} = \dfrac{17 \text{ m}}{39 \text{ m}}$, josta

kulma on $\alpha \approx 25{,}8424°$.

Painon rinteen suuntaisen komponentin suuruus on

$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha = 42 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{m/s}^2 \cdot \sin 25{,}8424° \approx 180 \text{ N}$.

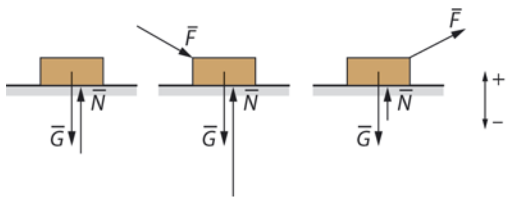
**b)** Koska kitka on hyvin pieni, sitä ei oteta huomioon. Newtonin II lain mukaan tason suunnassa on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G}_x = m\overline{a}$, jossa $\overline{a}$ on kelkan tason suuntainen kiihtyvyys. Valitaan liikkeen suunta tasoa pitkin alas positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $G_x = ma$ saadaan kelkan kiihtyvyydeksi

$$a = \frac{G_x}{m} = \frac{G\sin\alpha}{m} = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 25{,}8424° \approx 4{,}27615 \text{ m/s}^2.$$

Yhtälöistä $v = at$ ja $s = \dfrac{1}{2}at^2$ kelkan nopeudeksi rinteen alaosassa saadaan

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 4{,}27615 \text{ m/s}^2 \cdot 39 \text{ m}} \approx 18 \text{ m/s}.$$

**6-11.**

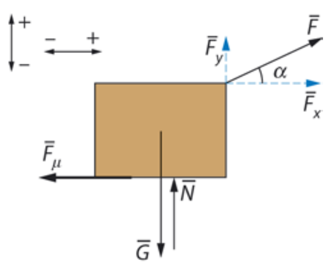



**a)** Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N - G = 0$ eli $G = N$. Kappaleeseen kohdistuva paino ja tukivoima ovat yhtä suuret.

**b)** Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ . Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N - F_y - G = 0$ eli $G = N - F_y$. Kappaleeseen kohdistuva paino on pienempi kuin tukivoima.

**c)** Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N + F_y - G = 0$, eli $G = N + F_y$. Kappaleeseen kohdistuva paino on suurempi kuin tukivoima. On myös mahdollista, että kappale irtoaa pinnasta (jos $F_y > G$), jolloin tukivoimaa ei ole: silloin kappale on kiihtyvässä liikkeessä yläviistoon oikealle.

**6-12.** **a)** Jaetaan vetävä voima komponentteihinsa.




Voiman $\overline{F}$ komponenttien suuruudet ovat

$F_x = F\cos\alpha = 35\ \text{N} \cdot \cos 25° \approx 32\ \text{N}$ ja

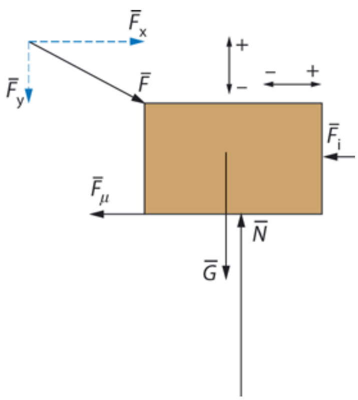
$F_y = F\sin\alpha = 35\ \text{N} \cdot \sin 25° \approx 15\ \text{N}.$

**b)** Koska laatikko on paikallaan, sekä vaaka- että pystysuorassa suunnassa vaikuttavien voimien summa on nolla. Newtonin II lain mukaan laatikon tasapainoehto pystysuunnassa on $\sum\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{F}_y + \overline{G} = \overline{0}$. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $N + F_y - G = 0$ saadaan tukivoiman suuruudeksi

$N = G - F_y = mg - F\sin\alpha = 4{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 35\ \text{N} \cdot \sin 25° \approx 24\ \text{N}.$

**6-13.** **a)** Piirretään voimakuvio.




Koska laatikon liike on tasaista, Newtonin II lain mukaan on $\sum\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{F}_i + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$.

Koska voima $\overline{F}$ on vino, jaetaan voima $\overline{F}$ vaaka- ja pystykomponenttiin. Sovitaan tason suunta oikealle ja suunta ylös positiiviseksi. Kirjoitetaan liikeyhtälö tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa.

Newtonin II lain mukaan tason suunnassa on $\sum\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{F}_i + \overline{F}_\mu = \overline{0}$ ja skalaarimuodossa $F_x - F_i - F_\mu = 0$ eli $F\cos\alpha - F_i - F_\mu = 0$:

Kitkan suuruus on $F_\mu = F\cos\alpha - F_i = 350\ \text{N} \cdot \cos 39° - 25\ \text{N} \approx 250\ \text{N}$.

**b)** Newtonin II lain mukaan tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on
$\sum \overline{F}_y = \overline{0}$ eli $\overline{F}_y + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$

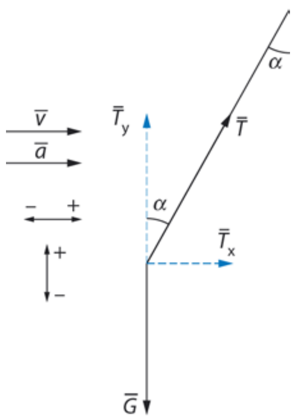
ja skalaarimuodossa $-F_y + N - G = 0$.

Tukivoiman suuruus on

$$N = G + F_y = mg + F\sin\alpha$$

$$= 47\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 + 350\ \text{N} \cdot \sin 39° \approx 680\ \text{N}.$$

**6-14.**




$\overline{G}$ on avainnippuun kohdistuva paino ja $\overline{T}$ langan jännitysvoima.

Koska avainnippu oli likimain levossa junan suhteen, sen ja junan kiihtyvyydet olivat likimain samoja. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ ja liikkeen suunnassa on $\overline{T}_x = m\overline{a}$. Sovitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin saadaan $T_x = ma$ eli $T\sin\alpha = ma$. Avainnipun kiihtyvyys on $a = \dfrac{T\sin\alpha}{m}$. Kiihtyvyyden laskemiseksi on vielä selvitettävä langan jännitysvoima $\overline{T}$.

Liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa avainnipun liikeyhtälö on

$\overline{T}_y + \overline{G} = \overline{0}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälö $T_y - G = 0$ saadaan muotoon $T\cos\alpha - G = 0$.

Langan jännitysvoima on $T = \dfrac{G}{\cos\alpha} = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$. Sijoitetaan tämä avainnipun kiihtyvyyden yhtälöön, jolloin kiihtyvyys on

$$a = \frac{T\sin\alpha}{m} = \frac{\frac{mg}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha}{m} = g\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = g\cdot\tan\alpha$$

$$= 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\tan 15° \approx 2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tapa 2.

Kirjoitetaan $x$- ja $y$-suuntaiset skalaariyhtälöt muotoon

$T\sin\alpha = ma$ ja $T\cos\alpha = mg$ ja jaetaan yhtälöt puolittain:

$\dfrac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \dfrac{ma}{mg}$ eli $\tan\alpha = \dfrac{a}{g}$.

Avainnipun kiihtyvyys on $a = g\cdot\tan\alpha = 9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\tan 15° \approx 2{,}6\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**7-1.** **a)** Kappale lähtee liikkeelle hetkellä $t = 1{,}1$ s.

**b)** Kuviosta saadaan liukukitkan suuruus $F_\mu = 2{,}5$ N. Liukukitka on

$F_\mu = \mu N = \mu mg$, josta saadaan liukukitkakertoimeksi

$$\mu = \frac{F_\mu}{mg} = \frac{2{,}5\,\text{N}}{1{,}8\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2} \approx 0{,}14.$$

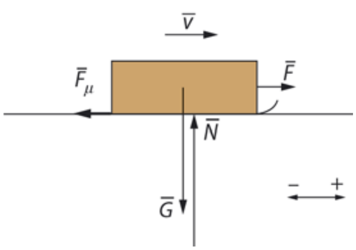
**c)** Kuviosta saatava lähtökitkan suuruus on $F_{\mu 0,\max} = 4{,}5$ N. Lähtökitkakerroin on

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0,\max}}{mg} = \frac{4{,}5\,\text{N}}{1{,}8\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2} \approx 0{,}25.$$

**7-2.** **a)** Tarvittavan voiman suuruus on

$F_\mu = \mu N = \mu mg = 0{,}040 \cdot 2400\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \approx 940$ N.

**b)**

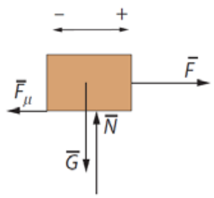



**7-3.** **a)** Lähtö- ja liukukitkan suuruuksien ero on

$$F_{\mu 0,\max} - F_\mu = \mu_0 mg - \mu mg$$

$$= mg(\mu_0 - \mu) = 24\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot (0{,}30 - 0{,}20) \approx 24\text{ N}.$$

**b)** Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö on
$\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_{\mu} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$ .



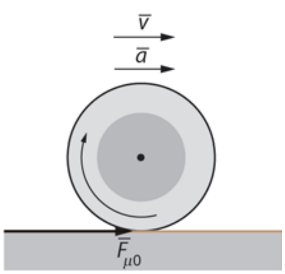

Alustan suunnassa liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_{\mu} = m\overline{a}$ .

Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_{\mu} = ma$, josta kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{F - F_{\mu}}{m} = \frac{\mu_0 mg - \mu mg}{m} = \frac{0{,}30mg - 0{,}20mg}{m} = \frac{0{,}10mg}{m}$$
$$= 0{,}10g = 0{,}10 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \approx 0{,}98 \text{ m/s}^2.$$

**7-4.** **a)** Kitka on lepokitkaa, koska rengas ei sudi eli renkaan pinta ja asfaltin pinta eivät liu'u toistensa suhteen. Lepokitkan suunta on sama kuin auton etenemissuunta.




**b)** Junan pysäyttää pyörien ja kiskojen välinen lepokitka (olettaen että pyörät eivät liu'u).

**c)** Lämmittäminen pehmentää kumia, jolloin se pureutuu tiukemmin asfalttipinnan hienorakenteeseen. Renkaiden pito paranee, koska renkaiden vieriessä lepokitka renkaan ja tienpinnan välillä suurenee.

Tämän ansiosta mm. kaarteet voidaan ajaa suuremmalla vauhdilla.

**d)** Jos auton etupyörät vierivät (kitka lepokitkaa) ja takapyörät lukkiutuvat (kitka liukukitkaa), auton peräpää pyrkii kääntymään sivulle (vrt. käsijarrukäännöksen teko), koska liukukitka on pienempi kuin lepokitka. Liukuva perä kääntyy edelle, koska sivuttaisliikkeeseen joutuneen perän nopeus (vektorisuure) on suurempi kuin auton etuosan.

Autojen etujarrujen on oltava tehokkaammat kuin takajarrujen, koska tällöin esim. lukkojarrutuksessa auto etenee liikkeen suunnassa eikä pääse kääntymään poikittain.

Jos auton takajarrut olisivat tehokkaammat kuin etujarrut, autoa jarrutettaessa takarenkaat lukkiutuisivat (kitka liukukitkaa) ja eturenkaat vielä pyörisivät (kitka lepokitkaa): auton takapäähän vaikuttaisi silloin pienempi hidastava voima kuin etupäähän ja tämän seurauksena auto kääntyisi helposti poikittain etenemissuuntaansa nähden.

**7-5.** **a)** Lähtökitkan suuruus on $F_{\mu 0,\max} = \mu_0 N = \mu_0 mg = 0{,}26 \cdot 1{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3{,}061\ \text{N}$.

Liukukitkan suuruus on $F_\mu = \mu N = \mu mg = 0{,}21 \cdot 1{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}472\ \text{N}$.

Koska jousivaa'an lukema $F = 2{,}2$ N on pienempi kuin lähtökitka eli $F < F_{\mu 0,\max}$, kappale on levossa. Tällöin kappaleen liikeyhtälö on $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$.

Kun valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_\mu = 0$. Kitkan suuruus on $F = F_\mu = 2{,}2$ N (lepokitkaa).

**b)** Kun kappaletta vedetään jousivaa'alla vakionopeudella, vetävä voima on yhtä suuri kuin kitka eli $F = F_\mu = 2{,}5$ N (liukukitkaa).

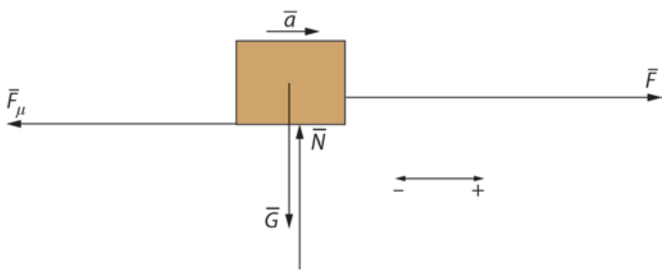
**7-6.** Kiekon kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0{,}0\ \text{m/s} - 1{,}6\ \text{m/s}}{8{,}0\,\text{s}} = -0{,}20\ \text{m/s}^2$$ ja voiman suuruus

$F = ma = 0{,}170\ \text{kg} \cdot (-0{,}20\ \text{m/s}^2) = -0{,}034\ \text{N}$.

Liikettä hidastava kitka on liikkeen suunnalle vastakkainen ja sen suuruus on 0,034 N = 34 mN.

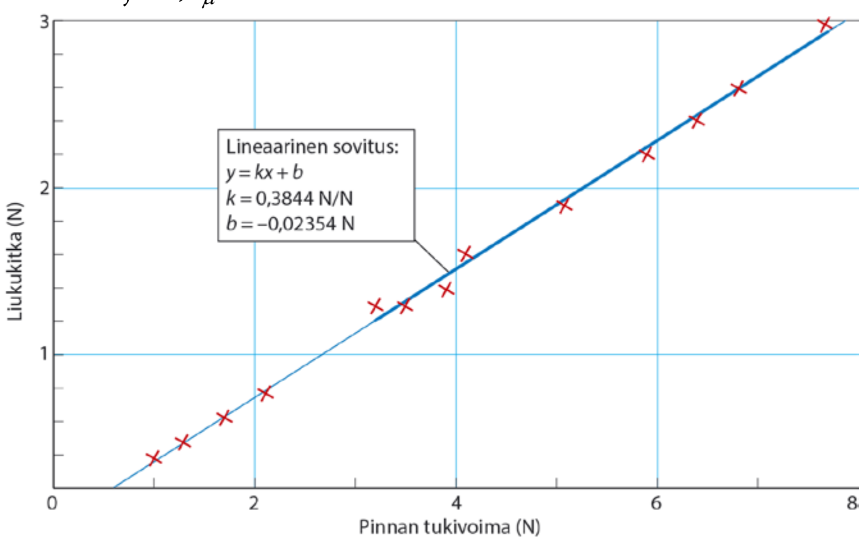
**7-7.** Newtonin II lain mukaan on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{F} + \bar{F}_\mu + \bar{N} + \bar{G} = m\bar{a}$.




Tason suunnassa on $\bar{F} + \bar{F}_\mu = m\bar{a}$. Kun reen liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_\mu = ma$. Kitka on $F_\mu = \mu mg$. Yhtälöstä $F - \mu mg = ma$ saadaan kitkakertoimeksi

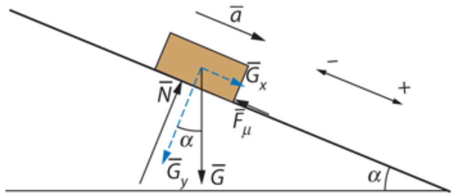
$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{750\ \text{N} - 420\ \text{kg} \cdot 0{,}10\ \text{m/s}^2}{420\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}17\ .$$

**7-8.** Kuvaaja $N,F_\mu$ -koordinaatistossa.




Liukukitkakerroin on 0,38.

**7-9.**




Jaetaan laskijan paino $\overline{G}$ rinteen suuntaiseen komponenttiin $\overline{G}_x$ ja rinnettä vastaan kohtisuoraan komponenttiin $\overline{G}_y$. Tasoa vastaan $\overline{G}_y$ kohtisuorassa suunnassa voimien summa on nolla, joten komponenttia kuvaava vektori on yhtä pitkä kuin rinteen pinnan tukivoimaa $\overline{N}$ kuvaava vektori.

Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.

Tason suunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Valitaan liikkeen suunta rinnettä alas positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $G_x - F_\mu = ma$ laskijan kiihtyvyydeksi saadaan

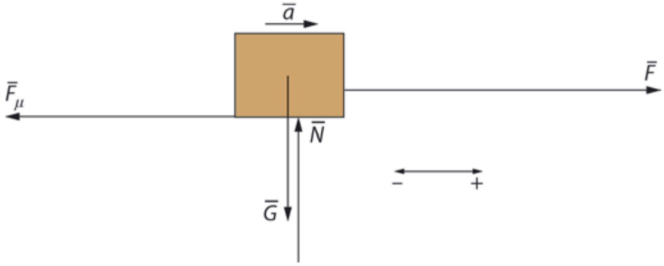
$$a = \frac{G_x - F_\mu}{m} = \frac{G\sin\alpha - \mu N}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{m(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)}{m}$$
$$= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (\sin 25° - 0{,}15 \cdot \cos 25°) \approx 2{,}8\ \mathrm{m/s^2},$$

suunta tason suunnassa alas.

**7-10.** Kappaleen kiihtyvyyden suuruudeksi saadaan $t, v$-koordinaatistosta

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4{,}5\,\mathrm{m/s}}{1{,}0\,\mathrm{s}} = 4{,}5\,\mathrm{m/s^2}.$$

Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.



Lattian suunnassa on $\overline{F}+\overline{F}_{\mu}=m\overline{a}$. Kun liikkeen suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F - F_{\mu} = ma$ eli $F - \mu mg = ma$. Kitkakerroin on

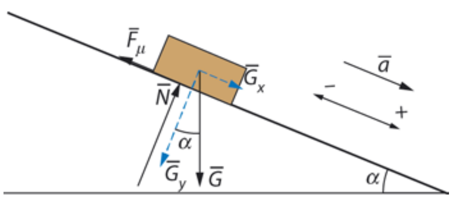
$$\mu=\frac{F-ma}{mg}=\frac{35{,}0\ \text{N}-4{,}0\ \text{kg}\cdot 4{,}5\ \text{m/s}^2}{4{,}0\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}\approx 0{,}43.$$

**7-11.** **a)** Koska laatikko liikkuu 2,0 sekunnissa alas 2,0 m ja oikealle 4,0 m, joten matka tasoa pitkin on $s=\sqrt{(2{,}0\ \text{m})^2+(4{,}0\ \text{m})^2}\approx 4{,}47214\ \text{m}$.

Yhtälöstä $s=\frac{1}{2}at^2$ laatikon kiihtyvyys tason suunnassa on

$$a=\frac{2s}{t^2}=\frac{2\cdot 4{,}47214\ \text{m}}{(2{,}0\,\text{s})^2}=2{,}23607\,\text{m/s}^2\approx 2{,}2\ \text{m/s}^2.$$

**b)** Tason kaltevuuskulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha=\frac{2{,}5\,\text{m}}{5{,}0\,\text{m}}$, josta kulma on $\alpha = 26{,}5651°$.

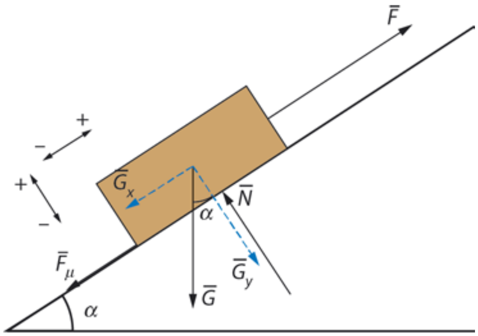



Newtonin II lain mukaan on $\sum\overline{F}=m\overline{a}$ eli $\overline{F}_{\mu}+\overline{N}+\overline{G}=m\overline{a}$.

Tason suunnassa on $\sum\overline{F}=m\overline{a}$ eli $\overline{G}_x+\overline{F}_{\mu}=m\overline{a}$. Kun tason suunta alas on positiivinen, skalaariyhtälöstä $G_x - F_{\mu} = ma$ saadaan liukukitkan suuruudeksi

$$\begin{aligned}F_{\mu}&=G_x-ma=mg\sin\alpha-ma\\&=25\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot\sin 26{,}5651°-25\ \text{kg}\cdot 2{,}23607\ \text{m/s}^2\approx 54\ \text{N}.\end{aligned}$$

**7-12.**




Koska laatikko liikkuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan on

$\sum\overline{F}=\overline{0}$ eli $\overline{F}+\overline{F}_\mu+\overline{N}+\overline{G}=\overline{0}$.

Tason suunnassa on $\Sigma\overline{F}=\overline{0}$ eli $\overline{F}+\overline{G}_x+\overline{F}_\mu=\overline{0}$. Kun sovitaan suunta pitkin kaltevaa tasoa ylös positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F-G_x-F_\mu=0$, josta $F=G_x+F_\mu=G\sin\alpha+\mu N$.

Tästä yhtälöstä ei vielä voi ratkaista voiman $F$ suuruutta, koska pinnan tukivoiman $N$ suuruutta ei tiedetä.

Tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $\Sigma\overline{F}=\overline{0}$ eli $\overline{G}_y+\overline{N}=\overline{0}$.

Kun sovitaan suunta tasosta kohtisuorasti ylöspäin positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N-G_y=0$, josta $N=G_y=G\cos\alpha$. Kun tukivoiman yhtälö sijoitetaan yhtälöön $F=G\sin\alpha+\mu N$, vetävän voiman suuruudeksi saadaan

$$F=G\sin\alpha+\mu N=G\sin\alpha+\mu G\cos\alpha=G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

$$=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

$$=75\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\cdot(\sin 41^\circ+0{,}45\cdot\cos 41^\circ)\approx 730\text{ N}.$$

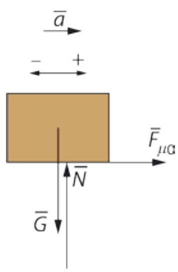
**7-13.** Koska kirjan massa on 510 g, kirjaan kohdistuva paino on

$G = mg = 0{,}51\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 5{,}0\ \text{N}$. Lepokitka ylöspäin on

$F_{\mu 0} = \mu_0 N = 0{,}60 \cdot 12\ \text{N} = 7{,}2\ \text{N} > G$, eli kirja pysyy paikoillaan.

**7-14.** **a)** Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat paino, lavan tukivoima ja kitka. Laatikkoa kiihdyttävänä voimana on lavan pinnan ja laatikon pohjan välinen lepokitka.

**b)** Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_{\mu 0} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.

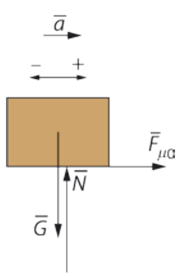



Vaakasuunnassa on $\overline{F}_{\mu 0} = m\overline{a}$. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi. Yhtälöstä $\mu_0 mg = ma$ saadaan kitkakertoimeksi

$$\mu_0 = \frac{a}{g} = \frac{1{,}8\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}18,$$ joka on pienempi kuin 0,37.

Näin ollen laatikko ei liu'u.

**7-15.** Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_{\mu 0,\max} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.



Tienpinnan suunnassa on $\overline{F}_{\mu 0,\max} = m\overline{a}$. Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F_{\mu 0,\max} = ma$ eli

$0{,}58\mu_0 N = ma$ eli

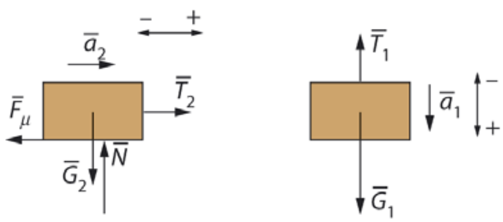
$0{,}58\mu_0 mg = ma.$

Maksimikiihtyvyydeksi saadaan

$a = 0{,}58\ \mu_0 g = 0{,}58 \cdot 0{,}18 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \approx 1{,}0\ \mathrm{m/s^2}.$

Maksimikiihtyvyyttä on vaikea saavuttaa, koska lepokitka muuttuu helposti liukukitkaksi, joka on pienempi kuin lepokitkan maksimiarvo. Kiihtyvyys pienenee auton nopeuden kasvaessa, koska tällöin ilmanvastus kasvaa.

## 7-16.




Valitaan systeemin liikkeen positiiviseksi suunnaksi se, jossa alustalla oleva kappale liukuu oikealle ja riippuva kappale alas.

Oletetaan, että lanka on venymätön. Koska langassa vallitsee sama jännitys, on $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$. Kappaleilla on sama kiihtyvyyden suuruus, koska ne liikkuvat yhdessä: $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$.

Liikeyhtälöstä $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T}_2 + \overline{F}_\mu = m_2\overline{a}_2$ ja $\overline{T}_1 + \overline{G}_1 = m_1\overline{a}_1$ saadaan skalaariyhtälöt

$$\begin{cases} T - F_\mu = m_2 a \\ -T + G_1 = m_1 a \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} T - \mu m_2 g = m_2 a \\ -T + m_1 g = m_1 a. \end{cases}$$

Eliminoidaan yhtälöparista $T$ laskemalla yhtälöt puolittain yhteen, jolloin kiihtyvyyden suuruudeksi saadaan

$$a = \frac{m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{3{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 0{,}20 \cdot 2{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{5{,}0\ \text{kg}} \approx 5{,}1\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyys on positiivinen eli tasolla olevan kappaleen kiihtyvyys on oikealle ja riippuvan kappaleen alas.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**8-1.** Jousivaa'an lukema suolavedessä on pienempi kuin puhtaassa vedessä, koska suolaveden tiheys on suurempi kuin puhtaan veden ja siksi noste suolavedessä on suurempi kuin puhtaassa vedessä.

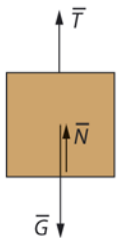
**8-2.** **a)** Lasipalaan kohdistuvan nosteen suuruus on

$N = 1{,}40\text{ N} - 0{,}84\text{ N} = 0{,}56\text{ N}.$

**b)** Nosteen yhtälöstä $N = \rho Vg$ saadaan lasipalan tilavuudeksi

$$V = \frac{N}{\rho g} = \frac{0{,}56\text{ N}}{1000\text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2} = 57{,}08461\text{ cm}^3 \approx 57\text{ cm}^3.$$

**c)**




**8-3.** **a)** Hydrostaattisesta paineesta aiheutuvan voiman suuruus laatikon yläpinnalla on

$$F_1 = p_1 A = \rho g h_1 A$$
$$= 1\,000\text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 0{,}89\text{ m} \cdot (0{,}55\text{m} \cdot 0{,}55\text{m})$$
$$= 2641{,}10\text{ kN} \approx 2{,}6\text{ kN}$$

ja alapinnalla

$$F_2 = p_2 A = \rho g h_2 A$$
$$= 1\,000\text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 1{,}44\text{ m} \cdot (0{,}55\text{m} \cdot 0{,}55\text{m})$$
$$= 4273{,}23\text{ kN} \approx 4{,}3\text{ kN}.$$

**b)** Laitteeseen kohdistuvan nosteen suuruus on

$N = F_2 - F_1 = 4273{,}23\ \text{kN} - 2641{,}10\ \text{kN} \approx 1{,}6\ \text{kN}.$

Huomaa, nosteen voi laskea myös näin:

$N = \rho V g = 1\,000\ \text{kg/m}^3 \cdot (0{,}55\ \text{m})^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}6\ \text{kN}.$

**8-4.** **a)** Kiveen kohdistuva paino on
$G = mg = 1{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 11{,}772\ \text{N} \approx 12\ \text{N}.$

**b)** Kiven massa ilmassa on sama kuin massa vedessä eli 1,2 kg.

**c)** Lasketaan ensin kiven tilavuus. Tiheyden yhtälöstä $\rho = m/V$ saadaan kiven tilavuudeksi

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1{,}2\,\text{kg}}{2500\ \text{kg/m}^3} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3.$$

Kiveen kohdistuvan nosteen suuruus on
$N = \rho V g = 1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 4{,}7088\ \text{N} \approx 4{,}7\ \text{N}.$

**d)** Kivi pysyy paikoillaan, kun sitä tuetaan ylöspäin suuntautuvalla voimalla, jonka suuruus on

$F = G - N = 11{,}772\ \text{N} - 4{,}7088\ \text{N} \approx 7{,}1\ \text{N}.$

**8-5.** **a)** Suolaisen meriveden tiheys on suurempi kuin järviveden tiheys. Näin ollen merivedessä uiminen on helpompaa, koska noste merivedessä on suurempi kuin järvivedessä.

**b)** Vedessä kiven kannatteleminen on helpompaa veden nosteen vuoksi. Myös ilmassa kiveen kohdistuu noste, mutta se on ilmassa (kaasuissa) huomattavasti pienempi kuin nesteissä.

**c)** Vesivoimistelua käytetään hoitokeinona. Veden keventävästä vaikutuksesta (nosteesta) johtuen esim. voimisteleminen vedessä on helpompaa kuin ilmassa ja se rasittaa niveliä vähemmän. Toisaalta veden vastus estää liikkeitä. Näin vesijumpassa lihakset joutuvat työskentelemään voimakkaammin kuin esimerkiksi ilmassa altaan reunalla ja hyvin heikotkin lihakset voivat kuntoutua.

**8-6.** Kun lasikuvusta imetään ilmaa pois, ilmanpaine kuvun sisällä pienenee ja ilman tiheys alenee. Tällöin ilman lasipalloon kohdistama noste pienenee ja lasipallo painuu alaspäin.

**8-7.** Kelluva kappale syrjäyttää oman tilavuutensa verran vettä. Kummankin lelun syrjäyttämän veden paino on yhtä suuri kuin astiaan mahtuvan lisäveden paino, jos lelua ei olisi astiassa. Kaikissa tilanteissa punnitustulos on sama.

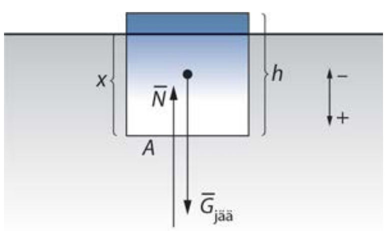
**8-8.** Pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\cdot \pi \cdot (0{,}025\text{ m})^3 \approx 65{,}4498\text{ cm}^3$. Kun pallo uppoaa, sen syrjäyttämän veden tilavuus Arkhimedeen lain mukaan on $65{,}4498\text{ cm}^3$.

Tämän vesimäärän massa on

$m = \rho V = 1{,}000\text{ g/cm}^3 \cdot 65{,}4498\text{ cm}^3 = 65{,}4498\text{ g}$.

Vaa'an lukema on $1995\text{ g} + 65{,}4498\text{ g} \approx 2100\text{ g}$.

**8-9.** Tasapainoehto on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_{\text{jää}} + \overline{N} = \overline{0}$. Kun suunta alas on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $G_{\text{jää}} - N = 0$ eli jääkuutioon kohdistuva paino on yhtä suuri kuin veden aiheuttama noste.



Olkoon $x$ jääkuution vedenpinnan alapuolella olevan sivun pituus, $A$ pohjan pinta-ala sekä $h$ kuution sivun pituus. Vedenpinnan alapuolella olevan jääpalan tilavuus on $V = Ax$.

Yhtälö $G_{\text{jää}} = N$ saadaan muotoon

$m_{\text{jää}}g = \rho_{\text{vesi}} Vg$ eli

$\rho_{\text{jää}} V = \rho_{\text{vesi}} Ax$ eli

$\rho_{\text{jää}} Ah = \rho_{\text{vesi}} Ax$

$\rho_{\text{jää}} h = \rho_{\text{vesi}} x$.

Jääkuution vedenpinnan alapuolella olevan sivun $x$ pituus on

$$x = \frac{\rho_{\text{jää}}}{\rho_{\text{vesi}}} h = \frac{920 \text{ kg/m}^3}{1030 \text{ kg/m}^3} \cdot 4{,}0 \text{ m} = 3{,}57282 \text{ m}.$$

Jäästä on pinnan alapuolella 3,57282 m ja pinnan yläpuolella

4,0 m – 3,57282 m = 0,42718 m.

Pinnan yläpuolella on tilavuudesta 0,42718 m · 16 m$^2$ = 6,83488 m$^3$. Se on noin 11 % koko tilavuudesta.

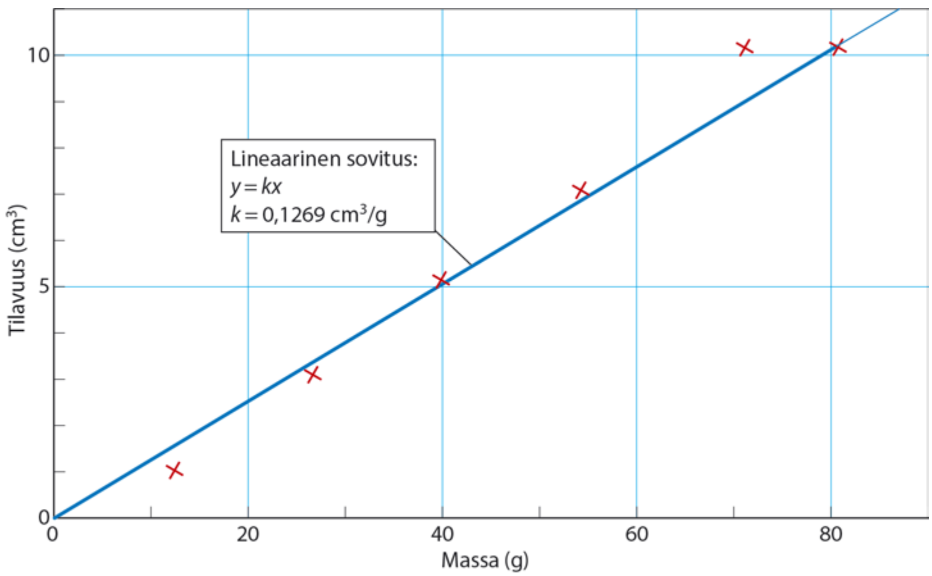
**8-10.** **a)** Painon yhtälöstä $G = mg$ kappaleen massa ilmassa on $m = \frac{G}{g}$. Nosteen yhtälöstä $N = \rho Vg$ kappaleen tilavuus on $V = \frac{N}{\rho g}$. Veden tiheys on 1,0 g/cm$^3$.

Lasketaan kunkin kappaleen massa ja kuhunkin kappaleeseen kohdistuva noste sekä kappaleen tilavuus.

| Kappale | $G_{ilma}$ (N) | $G_{vesi}$ (N) |
|---|---|---|
| 1 | 0,12 | 0,11 |
| 2 | 0,26 | 0,23 |
| 3 | 0,39 | 0,34 |
| 4 | 0,53 | 0,46 |
| 5 | 0,69 | 0,59 |
| 6 | 0,79 | 0,69 |

| Kappale | $m$ (g) | $N$ (N) | $V = \dfrac{N}{\rho g}$ ($cm^3$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 12,2 | 0,01 | 1,0 |
| 2 | 26,5 | 0,03 | 3,1 |
| 3 | 39,8 | 0,05 | 5,1 |
| 4 | 54,0 | 0,07 | 7,1 |
| 5 | 70,3 | 0,10 | 10,2 |
| 6 | 80,5 | 0,10 | 10,2 |

Kappaleen tilavuus massan funktiona:




**b)** Kappaleen 5 mittaustuloksessa on satunnainen virhe, hylätään se. Mittausohjelman mukaan suoran fysikaalinen kulmakerroin on 0,1269 $cm^3/g$. Kappaleen tiheys on fysikaalisen kulmakertoimen käänteisluku eli $\rho = 7{,}9$ $g/cm^3$.

**8-11.** Koska pienoismalli keveni 640 g = 0,64 kg, syrjäytetyn veden massa on myös 0,64 kg. Pienoismalliin kohdistuva noste on yhtä suuri kuin syrjäytettyyn vesimäärään kohdistuva paino, eli noste on

$N = 0{,}64 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 6{,}2784 \text{ N}$.

**a)** Nosteen yhtälöstä $N = \rho Vg$ pienoismallin tilavuudeksi saadaan

$$V = \frac{N}{\rho g} = \frac{6{,}2784 \text{ N}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2} = 6{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 640 \text{ cm}^3.$$

(Tilavuuden voi laskea myös syrjäytetyn veden massan avulla:

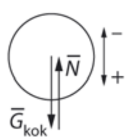
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0{,}64 \text{ kg}}{1000 \text{ kg/m}^3} = 6{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 640 \text{ cm}^3.)$$

**b)** Koska mittakaava on 1:20, tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio: dinosauruksen tilavuus on

$20^3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 5{,}12 \text{ m}^3 \approx 5{,}1 \text{ m}^3$.

**c)** Dinosauruksen massa olisi $m = \rho V = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 5{,}12 \text{ m}^3 \approx 5100 \text{ kg}$.

**8-12.** Rajatapauksessa palloon kohdistuva noste on yhtä suuri kuin palloon kohdistuva kokonaispaino.




Tasapainoehto on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_{kok} + \overline{N} = \overline{0}$. Valitaan suunta alas positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $G_{kok} - N = 0$ saadaan yhtälö

$m_{ki}g + m_{kuorma}g + m_{pallo}g = \rho_{ilma} Vg$.

Kuuman ilman massa voidaan kirjoittaa muotoon $m_{ki} = \rho_{ki} V$; sijoitetaan tämä edelliseen yhtälöön.

Yhtälöstä $\rho_{ki} Vg + m_{kuorma}g + m_{pallo}g = \rho_{ilma} Vg$ kuorman massa on

$$m_{kuorma} = \rho_{ilma} V - \rho_{ki} V - m_{pallo} = (\rho_{ilma} - \rho_{ki}) V - m_{pallo}$$

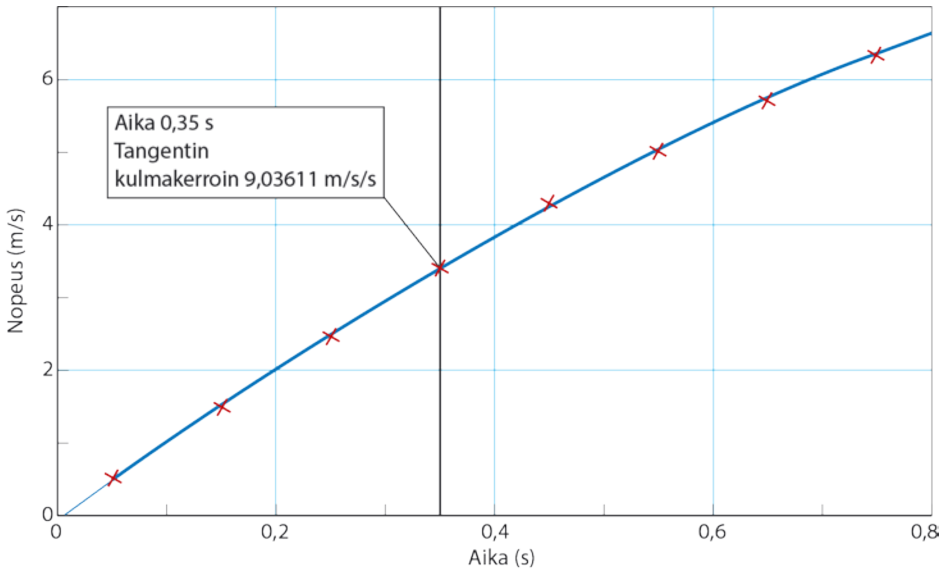
$$= (1{,}3\ \mathrm{kg/m^3} - 0{,}85\ \mathrm{kg/m^3}) \cdot 160\ \mathrm{m^3} - 23\ \mathrm{kg} = 49\ \mathrm{kg}.$$

**8-13.** **a)** Epäily rautalaivojen kellumisesta johtui siitä, että raudan tiheys oli suurempi kuin veden. Rautalaivan pysyminen pinnalla johtuu veden nosteesta. Kelluva laiva on ontto, eli valtaosa laivan tilavuudesta on ilmaa. Laivaan kohdistuva veden noste on yhtä suuri kuin laivan syrjäyttämään vesimäärään kohdistuva paino.

**b)** Pelastusliivit valmistetaan vedenpitävästä, kevyestä ja kelluvasta materiaalista. Pelastusliivien varassa ihminen kelluu, vaikka uimiseen tai veden pinnalla pysymiseen tarvittavat voimat vedessä loppuisivat. Varsinaisten pelastusliivien (ei uimaliivien) etupuolella on suuret kellukkeet, jotka kääntävät veden varaan joutuneen tajuttoman henkilön selälleen, jolloin pää pysyy veden yläpuolella.

**8-14.** Alussa palloa on helppo työntää veteen, koska vedestä palloon kohdistuva noste on pieni. Mitä syvemmälle yrität painaa palloa, sitä suurempi noste on. Nosteen suuruus riippuu vedenpinnan alapuolella olevan pallon osan tilavuudesta.

**8-15.** Nopeuden kuvaaja.

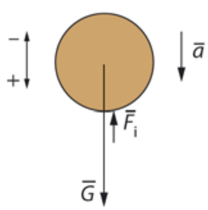



**b)** Pallon nopeus hetkellä 0,20 s on 2,0 m/s ja hetkellä 0,60 s 5,4 m/s.

**c)** Nopeuden kuvaaja kaartuu, koska pallon nopeuden kasvaessa palloon kohdistuva ilmanvastus kasvaa.

**d)** Hetkellä 0,35 s pallon kiihtyvyys on 9,03611 m/s$^2$.

Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G} + \overline{F}_{\mathrm{i}} = m\overline{a}$.




Kun valitaan suunta alas positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

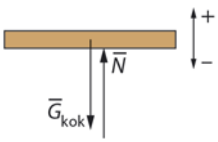
$G - F_{\mathrm{i}} = ma$, josta ilmanvastuksen suuruus hetkellä 0,35 s on

$F_{\mathrm{i}} = G - ma = mg - ma = m(g - a)$

$= 0{,}0123\ \mathrm{kg} \cdot (9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - 9{,}03611\ \mathrm{m/s^2}) \approx 9{,}5\ \mathrm{mN}.$

**8-16.** Vedessä olevaan sormen osaan kohdistuu noste. Newtonin III lain mukaan sormi kohdistaa veteen nosteen suuruisen alaspäin suuntautuvan voiman. Vaa'an lukema pienenee, kun sormi otetaan pois vedestä.

**8-17.** Laituriin kohdistuvan nosteen on oltava yhtä suuri kuin styroksin, puuosien ja kuorman yhteenlaskettu paino. Tasapainoehto on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_{\text{kok}} + \overline{N} = \overline{0}$.




Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, saadaan yhtälö $N - G_{\text{kok}} = 0$, josta

$G_{\text{kok}} = N$ eli $G_{\text{henkilöt}} + G_{\text{puuosat}} + G_{\text{styroksi}} = \rho_{\text{vesi}} Vg$.

Olkoon $n$ on tarvittavien styroksikellukkeiden lukumäärä.

Tarvittavaan styroksimäärään kohdistuva paino on

$G_{\text{styroksi}} = n \cdot m_{\text{styroksi}} g = n \cdot \rho_{\text{styroksi}} Vg$.

Laituriin kohdistuva kokonaispaino on

$$\begin{aligned} G_{\text{kok}} &= G_{\text{henkilöt}} + G_{\text{puuosat}} + G_{\text{styroksi}} \\ &= 4 \cdot 75\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 + 95\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 + n \cdot 25\ \text{kg/m}^3 \cdot 0{,}075\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 \\ &= 3874{,}95\ \text{N} + n \cdot 18{,}39\ \text{N}. \end{aligned}$$

Veden noste on

$N = \rho_{\text{vesi}} Vg = 1000\ \text{kg/m}^3 \cdot n \cdot 0{,}075\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = n \cdot 735{,}75\ \text{N}$.

Kun em. lausekkeet sijoitetaan yhtälöön $G_{\text{kok}} = N$, saadaan yhtälö

$G_{\text{henkilöt}} + G_{\text{puuosat}} + G_{\text{styroksi}} = N$ eli

$3874{,}95\ \text{N} + n \cdot 18{,}39\ \text{N} = n \cdot 735{,}75\ \text{N}$.

Ratkaistaan yhtälöstä $n$:

$3874{,}95\text{ N} = n \cdot 735{,}75\text{ N} - n \cdot 18{,}39\text{ N}$

$3874{,}95\text{ N} = n \cdot 717{,}36\text{ N}$, josta

$$n = \frac{3874{,}95\,\text{N}}{717{,}36\,\text{N}} \approx 5{,}4\ .$$

Styroksikellukkeita tarvitaan 6 kpl.

**8-18.** **a)** Kun Jukka seisoo linja-auton käytävällä ja auto lähtee i) liikkeelle, Jukka pyrkii horjahtamaan taaksepäin ja kun auto ii) jarruttaa, Jukka horjahtaa eteenpäin.

**b)** Kun autoa kiihdytetään, ilman hitaus saa ilman pakkautumaan auton peräosaan. Ilman tiheys siis kasvaa auton takapäätä kohti mentäessä. Tästä aiheutuu ilmassa olevaan heliumpalloon noste vaakasuorassa suunnassa kohti auton etupäätä. Nosteen suunta on aineen tiheämmästä osasta kohti harvempaa osaa.

Kun autoa jarrutetaan, ilman hitaus saa ilman pakkautumaan auton etuosaan. Ilman tiheys kasvaa auton etupäätä kohti mentäessä. Tästä aiheutuu ilmassa olevaan heliumpalloon noste vaakasuorassa suunnassa kohti auton takapäätä.

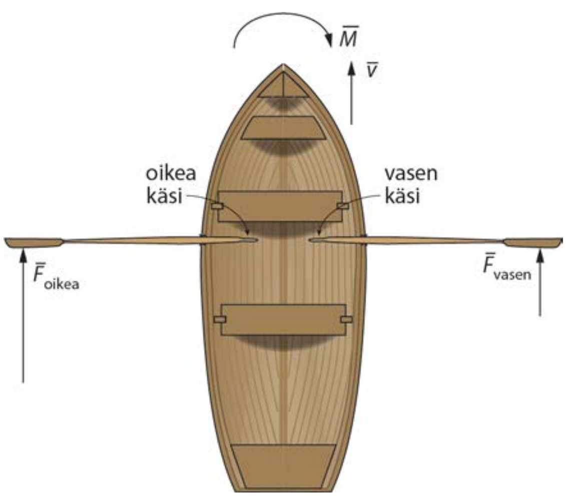
## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**9-1.** **a)** Ei

**b)** Kyllä

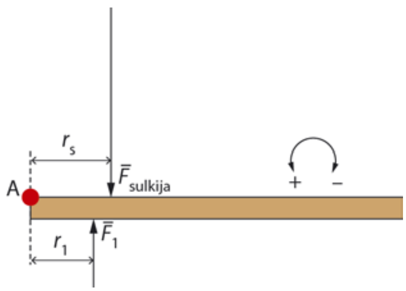
**c)** Kyllä.

**9-2.** Jos soudat oikean käden puoleisella airolla voimakkaammin kuin vasemman käden puoleisella airolla, vesi kohdistaa oikean käden puoleiseen airoon suuremman voiman kuin vasemman käden puoleiseen airoon. Tällöin suuremman voiman aiheuttama vääntömomentti on suurempi ja vene kääntyy vasemman käden suuntaan eli kulkusuunnassa oikealle.



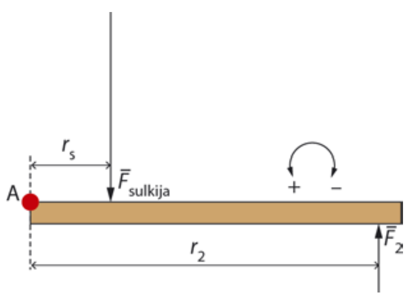
**9-3.** Sovitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi. Sulkijapumpun varsi kohdistaa oveen voiman, jonka momentti $M_A = -F_{sulkija}r_s$ sulkee oven, ellei sulkeutumista estetä. Oven avoimena pitämiseen tarvitaan yhtä suuri voiman momentti vastakkaiseen kiertosuuntaan. Kun este asetetaan oven eteen, esteestä kohdistuu oveen voima $\overline{F}$, jonka momentti oven saranoiden A suhteen on $M_A = Fr$. Voima $\overline{F}$ on yhtä suuri kuin lattian esteeseen kohdistama kitka.

Kuva 1: Ovi on kuvattu ylhäältä päin. Este on lähellä saranaa.




Kun este on lähellä saranaa, voiman $\overline{F}_1$ momentti on $M_{1,A} = F_1r_1$. Ovi lähtee sulkeutumaan, koska tässä tapauksessa voiman $\overline{F}_1$ vääntövarsi $r_1$ on pieni ja siksi oven sulkijan voiman momentti on suurempi kuin esteen voiman vastakkaissuuntainen momentti.

Kuva 2: Este on kaukana saranasta.



Kun este on kaukana saranasta, voiman $\overline{F}_2$ momentti on $M_{2,\mathrm{A}} = F_2 r_2$. Tässä tapauksessa $r_2$ on suuri, joten voiman $\overline{F}_2$ momentti on riittävän suuri kumoamaan sulkijan aiheuttaman vääntövaikutuksen.

Huomaa, että saranoihin kohdistuvia voimia ei tarkastella, koska niillä ei ole vääntövaikutusta.

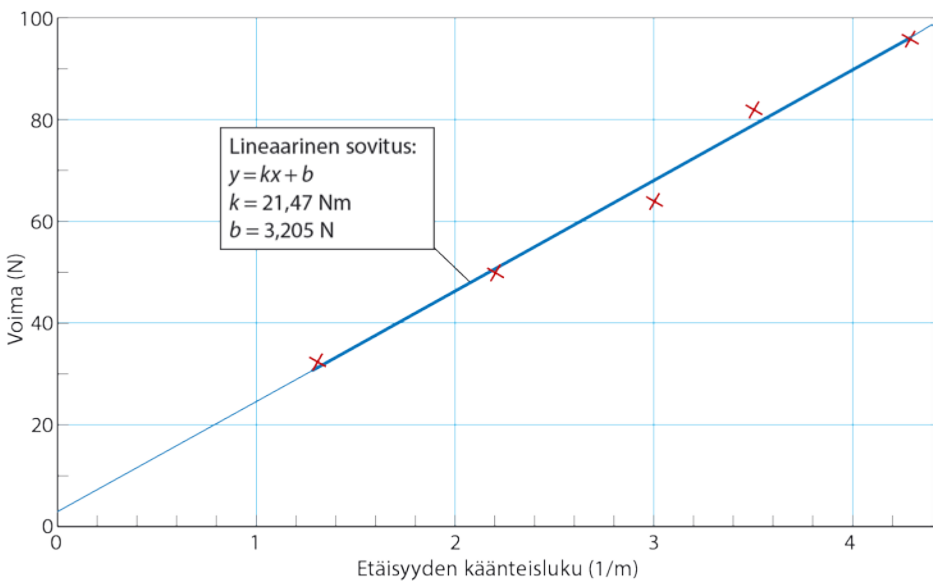
**9-4.** Tarvittava voima on pienin, kun voima on kohtisuorassa voiman vartta vastaan. Voiman momentti on $M = Fr$, joten pienimmän voiman suuruus on

$$F = \frac{M}{r} = \frac{130\ \mathrm{Nm}}{0{,}24\ \mathrm{m}} \approx 540\ \mathrm{N}.$$

**9-5.** Merkitään mittauspisteiden arvot taulukkoon:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1/r$ (1/m) | 1,3 | 2,2 | 3,0 | 3,5 | 4,3 |
| $F$ (N) | 32 | 50 | 64 | 82 | 95 |

Viedään taulukossa olevat arvot mittausohjelmaan.

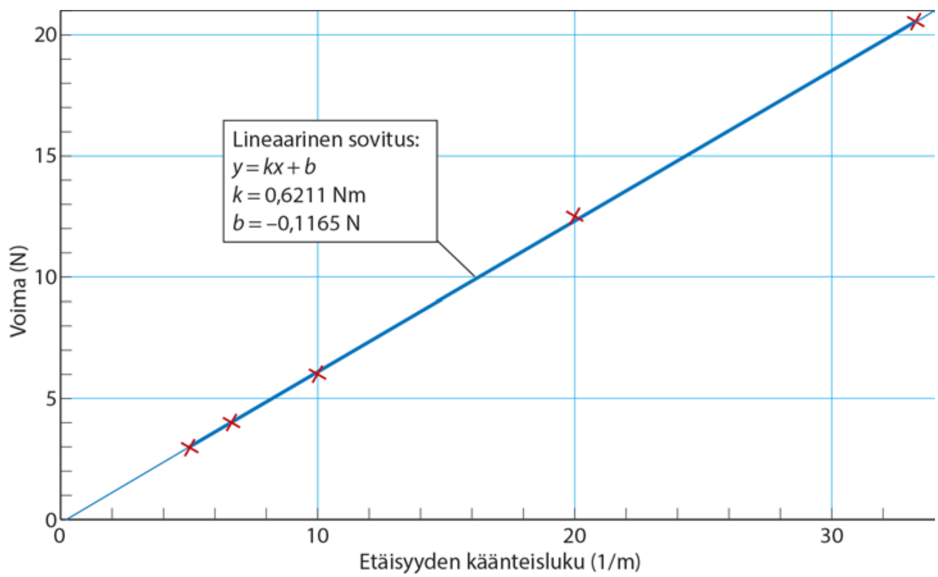


Koska voiman momentti on $M = Fr$, eli $F = M\frac{1}{r}$, voiman momentti saadaan suoran fysikaalisena kulmakertoimena. Mittausohjelman perusteella oven auki pitämiseen tarvittavan voiman momentti on $M \approx 21$ Nm.

**9-6.** Merkitään mittaustulokset taulukkoon. Koska voiman momentti on kääntäen verrannollinen voiman suuruuteen, lasketaan taulukkoon $1/r$:n arvot.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $r$ (m) | 0,03 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 |
| $1/r$ (1/m) | 33,33 | 20,00 | 10,00 | 6,67 | 5,00 |
| $F$ (N) | 20,5 | 12,5 | 6,0 | 4,0 | 3,0 |

Viedään arvot $1/r, F$ mittausohjelmaan.




Voiman momentti on mittausohjelman perusteella 0,6211 Nm $\approx$ 0,62 Nm

**9-7.** **a)** Kun momentin kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, voiman $\overline{F}_1$ momentti akselin A suhteen on

$M_A = -F_1 r_1 = -4{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}110\ \text{m} = -0{,}44\ \text{Nm}.$

Momentti on 0,44 Nm myötäpäivään.

**b)** Kun kulma $\alpha = 90°$, voimien momenttien summa on

$\Sigma M_A = -F_1 r_1 - F_2 r_2 = -4{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}110\ \text{m} - 6{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}220\ \text{m} \approx -1{,}8\ \text{Nm}.$

Jos kulma $\alpha = 50°$, voiman $\overline{F}_2$ vartta vastaan kohtisuora komponentti on

$F_{2y} = F_2 \sin 50° = 6{,}0\ \text{N} \cdot \sin 50° \approx 4{,}59627\ \text{N}.$

Momenttien summa akselin A suhteen on

$\Sigma M_A = -F_1 r_1 - F_{2y} r_2 = -0{,}44\ \text{Nm} - 4{,}59627\ \text{N} \cdot 0{,}220\ \text{m} \approx -1{,}5\ \text{Nm}.$
Momentti on 1,5 Nm myötäpäivään.

(Samaan lopputulokseen päädytään myös siten, että lasketaan voimalle sitä vastaan kohtisuora vääntövarsi.)

$r_{2,\text{kohtisuora}} = r_2 \sin 50° = 0{,}220\ \text{m} \cdot \sin 50° \approx 0{,}168530\ \text{m}.$

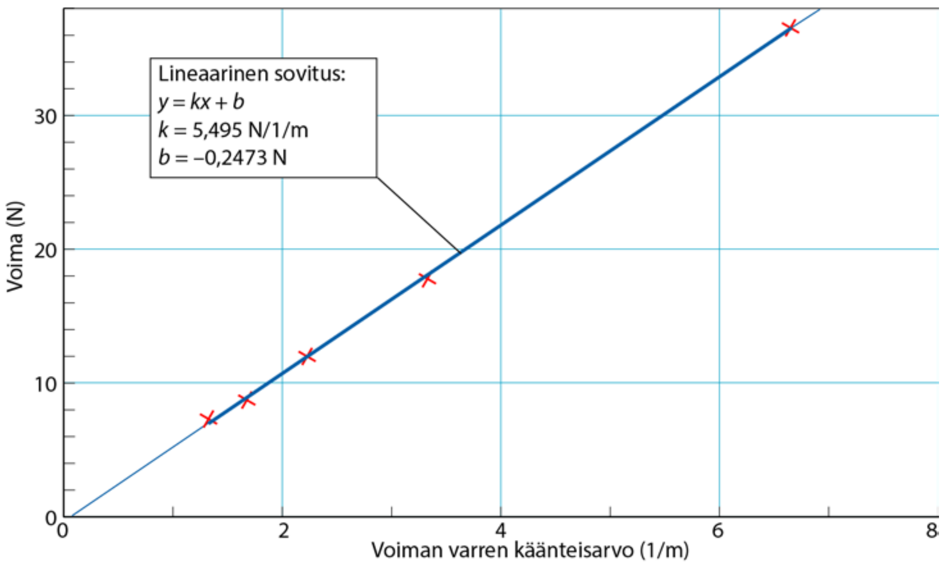
Momenttien summa on silloin

$\Sigma M_A = -F_1 r_1 - F_2 r_{2,\text{kohtisuora}} = -0{,}44\ \text{Nm} - 6{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}168530\ \text{m} \approx -1{,}5\ \text{Nm}.$

**9-8.** Koska voiman momentti on kääntäen verrannollinen voiman vaikutussuoran etäisyyteen kiertoakselista, lisätään taulukkoon arvot $1/r$.

| $r$ (m) | 0,15 | 0,30 | 0,45 | 0,60 | 0,75 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{m}}\right)$ | 6,67 | 3,33 | 2,22 | 1,67 | 1,33 |
| $F$ (N) | 36,5 | 17,8 | 12,0 | 8,8 | 7,3 |

Viedään arvot $1/r, F$ mittausohjelmaan.

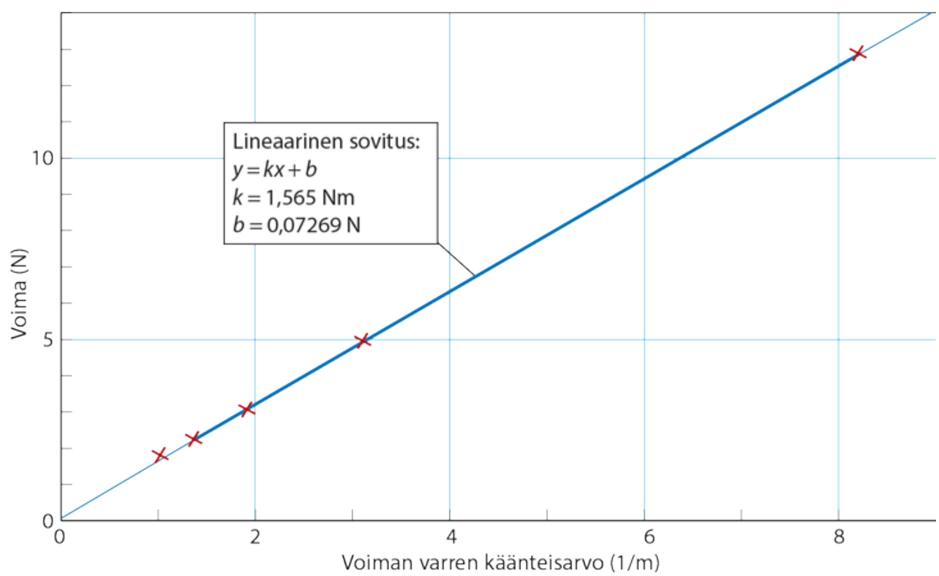



Mittausohjelman perusteella voiman momentti on 5,5 Nm. Momentin kiertosuunta on vastapäivään.

**9-9.** Taulukoidaan mittaustulokset ja lasketaan voiman vaikutussuoran etäisyys $r$ kiertoakselista. Lasketaan myös $r$:n käänteisarvot $1/r$. Kiertoakseli on viivaimen kohdassa 0,078 m. Voiman vaikutussuoran etäisyys kiertoakselista saadaan vähentämällä anturin ripustuskohdan lukemasta $x$ kiertoakselin kohdan lukema $x_A$.

| $x_A$ (m) | $x$ (m) | $r$ (m) = $(x - x_A)$ (m) | $1/r$ (1/m) | $F$ (N) |
|---|---|---|---|---|
| 0,078 | 0,20 | 0,122 | 8,19721 | 12,90 |
| 0,078 | 0,40 | 0,322 | 3,10559 | 4,95 |
| 0,078 | 0,60 | 0,522 | 1,91571 | 3,07 |
| 0,078 | 0,80 | 0,722 | 1,38504 | 2,23 |
| 0,078 | 1,00 | 0,922 | 1,08460 | 1,79 |

Viedään arvot $1/r, F$ mittausohjelmaan.

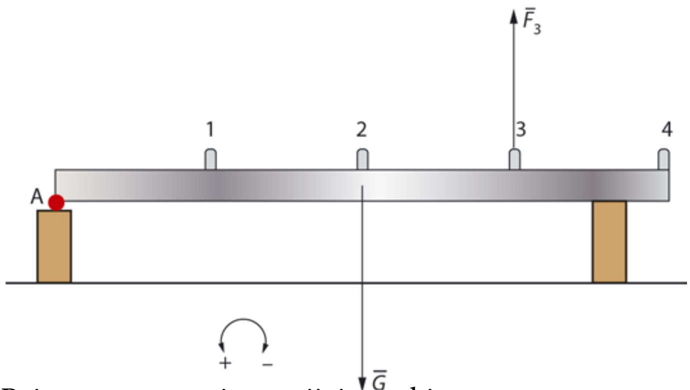


Voiman momentti on $1/r,F$-koordinaatistossa esitetyn suoran

$F = M \cdot \frac{1}{r}$ kulmakerroin.

Mittausohjelman mukaan voiman momentti on 1,6 Nm vastapäivään.

**9-10.** Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi. Tukki irtoaa tueltaan, jos nostavan voiman momentti positiiviseen kiertosuuntaan on suurempi kuin painon momentti negatiiviseen kiertosuuntaan. Tällöin tukki joutuu pyörimisliikkeeseen akselin A ympäri.




Painon momentti negatiiviseen kiertosuuntaan on

$$M_G = -Gr_G = -mgr_G = -46\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}5\ \text{m} = -676{,}89\ \text{Nm}.$$

Kahvasta nostettaessa voiman momentin pitää olla positiiviseen kiertosuuntaan suurempi kuin 676,89 Nm.

Rajatapauksessa, jolloin tukki on irtoamassa alustastaan, voiman momentti on

$$M_\text{A} = Fr = 676{,}89\ \text{Nm, eli}\ F = \frac{M_\text{A}}{r} = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{r}.$$

Näin ollen eri kahvoista nostettaessa tarvittavan voiman suuruus on suurempi kuin

$$F_1 = \frac{676,89\ \text{Nm}}{r_1} = \frac{676,89\ \text{Nm}}{0,75\ \text{m}} \approx 900\ \text{N},$$

$$F_2 = \frac{676,89\ \text{Nm}}{r_2} = \frac{676,89\ \text{Nm}}{1,50\ \text{m}} \approx 450\ \text{N},$$

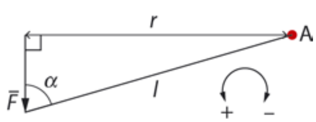
$$F_3 = \frac{676,89\ \text{Nm}}{r_3} = \frac{676,89\ \text{Nm}}{2,25\ \text{m}} \approx 300\ \text{N} \text{ ja}$$

$$F_4 = \frac{676,89\ \text{Nm}}{r_4} = \frac{676,89\ \text{Nm}}{3,0\ \text{m}} \approx 230\ \text{N}.$$

Huomaa: Osoittajan tarkkuus on kaksi merkitsevää numeroa. Siksi vastaustenkin tarkkuus on kaksi merkitsevää numeroa.

**9-11.** Polkupyörän polkimeen kohdistuu pyöräilijän painon suuruinen voima eli $F = G$.

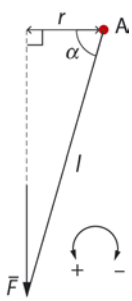
**a)** Voiman momentti on




$$M_A = Fr = Gr = mgr = mgl\sin\alpha = 57\ \text{kg} \cdot 9,81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,17\ \text{m} \cdot \sin 75° \approx 92\ \text{Nm}.$$

Momentti on 92 Nm vastapäivään.

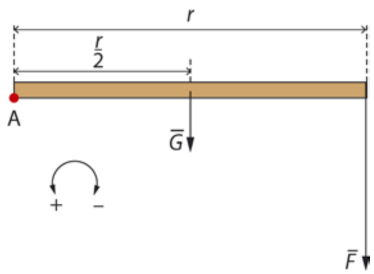
**b)** Voiman momentti on



$$M_A = Fr = Gr = mgr = mgl\cos\alpha = 57\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}17\ \mathrm{m} \cdot \cos 75° \approx 25\ \mathrm{Nm}.$$

Momentti on 25 Nm vastapäivään.

**9-12.**




Uimahyppääjän paino on yhtä suuri kuin uimahyppääjän jalkapohjien lautaan kohdistama voima $\overline{F}$. Voiman $\overline{F}$ ja laudan painon $\overline{G}$ momenttien suunnat ovat negatiivisia akselin A suhteen.

$$\sum M_A = -G \cdot \frac{r}{2} - Fr = -m_{\mathrm{lauta}} g \cdot \frac{r}{2} - m_{\mathrm{hyppääjä}} g \cdot r$$

$$= -15\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{2{,}0\ \mathrm{m}}{2} - 78\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}0\ \mathrm{m} \approx -1700\ \mathrm{Nm}.$$

Momentti on 1800 Nm myötäpäivään. Huomaa: Laudan vapaa pää voi olla myös vasemmalla, jolloin kiertosuunta on vastapäivään.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**10-1.** **a)** Laatikot kaatuvat järjestyksessä 1, 5, 3, 4, 6 ja 2.

**b)** Laatikot kaatuvat aina samassa järjestyksessä, koska kukin laatikko lähtee kaatumaan sillä hetkellä, kun painopiste siirtyy kallistettaessa tukipinnan ulkopuolelle. Mitä pidempi tukipinta on kaltevan tason suunnassa, sitä jyrkempi kulma tarvitaan, että laatikko kaatuisi.

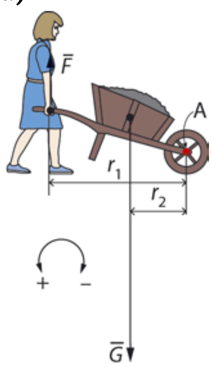
**10-2.** **b)** Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla.
Yhtälöstä $\sum M = G_{\text{varsi}} r_{\text{varsi}} - G_{\text{harja}} r_{\text{harja}} = 0$ saadaan $G_{\text{harja}} r_{\text{harja}} = G_{\text{varsi}} r_{\text{varsi}}$. Harjaosan ja varsiosan momentit sormen kosketuskohdan suhteen ovat yhtä suuret. Harjaosan painopiste on lähempänä tukipistettä, joten harjaosan voiman varsi on pienempi kuin varsiosan. Koska $G_{\text{harja}} = \dfrac{r_{\text{varsi}}}{r_{\text{harja}}} G_{\text{varsi}}$, harjaosa on painavampi.

**10-3.** **a)** Painonnostokilpailussa painoja on helpompi nostaa, jos painot ovat yhtä suuret ja tangon eri päissä. Painopiste on tangon geometrisessä keskipisteessä. Painonnostaja pyrkii asettamaan kätensä yhtä kauas tangon painopisteestä (geometrisestä keskipisteestä).

**b)** Painonnostossa käytetään leveää otetta, jolloin tanko on mahdollisimman helppo pitää tasapainossa. Raskaat levyt tangon päissä aiheuttavat suuren momentin tankoon. Jos kädet olisivat lähekkäin, pienikin ero käsien ja tangon keskipisteen välisissä etäisyyksissä aiheuttaisi suuren eron vasempaan ja oikeaan käteen kohdistuvissa voimissa. Samoin pienikin tangon kiertoliike tangon keskipisteen ympäri noston aikana olisi vaikea pysäyttää, nostaja menettäisi helposti tasapainonsa sivusuunnassa.

**10-4.** Joidenkin kukkien, esimerkiksi tulppaanien, varsi kasvaa nopeasti maljakossa. Samalla maljakon pohjalla oleva vesi vähenee sen noustessa varteen. Kukat voivat taipua kasvaessaan kauas reunan yli, ja kukka-asetelman painopiste muuttuu. Maljakon, veden ja kukkien yhteinen painopiste voi siirtyä maljakon kapean pohjan tukipinnan ulkopuolelle, varsinkin jos kukat taipuvat samaan suuntaan. Näin maljakko voi kaatua itsestään.

**10-5.** **a)**




Tasapainotilassa kärryyn kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla eli $\Sigma M_A = 0$.

Yhden käden kärryn aisaan kohdistama voima on $\overline{F}$. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, saadaan yhtälö

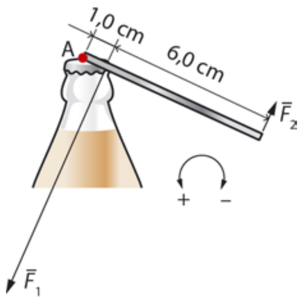
$-2Fr_1 + Gr_2 = 0$

$2Fr_1 = Gr_2$, joten

$$F = \frac{Gr_2}{2r_1} = \frac{430\ \text{N} \cdot 0{,}47\ \text{m}}{2 \cdot 1{,}2\ \text{m}} \approx 84\ \text{N}.$$

Kumpaankin käteen kohdistuva voima on yhtä suuri eli 84 N, mutta vastakkaissuuntainen (alas).

**b)**




Tasapainotilassa avaajaan kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla eli $\Sigma M_A = 0$.

Kun suunta vastapäivään on sovittu positiiviseksi, saadaan yhtälö

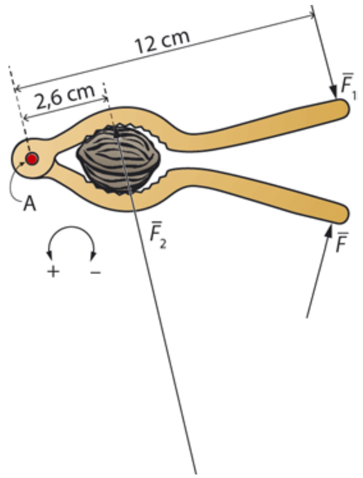
$-F_1 r_1 + F_2 r_2 = 0$ eli

$F_1 r_1 = F_2 r_2$, joten

$$F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1} = \frac{F_2 \cdot 7{,}0 \text{ cm}}{1{,}0 \text{ cm}} = 7{,}0\ F_2.$$

Korkin reunan avaajaan kohdistama voima $\overline{F}_1$ on yhtä suuri ja vastakkaissuuntainen kuin avaajan korkkiin kohdistama voima $-\overline{F}_1$. Korkin reunaan kohdistuva voima on 7,0-kertainen vääntävään voimaan verrattuna.

**10-6.**




Newtonin III lain mukaan varsi kohdistaa pähkinään yhtä suuren, mutta

vastakkaissuuntaisen voiman kuin pähkinä kohdistaa varteen. Särkymisen rajatapauksessa ylempään varteen kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla eli $\sum M_A = 0$.

Suunta vastapäivään on positiivinen, joten

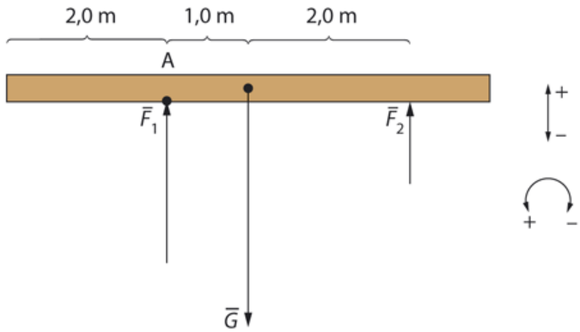
$-F_1r_1 + F_2r_2 = 0$ eli

$F_1r_1 = F_2r_2$, joten

särkijän kumpaakin vartta on painettava voimalla, jonka suuruus on

$$F_1 = \frac{F_2r_2}{r_1} = \frac{43\ \text{N} \cdot 0{,}026\ \text{m}}{0{,}12\ \text{m}} = 9{,}3\ \text{N}.$$

**10-7.** Tasapaksuun hirteen kohdistuva paino vaikuttaa hirren painopisteeseen eli keskipisteeseen. Hirren tasapainoehto pystysuunnassa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F_1 + F_2 - G = 0$.




Vasemmanpuoleisen tukivoiman $\overline{F}_1$ vaikutuskohta on A. Valitaan kohta A momenttiakseliksi. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, akselin A suhteen momenttiyhtälö on $\sum M_A = -G \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 = 0$.

Tukivoiman $\overline{F}_2$ suuruus on

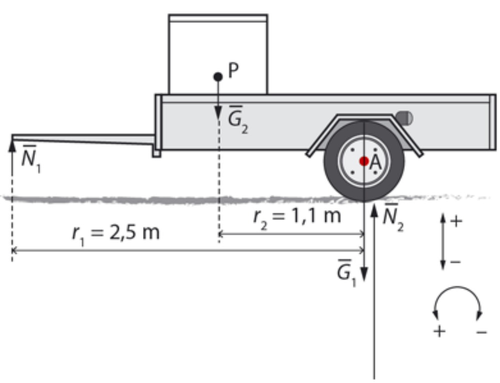
$$F_2 = \frac{mgr_1}{r_2} = \frac{140 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}0 \text{ m}}{3{,}0 \text{ m}} = 457{,}8 \text{ N}.$$

Tukivoiman $\overline{F}_1$ suuruus saadaan yhtälöstä $F_1 + F_2 - G = 0$ , joten

$$F_1 = G - F_2 = mg - F_2 = 140 \text{kg} \cdot 9{,}81 \text{m/s}^2 - 457{,}8 \text{N} \approx 915{,}4 \text{N}.$$

Voimat ovat 460 N ja 920 N.

**10-8.**



**a)** Valitaan pyörän akseli A momenttiakseliksi. Kärryyn kohdistuvan painon $\overline{G}_1$ ja pyöriin kohdistuvan tukivoiman $\overline{N}_2$ vaikutussuoran etäisyys akselista A on 0,0 m, joten näillä voimilla ei ole vääntövaikutusta akselin A suhteen. Tasapainotilanteessa voimien momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, akselin A suhteen momenttiehto on $\sum M_{\mathrm{A}} = 0$ eli $G_2 r_2 - N_1 r_1 = 0$, josta tukivoiman $\overline{N}_1$ suuruus on

$$N_1 = \frac{G_2 r_2}{r_1} = \frac{m_2 g r_2}{r_1} = \frac{65\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}1\ \mathrm{m}}{2{,}5\ \mathrm{m}} = 280{,}566\ \mathrm{N} \approx 280\ \mathrm{N}$$

ja suunta on ylös.

**b)** Peräkärry on tasapainossa, joten tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{G}_1 + \overline{G}_2 = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$N_1 + N_2 - G_1 - G_2 = 0$,

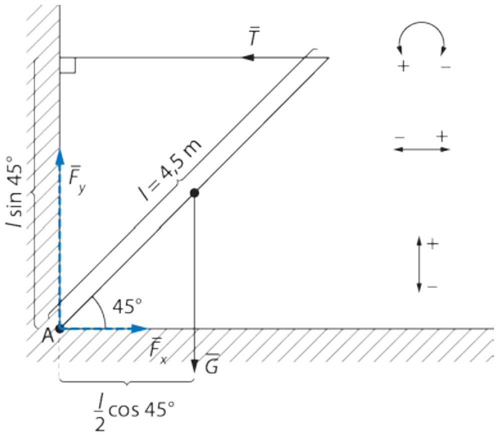
josta ratkaistaan pyöriin kohdistuvan tukivoiman suuruus:

$N_2 = G_1 + G_2 - N_1 = m_1 g + m_2 g - N_1$

$= 570\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} + 65\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - 280{,}566\ \mathrm{N} \approx 5900\ \mathrm{N}$ ja suunta on ylös.

**c)** Kun peräkärry kuormataan, peräkärryn aisa ei saa nousta itsestään ylös, jos aisaa ei tueta. Jos pesukone sijoitetaan kuvatussa tilanteessa pyörien taakse, aisa nousee itsestään ylös. Jos tällainen aisa kiinnitetään auton vetokoukkuun, aisasta koukkuun kohdistuvan voiman suunta on ylös. Vetokoukkuun ylös suuntautuva voima voi jossakin tilanteessa aiheuttaa perän kevenemisen niin, että takapyörät menettävät sivusuuntaisen pitonsa. Huomaa, että koukkuun kiinnitetty väärin kuormatun kärryn aisa ei irtoa koukusta, vaan nostaa koukkua ja samalla auton perää.

**10-9.**




**a)** Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, tangon alapään akselin A suhteen momenttiyhtälö on $\sum M_{\mathrm{A}} = Tr_1 - G \cdot r_2 = 0$, joka geometrian perusteella on

$\sum M_{\mathrm{A}} = Tl \sin 45° - G \cdot \dfrac{l}{2} \cdot \cos 45° = 0$, kun $l$ on lipputangon pituus.

$\overline{T}$ on vaijerin jännitysvoima. Sen suuruus on

$$T = \frac{m_1 g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45°}{l \sin 45°} = \frac{m_1 g \cdot \cos 45°}{2 \cdot \sin 45°} = \frac{78\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \cos 45°}{2 \cdot \sin 45°} = 382{,}59\,\mathrm{N} \approx 380\ \mathrm{N}.$$

**b)** Tangon tasapainoehto on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli vaakasuunnassa $\overline{F}_x + \overline{T} = \overline{0}$ . Kun suunta oikealle on positiivinen, skalaariyhtälöstä $F_x - T = 0$ voiman $\overline{F}$ $x$-komponentin suuruudeksi saadaan

$F_x = T = 382{,}59$ kN.

Tangon tasapainoehto on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli pystysuunnassa $\overline{F}_y + \overline{G}_1 = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F_y - G_1 = 0$. Voiman $\overline{F}$ $y$-komponentin suuruudeksi saadaan

$$F_y = m_1 g = 78\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 765{,}18\,\text{N}.$$

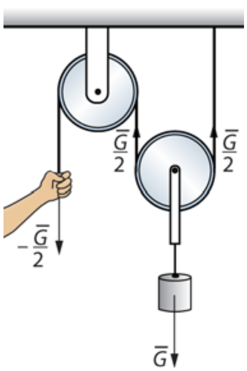
Voiman $\overline{F}$ suuruus on

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(382{,}59\,\text{N})^2 + (765{,}18\,\text{N})^2} = 855{,}497\,\text{N} \approx 860\ \text{N}.$$

Voiman suunta saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{765{,}18\ \text{N}}{382{,}497\ \text{N}},\ \text{josta kulma on } \alpha \approx 63°.$$

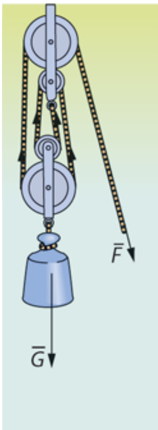
**10-10.** **a)**




Köyden jännitysvoima on joka kohdassa yhtä suuri. Koska kuormaa kannattelee kaksi köyttä, nostoon tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{25\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{2} \approx 120\,\text{N}.$$

**b)**

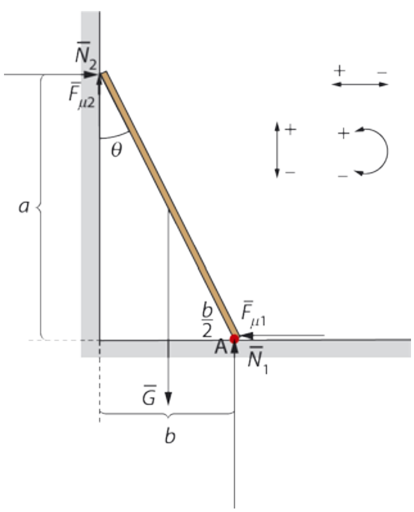



Köyden jännitysvoima on joka kohdassa yhtä suuri. Koska kuormaa kannattelee neljä köyttä, nostoon tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{G}{4} = \frac{mg}{4} = \frac{120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{4} \approx 290\ \text{N}.$$

Huomaa, että taljan kahteen pyörään kohdistuu köysien jännitysvoimat, joiden suuruudet ovat $G/4$.

**10-11.** Kuvaan on merkitty lankkuun vaikuttavat voimat.



Lankun alapäässä vaikuttavat lattian tukivoima $\overline{N}_1$ ja kitka $\overline{F}_{\mu 1}$. Yläpäässä lankkuun kohdistuu seinän tukivoima $\overline{N}_2$ ja koska seinä oletettiin liukkaaksi, kitka $F_{\mu 2} \approx 0$ N. Lankun painopisteessä vaikuttaa lankkuun kohdistuva paino $\overline{G}$.

Tasapainoehto etenemisen suhteen pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$ eli $\overline{N}_1 + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N_1 - G = 0$ saadaan $N_1 = G$.

Tasapainoehto vaakasuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F}_x = \overline{0}$. eli $\overline{N}_2 + \overline{F}_{\mu 1} = \overline{0}$. Kun suunta oikealle on positiivinen, skalaariyhtälöstä

$N_2 - F_{\mu 1} = 0$ saadaan $N_2 = F_{\mu 1} = \mu N_1 = \mu G$.

Asetetaan momenttiakseli pisteeseen A. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, tasapainotilanteessa momenttien summa akselin A suhteen on $\Sigma M_A = 0$ eli $-N_2 a + G \cdot \frac{1}{2} b = 0$. Koska $N_2 = \mu G$, momenttiehto $-N_2 a + G \cdot \frac{1}{2} b = 0$ saadaan muotoon $-\mu G a + G \cdot \frac{1}{2} b = 0$ eli $-\mu a + \frac{1}{2} b = 0$,

josta saadaan $\frac{b}{a} = 2\mu$.

Toisaalta suorakulmaisen kolmion trigonometrian perusteella on

$\tan\theta = \frac{b}{a}$, joten yhtälöstä

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = 2\mu = 2 \cdot 0{,}42 = 0{,}84$$

saadaan kulma $\theta \approx 40°$.

Lankku voidaan asettaa seinään nähden korkeintaan 40°:n kulmaan.

## TESTAA, OSAATKO S. 101

**1.** c **2.** a **3.** a **4.** b **5.** a b **6.** b **7.** c **8.** b **9.** b c **10.** b

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**11-1.** **a)** Pulkan vetonarun pulkkaan kohdistama voima isän vetäessä lasta pulkassa. Hissin vaijerien välittämä voima hissin noustessa ylös. Käsien tarjottimeen kohdistama voima kannettaessa ruoka-annosta ruokalan pöytään.

**b)** Putoavaan lumihiukkaseen vaikuttava ilmavastus. Suksiin vaikuttavan kitkan tekemä työ. Käsien tekemä työ laskettaessa reppua lattialle.

**c)** Naulakon koukun takkiin kohdistama voima. Matkalaukun paino laukun liikkuessa liukuhihnalla. Lepokitkan tekemä työ pöydän pinnalla olevaan kappaleeseen.

**11-2.** **a)** Paino on kohtisuorassa lattian suuntaista siirtymää vastaan, joten se ei tee työtä.

**b)** Jos opettaja liikkuu vakionopeudella, kirjoihin liikkeen suunnassa vaikuttava voima on nolla. Opettajan kirjoihin kohdistama voima ei tee silloin työtä. Lähtiessään liikkeelle opettajan täytyy kohdistaa kirjoihin liikkeen suuntainen voima, jotta myös kirjat lähtevät liikkeelle (eli ovat kiihtyvässä liikkeessä). Tässä vaiheessa opettajan käsien voima tekee työtä.

**11-3.** **a)** Työ on $W = F \cdot s = 205 \text{ N} \cdot 2{,}0 \text{ m} = 410 \text{ Nm} = 410 \text{ J}$.

**b)** Työ on $W = F\cos\alpha \cdot s = 205 \text{ N} \cdot \cos 45° \cdot 2{,}0 \text{ m} = 289{,}914 \text{ J} \approx 290 \text{ J}$.

**11-4.** **a)** Koska piano lasketaan tasaisella nopeudella, on nosturin pianoon kohdistama voima $\overline{F}$ saman suuruinen kuin pianon paino $\overline{G}$ eli $F = G = mg$. Voiman $\overline{F}$ suunta on ylöspäin eli vastakkainen siirtymälle.

Voiman tekemä työ on silloin

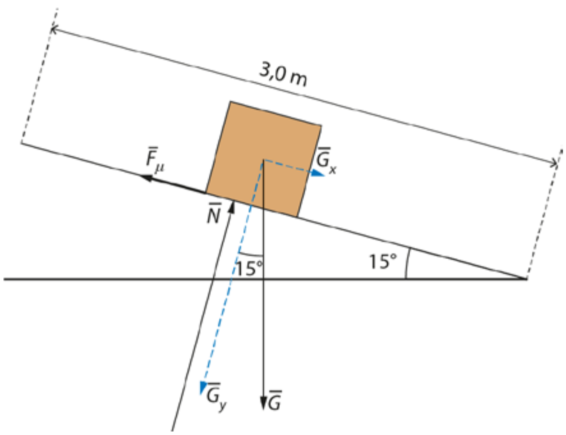
$$W = -F \cdot s = -mg \cdot s = -220\ \text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = -25{,}8984\ \text{kJ} \approx -26\ \text{kJ}.$$

Painon tekemä työ on

$$W = G \cdot s = mg \cdot s = 220\ \text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = 25{,}8984\ \text{kJ} \approx 26\ \text{kJ}.$$

**b)** Painon tekemä työ on sama kuin edellisessä tapauksessa eli 26 kJ.

**11-5.** **a)** Työtä tekevät voimat ovat pyöriin vaikuttava kitkavoima $\overline{F}_\mu$ liikkeen suunnassa ja vastakkaisessa suunnassa painon $\overline{G}$ luiskan suuntainen komponentti $\overline{G}_x$.




**b)** Koska luiskan kaltevuus on 15°, on $\overline{G}_x$:n suuruus

$$G_x = G\sin 15° = mg \cdot \sin 15° = 82\ \text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}2588 = 208{,}184\ \text{N}.$$

Oletetaan, että pyörätuoli liikkuu likimain vakionopeudella. Silloin kitkan $\overline{F}_\mu$ suuruus on sama kuin vastakkaiseen suuntaan vaikuttavan voiman $\overline{G}_x$ suuruus eli $F_\mu$=208,184 N. Voiman tekemäksi työksi saadaan silloin

$$W = F_\mu \cdot d = 208{,}184\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} \approx 620\ \text{J}.$$

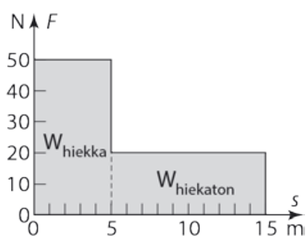
**11-6.** Anodin ja katodin välinen jännite on $U = Ed$, josta saadaan sähkökentän voimakkuudelle $E = \frac{U}{d}$. Sähköinen voima on suuruudeltaan $F = Eq$, jossa $q$ on hiukkasen varauksen suuruus. Sähköisen voiman tekemä työ on

$$W = Fd = Eqd = \frac{U}{d}qd$$
$$= Uq = 4{,}0\ \text{V} \cdot 1{,}60218 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 4{,}0\ \text{eV} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

**11-7.** Työ saadaan summana

$$W = W_{\text{hiekka}} + W_{\text{hiekaton}} = F_{\text{hiekka}} \cdot s_{\text{hiekka}} + F_{\text{hiekaton}} \cdot s_{\text{hiekaton}}$$
$$= 50\ \text{N} \cdot 5{,}0\ \text{m} + 20\ \text{N} \cdot 10{,}0\ \text{m} = 450\ \text{J}.$$

Laskukaavasta voi päätellä, että työ on voiman kuvaajan alle jäävä pinta-ala.



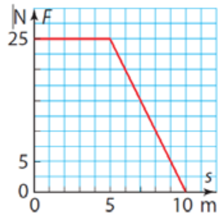

**11-8.** **a)** Yhtälöstä $P = Fv$ saadaan ratkaistua voima $F$:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{380 \cdot 10^3\ \text{W}}{\frac{37}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 37\ \text{kN}.$$

**b)** Koska sinivalas ui tasaisella vauhdilla, on liikkeen suuntainen kokonaisvoima nolla. Täten veden vastusvoima on samansuuruinen kuin voima $F$ eli 37 kN.

**c)** Valas kohdistaa pyrstönsä liikkeillä veteen voiman. Newtonin III lain mukaan vesi kohdistaa valaaseen yhtä suuren vastakkaissuuntaisen voiman. Tämä voima pitää valaan liikkeessä.

**11-9.** **a)** Työ on voiman kuvaajan ja vaaka-akselin väliin jäävä fysikaalinen pinta-ala. Se on $W = 5,0\ \text{m} \cdot 25\ \text{N} + \frac{1}{2} \cdot 5,0\ \text{m} \cdot 25\ \text{N} \approx 190\ \text{J}$.




**b)** Ensimmäisen 5 m:n matkalla voima on vakio, joten liike on tasaisesti kiihtyvää.

**c)** Koko 10 m:n matkan ajan kappaleeseen on vaikuttanut positiivinen voima, joten kappaleen nopeus on ollut koko ajan kiihtyvää. 10 metrin jälkeen kappale jatkaa liikettään sillä nopeudella, jonka se on sitä ennen saavuttanut.

**11-10.** **a)** Nostava voima on sama kuin koneen paino eli $F = mg$, joten työ on

$$W = F \cdot h = mg \cdot h = 560 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 11 \cdot 10^3\,\text{m} = 60,4296\ \text{GJ} \approx 60\ \text{GJ}.$$

**b)** Lentokone nousee 11 km:n korkeuteen teholla

$$P = \frac{W}{t} = \frac{60,4296\ \text{GJ}}{42 \cdot 60\ \text{s}} \approx 24\ \text{MW}.$$

**11-11.** Lentokoneen liikkeen ylläpitämiseksi tarvittava teho on $P = Fv$, jossa $F$ on ilmanvastuksen voittamiseen tarvittava eteenpäin suuntautuva voima. Kun $F$ on samansuuruinen kuin ilmanvastus, liike tapahtuu tasaisella nopeudella. Voimaksi saadaan

$$F = \frac{P}{v} = \frac{180\ \text{kW}}{\frac{280}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2,31429\ \text{kN}.$$

Tämä voima tekee työn

$$W = Fs = 2,31429\ \text{kN} \cdot 150\ \text{km} \approx 350\ \text{MJ}.$$

**11-12.** Teho on $P = F_t v$ , joten työntövoima on

$$F_t = \frac{P}{v} = \frac{21 \cdot 10^6\ \text{W}}{\frac{1400}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 54\,\text{kN}.$$

**11-13.** Lasketaan ensin askelmien määrä:

$$\text{askelmien määrä} = \frac{\text{korkeusero}}{\text{askelman korkeus}} = \frac{15\ \text{m}}{0,20\ \text{m}} = 75.$$

Liukuportaiden kuljettama massa on silloin $m = 75 \cdot 60,0\ \text{kg} = 4500\ \text{kg}$. Liukuportaat liikkuvat tasaisesti, joten ylöspäin vaikuttavan voiman $F$ on oltava saman suuruinen kuin alaspäin vaikuttava paino eli $F = mg$. Sen voiman tekemä työ on $W = F \cdot h = mg \cdot h$, jossa $h = 15$ m.

Tehon laskemiseksi pitää tietää nousuaika. Portaiden pituus on

$$L = \frac{h}{\sin 30°} = \frac{15\ \text{m}}{0,5} = 30\ \text{m}.$$

Nousuaika on silloin $t = \frac{L}{v} = \frac{30\ \text{m}}{0,70\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 42,86\ \text{s}.$

Liukuportaiden nostavan voiman tehon on oltava vähintään

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mg \cdot h}{\frac{L}{v}} = \frac{4500\ \text{kg} \cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15\ \text{m}}{42,86\ \text{s}} \approx 15\ \text{kW}.$$

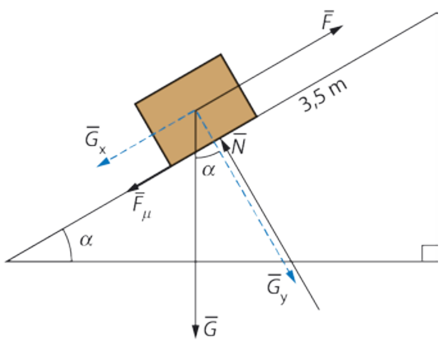
**11-14.** a) Jännitysvoiman liikkeen suuntainen osa on $T\cos 45°$. Sen tekemä työ saadaan työn yhtälöstä $W = Fs$ eli

$$W = Fs = T\cos 45° \cdot s = 21\ \text{N} \cdot \cos 45° \cdot 105\ \text{m} = 1559{,}17\ \text{J} \approx 1600\ \text{J}.$$

b) Voiman tekemän työn teho saadaan yhtälöstä $P = \dfrac{W}{t}$:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1559{,}17\ \text{J}}{55\ \text{s}} \approx 28\ \text{W}.$$

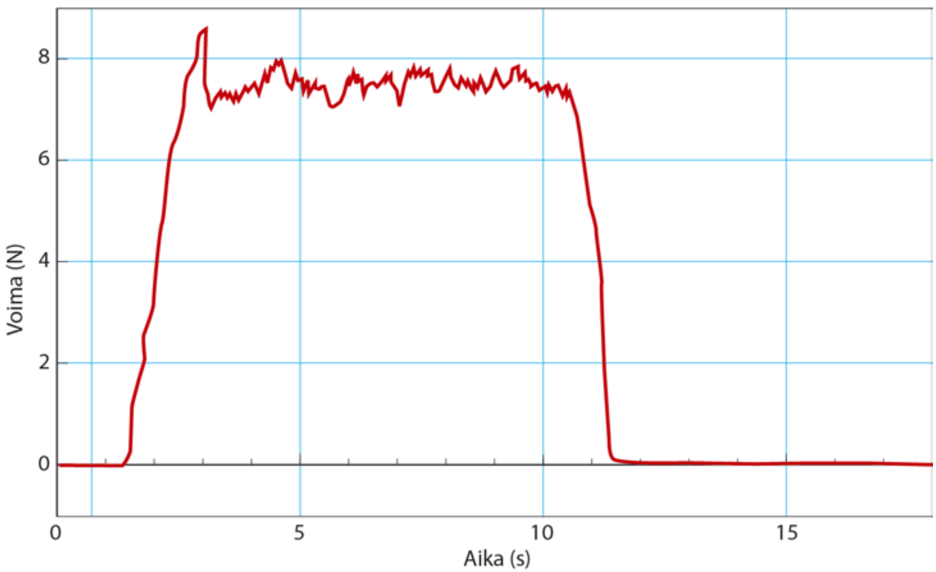
**11-15.** Kaalilaatikkoon vaikutti luiskan suunnassa kolme voimaa, voima $\overline{F}$, jolla viljelijä työnsi laatikkoa, laatikon painon komponentti luiskan suunnassa ja kitka. Koska liike oli tasaista, nämä vastakkaisiin suuntiin vaikuttaneet voimat olivat yhtä suuret eli $F = G_x + F_\mu$ ja $N = G_y$, jossa $G_x$ on painon komponentti luiskan suunnassa ja $G_y$ luiskaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Koska pinnan tukivoima ja painon pintaa vastaan kohtisuora komponentti ovat yhtä suuret, on kitkan suuruus $F_\mu = \mu N = \mu G_y$. Silloin



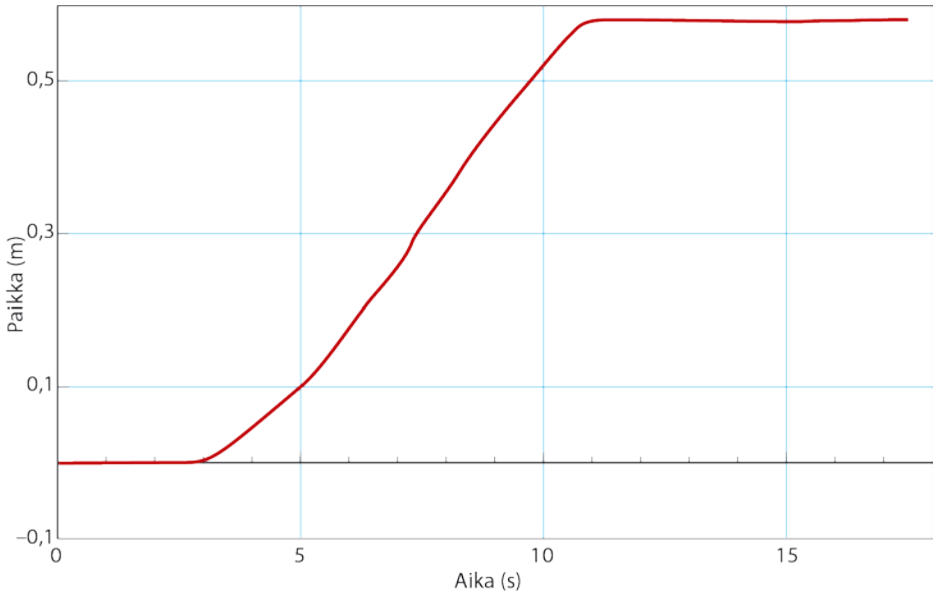

$$F = G_x + F_\mu = G_x + \mu G_y = G\cos\alpha + \mu G\sin\alpha = mg\cos\alpha + \mu mg\sin\alpha$$
$$= 45\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \left(\sin 38° + 0{,}32 \cdot \cos 38°\right) = 383{,}101\ \text{N}.$$

Voiman tekemä työ on $W = F \cdot s = 434{,}838\ \text{N} \cdot 3{,}5\ \text{m} \approx 1{,}3\ \text{kJ}.$

**11-16.** **a)** Kuvaajasta nähdään, että sen jälkeen kun kappale on lähtenyt liikkeelle hetkellä noin 3 s (lepokitka muuttuu silloin liikekitkaksi), kappaletta vetävän voiman suuruus vaihtelee välillä 7 N – 8 N. Keskimääräisen voiman suuruudeksi voidaan arvioida $F \approx 7{,}5$ N.




**b)** Aika-paikka-kuvaajasta voidaan määrittää kappaleen kulkemaksi matkaksi $s \approx 0{,}54$ m. Työn yhtälöstä $W = Fs$ saadaan silloin voiman tekemäksi työksi $W \approx 7{,}5\text{ N} \cdot 0{,}54\text{ m} \approx 4{,}0$ J.




**c)** Kohdan b kuvaajasta saadaan voima vaikutusajaksi $t \approx 11\text{ s} - 3\text{ s} = 8\text{ s}$.
Tehon yhtälöstä $P = \dfrac{W}{t}$ saadaan voiman tehoksi $P = \dfrac{W}{t} \approx \dfrac{4{,}0\text{ J}}{8\text{ s}} = 0{,}5\text{ W}$.

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**12-1.** **a)** Liike-energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 60\text{ kg} \cdot \left(\frac{6}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 83\text{ J}.$

**b)** Liike-energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\text{ kg} \cdot \left(\frac{100}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 3{,}9\text{ kJ}.$

**12-2.** Henkilöauton liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1250\text{ kg} \cdot \left(\frac{90{,}0}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 390{,}625\text{ kJ}.$$

Liike-energian yhtälöstä saadaan rekan nopeudeksi

$$v_{\text{rekka}} = \sqrt{\frac{2E_k}{m_{\text{rekka}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 390{,}625 \cdot 10^3\text{ J}}{40 \cdot 10^3\text{ kg}}} = 4{,}41942 \cdot 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 16\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

**12-3.** **a)** Liike-energia on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Esimerkiksi jos nopeus kaksinkertaistuu, liike-energia nelinkertaistuu.

**b)** Koska nopeus pienenee puoleen alkuperäisestä arvostaan, liike-energia pienenee neljäsosaan.

**12-4.** **a)** Auton nopeus 180 metrin kohdalla on 100 km/h. Sen liike-energia on silloin $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1250\text{ kg} \cdot \left(\frac{100}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0{,}482253\text{ MJ} \approx 0{,}48\text{ MJ}.$

**b)** Koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön, liike-energia pienenee puoleen silloin, kun nopeus pienee tekijällä $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$ eli nopeus on $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 100$ km/h. Kun kiihtyvyys on vakio, auton nopeus hetkellä $t$ on $v = at$ ja auton kulkema matka $s = \frac{1}{2}at^2$.

Ratkaisemalla ensimmäisestä yhtälöstä aika, $t=\frac{v}{a}$, ja sijoittamalla se

jälkimmäiseen yhtälöön, saadaan $s=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$ eli $v^2=2as$.

Saadaan verranto $\frac{2ax}{2a\cdot 180\text{ m}}=\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 100\text{ km/h}}{100\text{ km/h}}\right)^2$ eli $\frac{x}{180\text{ m}}=\frac{1}{2}$,

jossa $x$ on kysytty matka.

Saadaan $x=180\text{ m}\cdot\frac{1}{2}\approx 90\text{ m}$.

**12-5.** Jousen aiheuttaman voiman tekemä työ on

$W=F\cdot s=102\text{ N}\cdot 0{,}73\text{ m}=73{,}7446\text{ J}$.

Tämä työ on työ-energiaperiaatteen mukaan sama kuin nuolen liike-energian muutos eli

$$W=\Delta E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^{\ 2}=\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}-0.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä nuolen saavuttama nopeus:

$$v_1=\sqrt{\frac{2\cdot W}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 73{,}7446\text{ J}}{0{,}085\text{ kg}}}\approx 42\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**12-6.** Molemmissa tapauksissa loppunopeus on nolla. Jarruttavan voiman $\overline{F}$ tekemä työ on liike-energian muutos eli

$$W=0-\frac{1}{2}mv^{\ 2}=-\frac{1}{2}mv^{\ 2}.$$

Toisaalta voiman tekemä työ on $W=-Fx$, jossa etumerkki johtuu siitä, että voiman suunta on vastakkainen siirtymän suuntaan nähden.

Saadaan yhtälö

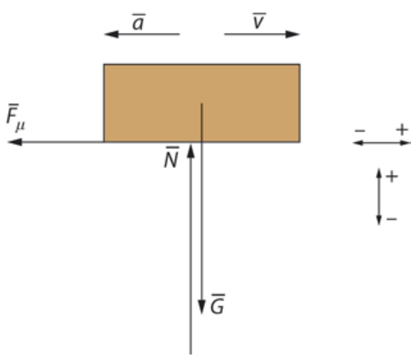
$$F\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 \text{ eli } \Delta x = \frac{m}{2F}v^2.$$

Koska auton massa $m$ ja jarruttava voima $F$ ovat molemmissa tapauksissa samat, havaitaan että jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Silloin

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{\left(120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{\left(60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 4 \text{ eli } \Delta x_2 = 4\Delta x_1 = 4 \cdot 20\ \text{m} = 80\ \text{m}.$$

Jarrutusmatka on 80 m.

**12-7.** **a)**




Työ-energiaperiaatteen mukaan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kokonaisvoiman tekemä työ eli $\Delta E_k = W$. Vastusvoimien (kitka ja ilmanvastus) suunta on siirtymän suunnalle vastakkainen, joten niiden tekemä työ on negatiivinen. Koska ilmanvastus oletetaan nollaksi, työ-energiaperiaatteen mukaan on $\Delta E_k = -F_\mu \cdot \Delta x$, jossa kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$.

Kappaleen liikeyhtälö $y$-suunnassa on Newtonin II lain mukaan
$\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G} + \overline{N} = \overline{0}.$ Suunta ylös on positiivinen, joten $G - N = 0$ eli $N = G.$

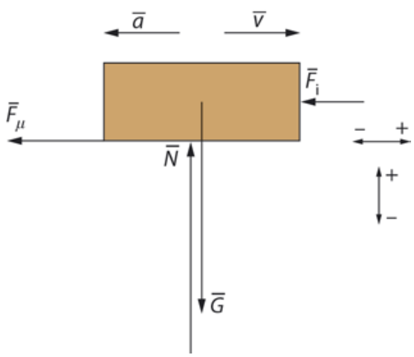
Työ-energiaperiaate saa muodon

$\Delta E_{\mathrm{k}} = -F_{\mu} \cdot \Delta x = -\mu N \cdot \Delta x = -\mu G \cdot \Delta x.$ Koska auto pysähtyy on, liike-energia lopussa on nolla, joten $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x$ . Auton jarrutusmatkaksi saadaan

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{65}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0,60 \cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \approx 28\ \mathrm{m}.$$

Huomataan, että jarrutusmatka ei riipu auton massasta, joten vastaus on sama molemmille autoille.

**b)**




Jos ilmanvastus otetaan huomioon, työperiaate saa muodon
$\Delta E_{\mathrm{k}} = -F_{\mu} \cdot \Delta x - W_{\mathrm{i}}$, jossa $W_{\mathrm{i}}$ on ilmanvastuksen tekemä työ. Työperiaate saa kohdan a perusteella muodon $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x - W_{\mathrm{i}}$ , josta ratkaistaan jarrutusmatka:

$$\mu mg\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - W_\mathrm{i},$$

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - W_\mathrm{i}}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}.$$

Ilmanvastuksen suuruuteen vaikuttavat ilman tiheys, auton muoto, pinta-ala ja nopeus. Ne ovat molemmille autoille samat, joten ilmanvastuksen tekemä työ on yhtä suuri molemmille autoille. Jarrutusmatkaan vaikuttavista suureista vain massa on autoille eri suuri. Mitä suurempi massa on, sitä pienempi on lauseke $\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ ja sitä vähemmän termi $-\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ lyhentää kohdassa a laskettua jarrutusmatkaa. Lastatun auton jarrutusmatka on pitempi.

**12-8.** Täydennetään taulukkoon vaunujen liike-energiat $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ (kg) | 0,1561 | 0,2287 | 0,3043 | 0,3803 | 0,4563 |
| $v$ (m/s) | 2,475 | 2,041 | 1,767 | 1,582 | 1,529 |
| $E_\mathrm{k}$ (J) | 0,478105 | 0,476346 | 0,475056 | 0,475893 | 0,533378 |

Taulukosta päätellään, että 0,4563 kg:n massaisen vaunun tapauksessa nopeuden mittaus ei ole luotettava, koska saatu liike-energian arvo poikkeaa muista tapauksista selvästi. Määritetään liike-energia muista mittausarvoista keskiarvona. Saadaan $E_\mathrm{k}$ = 0,47635 J ≈ 0,4764 J. Työperiaatteen mukaan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos, joten kuminauhan vaunuihin tekemä työ on $W$ = 0,4764 J.

**12-9.** Työperiaatteen mukaan tikan liike-energian muutos on sama kuin sen voiman tekemä työ, jonka taulu kohdistaa tikkaan tikan tunkeutuessa siihen. Koska tikan nopeus lopussa on nolla, saadaan yhtälö

$$0-\frac{1}{2}mv^2 = F\cdot s \text{, josta saadaan}$$

$$F=-\frac{mv^2}{2s}=-\frac{0{,}025\ \text{kg}\cdot(7{,}0\ \text{m/s})^2}{2\cdot 0{,}005\ \text{m}}\approx -120\ \text{N}.$$

Voiman suuruus on 120 N, tikan lentosuuntaa vastaan.

**12-10. a)**

* Koska $P \sim v^3$, nopeuden kasvaminen 3 tekijällä kasvattaa tehoa tekijällä $3^3 = 27$.

* Koska $P \sim r^2$, lavan pituuden $r$ kasvattaminen tekijällä 3 kasvattaa tehoa tekijällä $3^2 = 9$.

* Koska $P \sim r^2 v^3$, lavan pituuden ja tuulen nopeuden kolminkertaistuessa teho kasvaa tekijällä $3^2 \cdot 3^3 = 243$.

**b)** Teho on

$$P=\frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3=\frac{1}{2}0{,}29\cdot 1{,}293\ \text{kg/m}^3\cdot\pi\cdot(25\ \text{m})^2\cdot(5{,}2\ \text{m/s})^3\approx 52\ \text{kW}.$$

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**13-1.** **a)** Väärin. Potentiaalienergian nollatason voi valita tilanteen mukaan mille korkeudelle tahansa.

**b)** Oikein.

**c)** Oikein.

**d)** Oikein.

**e)** Oikein.

**f)** Väärin. Kun kappaleeseen vaikuttaa kitka, kappaleen mekaaninen energia ei säily vaan pienenee. Kitka on siis ei-konservatiivinen voima.

**13-2.** **a)** Potentiaalienergia on $E_{\mathrm{p}} = mgh = 55\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 8848\ \mathrm{m} = 4{,}8\ \mathrm{MJ}$.

**b)** Potentiaalienergia on
$E_{\mathrm{p}} = mgh = 55\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (-10994\ \mathrm{m}) = -5{,}9\ \mathrm{MJ}$.

**13-3.** Merkitään yhden portaan korkeutta $h$:lla. Silloin Matin potentiaalienergia kasvaa määrällä $\Delta E_{\mathrm{p,Matti}} = m_{\mathrm{Matti}} g \cdot 12h$ ja Liisan potentiaalienergia määrällä $\Delta E_{\mathrm{p,Liisa}} = m_{\mathrm{Liisa}} g \cdot 15h$. Koska potentiaalienergiat muuttuvat yhtä paljon, saadaan yhtälö $m_{\mathrm{Matti}} g \cdot 12h = m_{Liisa} g \cdot 15h$, josta voidaan ratkaista Liisan massa:

$$m_{\mathrm{Liisa}} = \frac{12}{15} m_{\mathrm{Matti}} = \frac{12}{15} \cdot 65\ \mathrm{kg} = 52\ \mathrm{kg}.$$

Oikea vastaus on b.

**13-4.** **a)** Potentiaalienergia on $E_{\mathrm{p}} = mgh = 5{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 25\ \mathrm{m} = 1226{,}25\ \mathrm{J} \approx 1{,}2\ \mathrm{kJ}$.

**b)** Potentiaalienergian muutos on

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p,l}} - E_{\mathrm{p,a}} = mgh_{\mathrm{l}} - mgh_{\mathrm{a}}$$
$$= mg(h_{\mathrm{l}} - h_{\mathrm{a}}) = 5{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (3{,}0\ \mathrm{m} - 25\ \mathrm{m}) \approx -1{,}1\ \mathrm{kJ}.$$

**13-5.** **a)** Potentiaalienergia maanpinnan suhteen on

$$E_{\mathrm{p}} = mgh = 1100\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 24\ \mathrm{m} \approx 0{,}26\ \mathrm{MJ}.$$

**b)** Nostavan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin rakennuselementin potentiaalienergian muutos:

$$W = \Delta E_{\mathrm{p}} = mg\Delta h = mg(h_{\mathrm{l}} - h_{\mathrm{a}}) = 1100\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(24\ \mathrm{m} - 2{,}0\ \mathrm{m}\right) \approx 0{,}24\ \mathrm{MJ}.$$

**13-6.** Kun ilmanvastusta ei huomioida ja nopeus oletetaan nousun alkaessa samaksi kuin nousun päätyessä, nousuun tarvittava energia on sama kuin potentiaalienergian muutos:

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = mg\left(h_{\mathrm{l}} - h_{\mathrm{a}}\right) = 1{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(10{,}70 \cdot 10^3\,\mathrm{m} - 0\ \mathrm{m}\right) \approx 20 \cdot 10^9\ \mathrm{J} = 20\ \mathrm{GJ}.$$

**13-7.** Koska nosto tapahtuu vakionopeudella, on laatikkoon vaikuttava kokonaisvoima nolla eli vaijerin jännitysvoima $T$ ja laatikkoon vaikuttava gravitaatiovoima $mg$ ovat samansuuruiset eli $T = mg$.

Laatikon massa on silloin $m = \dfrac{T}{g} = \dfrac{420\ \mathrm{N}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} = 42{,}8134\ \mathrm{kg} \approx 43\ \mathrm{kg}.$

Potentiaalienergia 4,5 m:n korkeudella on silloin

$$E_{\mathrm{p}} = mgh = 42{,}8134\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 4{,}5\ \mathrm{m} \approx 1{,}9\ \mathrm{kJ}.$$

Sama tulos saadaan myös laskemalla jännitysvoiman tekemä työ:

$$W = T \cdot h = 420\ \mathrm{N} \cdot 4{,}5\ \mathrm{m} \approx 1{,}9\ \mathrm{kJ}.$$

**13-8.** **a)** Putoavan veden massa on

$$m = \rho V = \rho A h = 1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 417 \cdot 10^6\ \text{m}^2 \cdot 0{,}55\,\text{m} \approx 229{,}35 \cdot 10^9\ \text{kg}\,.$$

Energiaa vapautuu potentiaalienergian muutoksen verran. Tehtävässä oletetaan, että pudotuskorkeus pysyy likimain vakiona.
Potentiaalienergian muutos on

$$\Delta E_\text{p} = mg\Delta h = 229{,}35 \cdot 10^9\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 3{,}0\ \text{m} = 6{,}7498 \cdot 10^{12}\ \text{J} \approx 6{,}7\ \text{TJ}\,.$$

Säännöstelyaltaassa veden pudotuskorkeus vaihtelee sen mukaan, kuinka täynnä allas on vettä.

Veden juoksutuksesta kahden viikon aikana saatava keskimääräinen teho on

$$P = \frac{E}{t} = \frac{6{,}7498 \cdot 10^{12}\ \text{J}}{14 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s}} \approx 5600\,\text{kW}\,.$$

Veden juoksutuksen aikana voisi toimia noin 5600 kappaletta 1,0 kW:n sähkölämmitintä, jos oletetaan, että kaikki vapautuva energia saadaan käyttöön.

**b)** Vesivoimalaitoksessa padotun veden potentiaalienergiaa muunnetaan sähköenergiaksi hyötysuhteella $\eta$, joten $\eta mgh = E_\text{anto} = Pt$. Sekunnissa voimalaitoksen läpi virtaavan veden määrä on 930 $\text{m}^3$. Veden tiheys on 1000 $\text{kg/m}^3$, joten veden massa on $m$ = 930 000 kg. Voimalaitoksen hyötysuhde on

$$\eta = \frac{Pt}{mgh} = \frac{170 \cdot 10^6\ \text{W} \cdot 1{,}0\ \text{s}}{930\,000\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 24\ \text{m}} \approx 0{,}78.$$

**c)** Veteen kohdistuva paino muuntaa veden potentiaalienergian liike-energiaksi, joka turbiineissa muunnetaan edelleen sähköksi.

Voimalaitoksen tuottoteho on

$$P = \frac{\eta E_\mathrm{p}}{t} = \frac{\eta mgh}{t} = \frac{\eta \rho Vgh}{t} = \frac{0{,}80 \cdot 1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 92\ \mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}0\ \mathrm{m}}{1{,}0\ \mathrm{s}}$$
$$\approx 2{,}2\ \mathrm{MW}.$$

**d)** Jos potentiaalienergian nollatasoksi valitaan turbiinien sijaintikohta, vesivarastossa olevan veden potentiaalienergia on

$$E_\mathrm{p} = mgh = \rho_\mathrm{vesi} Vgh = 1{,}00 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 5{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 240\mathrm{m}$$
$$= 1{,}342 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} \approx 13\ \mathrm{TJ}.$$

Oletetaan, että voimalaitos toimii 100 %:n hyötysuhteella. Kun vesi saapuu turbiiniin, se käyttää kaiken putoamisessaan saamansa energian eli potentiaalienergian $E_\mathrm{p} = mgh$ turbiinien pyörittämiseen. Teho on silloin $P = \frac{E_\mathrm{p}}{\mathrm{s}} = \frac{mgh}{\mathrm{s}}$, josta voidaan ratkaista turbiinin läpi sekunnissa kulkevan vesimäärän massa:

$$m = \frac{P \cdot 1\ \mathrm{s}}{gh} = \frac{440 \cdot 10^6\ \mathrm{W} \cdot 1\ \mathrm{s}}{9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 240\ \mathrm{m}} = 186\ 884\ \mathrm{kg} \approx 190 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}.$$

(Huomaa, että $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s^2}}{\mathrm{s}}.$ )

Turbiinin läpi sekunnissa kulkevan veden tilavuus on

$$V = \frac{m}{\rho_\mathrm{vesi}} = \frac{190 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}}{1{,}00 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} = 190\ \mathrm{m^3}.$$

Todellisuudessa voimalaitoksen hyötysuhde on pienempi kuin 100 %, joten ilmoitetun tehon saavuttamiseksi turbiinien läpi virtaavan veden tilavuus on saatua tulosta suurempi.

**e)** Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vedenpinta alhaalla turbiinin tasolla, jolloin vesivoimalaitoksen tuottoteho saadaan yhtälöstä

$P_{\text{tuotto}} = \eta P_{\text{otto}} = \eta \dfrac{E_{\text{otto}}}{t} = \eta \dfrac{mgh}{t}$, jossa $\eta$ hyötysuhde, $\rho$ veden tiheys, $g$ putoamiskiihtyvyys ja $h$ pudotuskorkeus.

Tiheys on $\rho = m/V$ ja läpi virtaavan veden massa on $m = \rho V$, jossa $\rho$ on veden tiheys, joten tuottoteho on $P_{\text{tuotto}} = \dfrac{\eta\rho Vgh}{t} = \eta\rho gh\dfrac{V}{t}$.

Tuottotehoksi saadaan

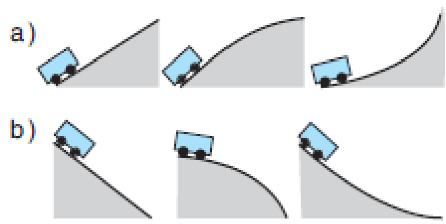
$$P_{\text{tuotto}} = \frac{\eta\rho Vgh}{t} = \eta\rho gh\frac{V}{t} = 0{,}84 \cdot 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 32{,}4\ \text{m} \cdot 450\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \approx 120\ \text{W}.$$

## TESTAA OSAATKO S. 137

**1.** a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** c **5.** c **6.** c **7.** b **8.** c **9.** a, b, c **10.** a, c

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

### 14-1.




**a)** Oletetaan, että alussa vaunut ovat samalla korkeudella. Liike-energia on kaikilla vaunuilla alussa yhtä suuri ja lopussa nolla. Koska liikevastukset ovat pieniä, voidaan käyttää mekaanisen energian säilymislakia. Kuhunkin vaunuun kohdistuva paino muuntaa liike-energian potentiaalienergiaksi, joka on kaikilla vaunuilla lopussa yhtä suuri. Asetetaan potentiaalienergian nollataso lähtökorkeudelle. Tällöin mekaanisen energian säilymislaki on

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

josta nousukorkeudeksi

saadaan $h = \dfrac{v^2}{2g}$ .

Koska liikevastuksia ei oteta huomioon, vaunun nousukorkeus riippuu vain alkunopeudesta ja putoamiskiihtyvyydestä, mutta ei vaunun massasta. Siten kaikki vaunut nousevat yhtä korkealle.

**b)** Oletetaan, että vaunut ovat alussa samalla korkeudella ja lähtevät liikkeelle levosta. Asetetaan potentiaalienergian nolla mäkien alaosan tasolle.

Yhtälöstä

$mgh = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan silloin loppuvauhdiksi $v = \sqrt{2gh}$ .

Koska liikevastuksia ei oteta huomioon, loppuvauhti riippuu vain lähtökorkeudesta ja putoamiskiihtyvyydestä *g*, mutta ei vaunun massasta. Siten kaikilla vaunuilla on yhtä suuri vauhti mäen alaosassa.

**14-2.** Yhtälöstä $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 25\ \mathrm{m}} \approx 22\ \mathrm{m/s}.$$

Laskussa ei ole huomioitu ilmanvastusta ja on oletettu, että 25 m:n pudotuksen aikana köysi ei hiljennä hyppääjän nopeutta.

**14-3.** **a)** Myöhemmin lähteneellä vesipisaralla on suurempi potentiaalienergia, koska se on korkeammalla maanpinnasta kuin aikaisemmin lähtenyt vesipisara.

**b)** Koska pisarat ovat samanlaisia, niillä on yhtä suuri mekaaninen energia, joka on sama kuin niiden potentiaalienergia niiden ollessa jääpuikon päässä ollessaan. Koska ilmanvastus oletetaan pieneksi, mekaaninen kokonaisenergia säilyy putoamisen aikana.

**c)** Aikaisemmin lähteneellä pisaralla on aina suurempi liike-energia kuin myöhemmin lähteneellä, koska sen potentiaalienergia on pienempi. Näin ollen aikaisemmin lähteneen pisaran nopeus on aina suurempi kuin myöhemmin lähteneen, joten pisaroiden välimatka kasvaa.

**d)** Pisaran mekaaninen energia muuttuu veden sisäiseksi energiaksi (pisarasta muodostuu useita pienempiä pisaroita, mihin tarvitaan energiaa), maan sisäiseksi energiaksi (maan molekyylit saavat energiaa vesimolekyylien törmätessä niihin) ja osin myös ääniaaltojen energiaksi.

**14-4.** **a)** Jääkiekon liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}170\ \text{kg} \cdot \left(\frac{85}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 47\ \text{J}\,.$$

**b)** Mekaniikan energiaperiaate on

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + W = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Kappale liukuu ja pysähtyy vaakasuoralla pinnalla, joten $h_a = 0$ m, $h_1 =$ 0 m ja $v_1 = 0$ m/s. Tällöin mekaniikan energiaperiaate saadaan muotoon

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + Fs = 0.$$

Vastusvoima on

$$F = -\frac{\frac{1}{2}mv_a^2}{s} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}170\,\text{kg} \cdot \left(\frac{85}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{250\,\text{m}} \approx -0{,}19\,\text{N}.$$

Liikettä vastustaa 0,19 N:n keskimääräinen voima.

**14-5.** **a)** Mekaniikan energiaperiaate on

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + W = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Asetetaan potentiaalienergian nollataso pyöräilijän alimpaan asemaan, eli $h_1 = 0{,}0$ J. Mekaniikan energiaperiaate saadaan muotoon

$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + W = \frac{1}{2}mv_1^2$. Ratkaistaan yhtälöstä ensin pyöräilijän

nopeuden neliö $v_1^2 = \dfrac{2mgh_a + mv_a^2 + 2W}{m}$, josta saadaan nopeudeksi

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mgh_a + mv_a^2 + 2W}{m}}\,.$$

Vastusvoimat muuntavat mekaanista energiaa muihin energiamuotoihin.

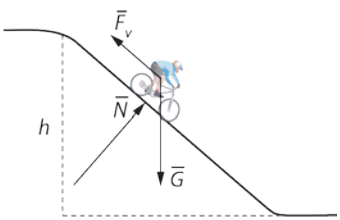
Vastusvoimat pienentävät mekaanista energiaa sen alkuperäisestä arvosta, joten niiden tekemä työ $W$ tulee yhtälöön negatiivisena. Pyöräilijän nopeus mäen alla on silloin

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mgh_a + mv_a^2 + 2W}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 85\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 17\,\text{m} + 85\,\text{kg} \cdot \left(\frac{16}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot \left(-8{,}1 \cdot 10^3\,\text{J}\right)}{85\,\text{kg}}}$$

$$\approx 13\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 46\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

b)




Kuvassa $\overline{G}$ on pyöräilijän ja pyörän paino, $\overline{N}$ on pinnan tukivoima ja $\overline{F}_v$ on kokonaisvastusvoima.

**14-6.** Hyppääjä lähtee levosta, jolloin hänen liike-energiansa alussa on nolla. Asetetaan potentiaalienergian nollataso hyppyrin nokalle. Mekaniikan energiaperiaate $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ saa muodon

$mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2}mv^2$, jossa $W$ on liikevastusvoimien tekemä työ liu´un aikana. Tästä saadaan liikevastusvoimien tekemäksi työksi

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = \frac{1}{2} \cdot 71\,\text{kg} \cdot \left(\frac{101}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 71\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 66\,\text{m} \approx -18\,\text{kJ}.$$

**14-7.** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a{}^2 + W = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1{}^2.$$

Liikettä vastustava keskimääräinen voima $\overline{F}$ muuntaa mekaanista energiaa lumen, suksien ja ilman sisäenergiaksi, joten sen tekemän työn $Fs$ arvo tulee yhtälöön negatiivisena, $Fs = -55\ \mathrm{N} \cdot 35\ \mathrm{m}$. Sovitaan, että mäen alla on potentiaalienergian nollataso eli $h_1 = 0\ \mathrm{m}$.

Tällöin

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + Fs = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Yhtälöstä saadaan lumilautailijan nopeudeksi mäen alla

$$v_1 = \sqrt{\frac{2mgh_a + mv_a^2 + 2Fs}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 73\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8{,}0\ \mathrm{m} + 73\ \mathrm{kg} \cdot (2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + 2 \cdot (-55\ \mathrm{N}) \cdot 35\ \mathrm{m}}{73\ \mathrm{kg}}} \approx 11\ \mathrm{m/s}.$$

**14-8.** Auton noustessa mäkeä ylös autoon kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa liike-energiaa potentiaalienergiaksi. Nousun aikana liikevastukset (kitka ja ilmanvastus) muuntavat mekaanista energiaa tien, auton ja ilman sisäenergiaksi. Mekaniikan energiaperiaate on

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + W = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Asetetaan potentiaalienergian nollataso mäen alle. Liikevastusten tekemä työ on $W = -F_v s$. Tällöin liike-energia mäen päällä on

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_a^2 - F_v s - mgh_1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1200\ \mathrm{kg} \cdot (18\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - 750\ \mathrm{N} \cdot 60\ \mathrm{m} - 1200\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 9{,}5\ \mathrm{m} \approx 38\ \mathrm{kJ}.$$

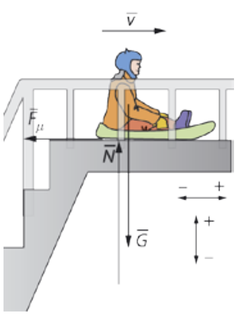
**14-9.** **a)** Lapseen kohdistuva paino muuntaa osan potentiaalienergiasta liike-energiaksi. Osa potentiaalienergiasta muuntuu vastusvoimien (ilmanvastus ja kitka) tekemän työn takia lapsen, liukumäen ja maan sisäenergiaksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on

$$mgh_{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 + W = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Asetetaan potentiaalienergia lopputilanteessa nollaksi. Koska liike-energia alussa on nolla, energiaperiaate saa muodon $mgh_{\mathrm{a}} + W = \frac{1}{2}mv_1^2$, joten vastusvoimien tekemä työ on

$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot(5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - 20\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 3{,}0\,\mathrm{m} \approx -340\,\mathrm{J}.$$

**b)** Vaakasuoralla pinnalla liukumisen alussa lapsen nopeus on yhtä suuri kuin mäessä saavutettu loppunopeus $v_1$. Maassa tapahtuvan liu'un aikana kitka ja ilmanvastus muuntavat lapsen liike-energian vuorovaikuttavien kappaleiden ja ilman sisäenergiaksi. Oletetaan ilmanvastus pieneksi. Lapsen liike-energia lopussa on nolla. Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi lapsen painopisteen taso.




Mekaniikan energiaperiaate saa muodon

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - F_\mu s = 0.$$

Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$. Pystysuunnassa lapsen ja pulkan liikeyhtälö on $\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös sovitaan positiiviseksi, liikeyhtälö skalaariyhtälönä on $N - G = 0$ eli $N = G$. Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu mg$. Lapsen liukuma matka on

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{F_\mu} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\mu mg} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{(5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\cdot 0{,}77\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 1{,}7\,\text{m}.$$

**14-10.** Mekaniikan energiaperiaate $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ tulee muotoon

$mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2}mv_1{}^2$, jossa $W$ on kitkan tekemä työ

$W = -F_\mu \cdot s = -\mu N \cdot s = -\mu mg \cdot s.$

Yhtälöstä $mgh + 0 - \mu mgs = 0 + \frac{1}{2}mv_1{}^2$ saadaan nopeudelle liukumäen lopussa

$$v_1 = \sqrt{2(gh - \mu gs)} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\left(23\ \text{m} - 0{,}15\cdot 141\ \text{m}\right)} \approx 6{,}0\ \text{m/s}.$$

Jos kitkakerroin olisi nolla, nopeus olisi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 23\ \text{m}} \approx 21\ \text{m/s}^2.$$

**14-11. a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$

eli $m_\text{A}gh_\text{a} + \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{a}^2 + W = m_\text{A}gh_1 + \frac{1}{2}m_\text{A}v_1^2$. Liikevastusten tekemä työ oletetaan nollaksi. Oletetaan, että pulkat lähtevät levosta, eli liike-energia alussa on nolla. Valitaan potentiaalienergian nollataso mäen alle.

Mekaniikan energiaperiaate on silloin $m_\text{A}gh_\text{a} = \frac{1}{2}m_\text{A}v_1^2$, josta ratkaistaan nopeus mäen alla:

$v_1^2 = 2gh_\text{a}$ eli $v_1 = \sqrt{2gh_\text{a}}$.

Antin pulkan nopeus mäen alla on

$$v_1 = \sqrt{2gh_a} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4{,}0\ \text{m}} = 8{,}85889\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**b)** Antilla ja pulkalla on vaakasuoralle pihamaalle saapuessaan liike-energiaa. Liikettä vastustava kokonaisvoiman $\overline{F}$ tekemä työ muuntaa sen toiseen muotoon liukumisen aikana. Sovelletaan mekaniikan energiaperiaatetta $m_A g h_a + \frac{1}{2} m_A v_a^2 + W = m_A g h_1 + \frac{1}{2} m_A v_1^2$ .
Valitaan vaakasuora maanpinta potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin $h_a = h_1 = 0$. Koska lopussa pulkka pysähtyy, on $\frac{1}{2} m_A v_1^2 = 0$. Vastusvoima pienentää mekaanista energiaa, joten sen tekemä työ tulee mekaniikan energiaperiaatteen yhtälöön negatiivisena eli $W = -Fs.$ Mekaniikan energiaperiaate on silloin

$$\frac{1}{2} m_A v_a^2 - Fs = 0\,.$$

Tästä saadaan Anttiin ja pulkkaan kohdistuvan vastusvoiman suuruudeksi

$$F = \frac{m_A v_a^2}{2s} = \frac{42\,\text{kg} \cdot \left(8{,}85889\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 12\,\text{m}} = 137{,}340\,\text{N}.$$

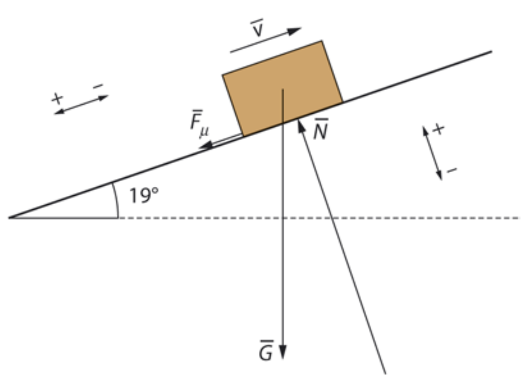
Jos oletetaan, että Tiinaan ja Anttiin vaakasuoralla pihamaalla vaikuttavat vastusvoimat ovat yhtä suuria, saadaan Tiinan pulkan liukumismatka Antin tapauksessa johdetusta yhtälöstä $\frac{1}{2} m_A v_a^2 - \frac{1}{2} Fs = 0$ korvaamalla siinä massa $m_A$ massalla $m_T$ eli $\frac{1}{2} m_T v_a^2 - Fs = 0$ .

Ratkaistaan Tiinan pulkan liukuma matka vaakasuoralla pihamaalla:

$$s = \frac{m_{\mathrm{T}} v_{\mathrm{a}}^2}{2F} = \frac{21\,\mathrm{kg} \cdot (8{,}85889\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 137{,}34\,\mathrm{N}} \approx 6{,}0\ \mathrm{m}.$$

**c)** Antin liukumasta matkasta voitiin laskussa ennustaa Tiinan liukuman matkan pituus, mutta sitä varten piti olettaa, että molempiin vaikuttaa samankokoinen vastusvoima. Oletus ei pidä paikkaansa todellisuudessa. Koska Tiina on pienempi, häneen kohdistuu pienempi ilmanvastus kuin Anttiin. Tiinan pienempi massa puolestaan merkitsee, että Tiinan pulkkaan kohdistuva kitka on pienempi kuin Antin pulkkaan kohdistuva kitka, sillä kitka on $F_\mu = \mu N = \mu G = \mu mg$. Liikettä vastustava kokonaisvoima $F$, jonka laskussa oletettiin olevan Antille ja Tiinalle yhtä suuri, on siis todellisuudessa pienempi Tiinan tapauksessa kuin Antin tapauksessa. Tämän takia Tiinan liukuma matka on todellisuudessa suurempi kuin laskussa saatiin. Antin liukumasta matkasta ei siis voi luotettavasti ennustaa Tiinan liukuman matkan pituutta.

**14-12.** **a)**




Olkoon pintaa pitkin kuljettu matka ennen pysähtymistä $s$. Kitkatyö muuntaa osan liike-energiasta aineen sisäenergiaksi ja kappaleeseen kohdistuva paino potentiaalienergiaksi.

Sovitaan kappaleen potentiaalienergian nollataso lähtöpaikkaan. Kappaleen liike-energia ylimmässä kohdassa on myös nolla. Mekaniikan energiaperiaate $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ on tässä tapauksessa

$$\frac{1}{2}mv^2 - F_\mu s = mgh.$$

Kitka on $F_\mu = \mu N = \mu G \cos\alpha = \mu mg \cdot \cos\alpha$ ja korkeus $h = \sin\alpha \cdot s$, joten mekaniikan energiaperiaate antaa yhtälön

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mu mg\cos\alpha \cdot s = mg\sin\alpha \cdot \mathrm{s}.$$

Kappaleen liukuma matka on

$$s = \frac{v^2}{2\mu g\cos\alpha + 2g\sin\alpha}$$

$$= \frac{(4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2\cdot 0{,}14\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 19^\circ + 2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 19^\circ} = 2{,}254\ \mathrm{m}.$$

Korkeusero on

$h = s\sin\alpha = 2{,}254\ \mathrm{m}\cdot\sin 19^\circ = 0{,}7338\ \mathrm{m} \approx 0{,}73\ \mathrm{m}.$

**b)** Kappaleen kulkema matka on sama kuin a-kohdassa, joten kitkavoiman tekemä työ on yhtä suuri. Yhtälöstä

$mgh - F_\mu s = \frac{1}{2}mv^2$ eli $mgh - \mu mg\cos\alpha \cdot s = \frac{1}{2}mv^2$

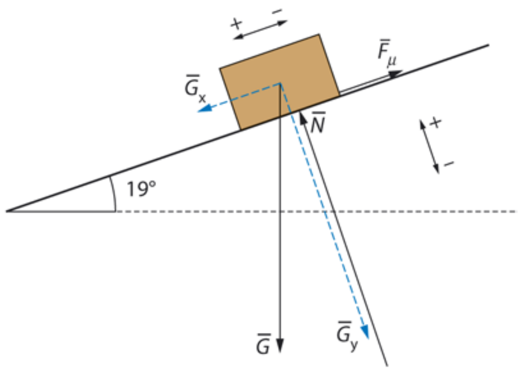
saadaan kappaleen nopeus, kun kappale ohittaa lähtöpisteensä:

$$v = \sqrt{2gh - 2\mu g\cos\alpha\cdot s}$$

$$= \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}7338\ \mathrm{m} - 2\cdot 0{,}14\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 19^\circ\cdot 2{,}254\ \mathrm{m}}$$

$$\approx 2{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c)




Rajatapauksessa pinnan suuntaisten voimien summa on oltava nolla eli kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{F}_\mu + \overline{G}_x = \overline{0}$. Sovitaan suunta alaviistoon positiiviseksi, jolloin liikeyhtälö on skalaariyhtälönä $G_x - F_\mu = 0$.

Yhtälöstä $G_x = F_\mu$ eli $mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$ kitkakertoimeksi

saadaan $\mu = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 19° \approx 0{,}34$,

eli kappale ei lähde liukumaan, jos lepokitkakerroin on vähintään 0,34 mittaustarkkuuden mukaisesti pyöristettynä. Vastaus voidaan tässä tapauksessa pyöristää myös ylöspäin arvoon 0,35.

## TESTAA OSAATKO S. 137

**1.** a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** c **5.** c **6.** c **7.** b **8.** c **9.** a, b, c **10.** a, c

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**15-1.** **a)** Hyökkääjän liikemäärä on $p = mv = 89\ \text{kg} \cdot 8{,}0\ \text{m/s} = 712\ \text{kgm/s}$.

**b)** 105-kiloisella puolustajalla on yhtä suuri liikemäärä, jos nopeus on

$$v = \frac{p}{m} = \frac{712\,\dfrac{\text{kgm}}{\text{s}}}{105\,\text{kg}} \approx 6{,}8\ \text{m/s}.$$

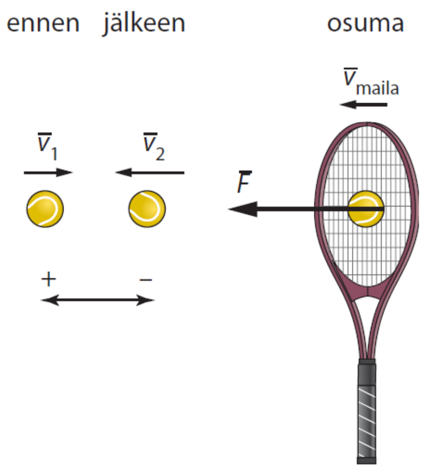
**15-2.** Impulssien suuruudet saadaan kuvaajista graafisella integroinnilla eli arvioimalla kuvaajien ja $t$-akselin väliin jäävän pinnan fysikaalinen pinta-ala. Yhden ruudun fysikaalinen pinta-ala on $1\ \text{s} \cdot 1\ \text{N} = 1\ \text{Ns}$. Molemmissa tapauksissa impulssin suuruudeksi saadaan noin 6 Ns. Impulssit eroavat siten, että a-tapauksessa vaikuttava voima on suurempi kuin b-tapauksessa, ja a-tapauksessa voiman vaikutusaika on pidempi kuin b-tapauksessa. Vaikka impulssit ovat yhtä suuret, voiman vaikutus ei aina ole samanlainen. Suurempi voima saattaa esimerkiksi rikkoa rakenteita, mutta pienempi voima ei, vaikka voimien impulssit olisivat yhtä suuret.

**15-3.** Nopeutta kuvatussa tilanteessa esittää parhaiten kuva a. Kuvissa b ja c nopeuden pieneneminen muuttuu nopeuden suurenemiseksi voiman vaikutusaikana. Tämä ei ole kuitenkaan mahdollista, kun kyseessä on vakiovoima, sillä vakiovoiman tapauksessa impulssilla $I$ ja siten liikemäärän muutoksella $\Delta p = I$ on koko ajan sama suunta.
Koska $\Delta p = mv$, silloin kappaleen nopeuden pitää koko ajan joko pienentyä tai suurentua, toisin kuin kuvissa b ja c. Kuva c ei vastaa kuvattua tilannetta, koska siinä nopeus muuttuu vain yhdessä pisteessä, mikä ei ole mahdollista vakiovoiman tapauksessa.

Kuvan a tilanteessa voi olla kyse esimerkiksi suoraan ylös heitetyn kappaleen liikkeestä. Koska nopeus on kuvaajan mukaan alussa positiivinen, on suunta ylös valittu positiiviseksi suunnaksi.

Kappaleeseen vaikuttaa alaspäin paino. Sen impulssi on negatiivinen, koska voima on suuntasopimuksen mukaisesti negatiivinen. Koska impulssi $I$ on negatiivinen, kappaleen liikemäärään tulee negatiivinen muutos, $\Delta p = I < 0$. Tämä tarkoittaa, että kappaleen nopeus pienenee. Koska voima on vakio, nopeuden kuvaaja välillä 0…10 s on laskeva suora. Huomaa, että nopeuden suunta muuttuu noin 4 s:n kohdalla; silloin pallo saavuttaa lakikorkeuden ja alkaa liikkua alaspäin.

**15-4.** Mailan palloon kohdistavan voiman impulssi on yhtä suuri kuin pallon liikemäärän muutos: $\overline{F}\Delta t = m\Delta\overline{v} = m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1$.




Sovitaan voiman suunta positiiviseksi, jolloin pallon suunta ennen mailaan osumista on negatiivinen. Saadaan skalaariyhtälö $F\Delta t = mv_2 - m(-v_1) = m(v_2 + v_1)$. Maila vaikuttaa palloon voimalla

$$F = \frac{m(v_2 + v_1)}{\Delta t} = \frac{0{,}057\ \text{kg} \cdot (30{,}0\ \text{m/s} + 20{,}0\ \text{m/s})}{0{,}020\ \text{s}} \approx 140\ \text{N}.$$

Keskimääräisen voiman suuruus on 140 N ja suunta on vastakkainen pallon alkuperäiseen liikesuuntaan nähden.

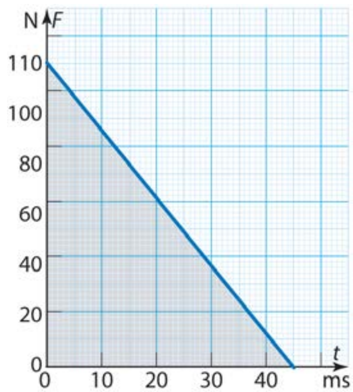
**15-5.** Voiman kuvaajasta *t,F*-koordinaatistossa saadaan impulssi laskemalla voiman kuvaajan ja koordinaattiakselien muodostaman kolmion fysikaalinen pinta-ala:

$I = 1/2 \cdot 45\ \text{ms} \cdot 110\ \text{N} = 2{,}475\ \text{Ns}.$

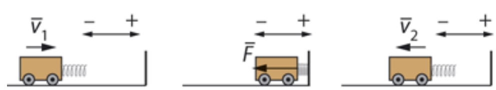
Impulssi on $I = \Delta p = mv$, joten nopeuden muutos on

$$\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{2{,}475\ \text{Ns}}{0{,}036\ \text{kg}} \approx 69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

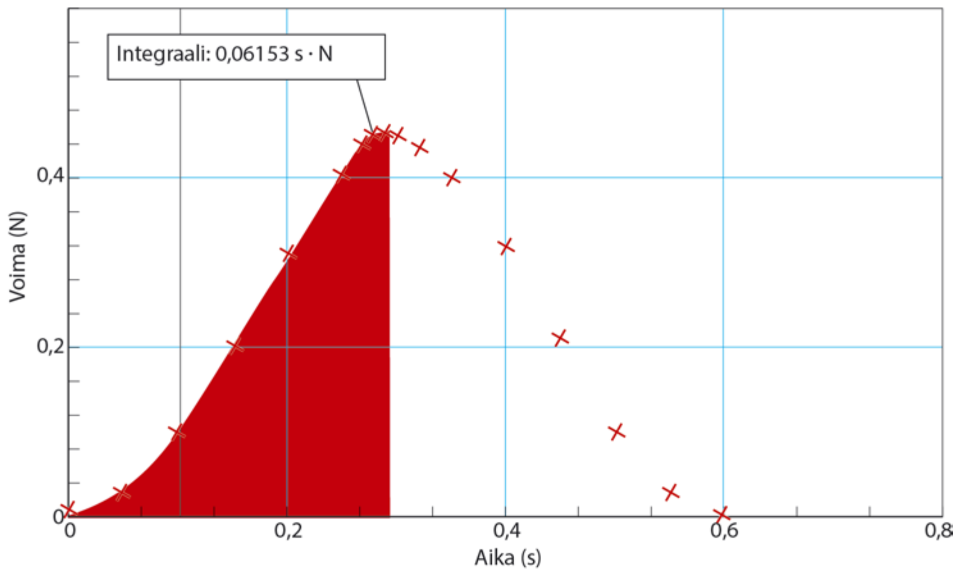
Nuolen lähtönopeus siis on 69 m/s.




**15-6.** **a)**



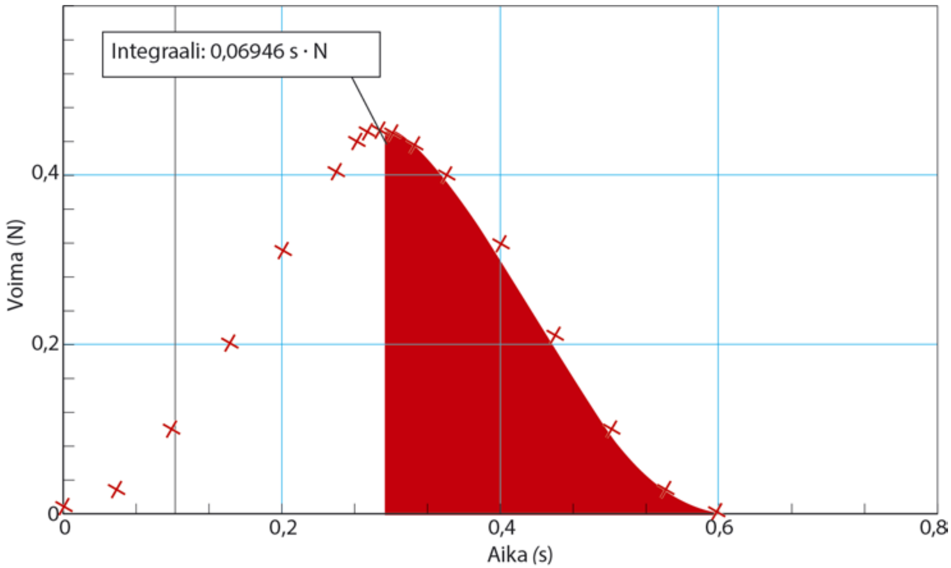

Vaunun nopeus ennen törmäystä on $\bar{v}_1$ ja törmäyksen jälkeen $\bar{v}_2$. Anturin vaunuun kohdistama voima aiheuttaa vaunun liikemäärän muutoksen, joka on yhtä suuri kuin voiman impulssi. Jousi puristuu kasaan kunnes vaunun liikesuunta muuttuu vastakkaiseksi, jolloin vaunuun kohdistuva voima on suurin ja vaunun nopeus on hetkellisesti 0 m/s. Vaunun hidastuessa törmäyksessä vaunuun kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri kuin kuvion huipun vasemmalle puolelle jäävä fysikaalinen pinta-ala. Mittausohjelma antaa impulssin suuruudeksi 0,062 Ns. Impulssin suunta on kohti vaunun tulosuuntaa.




**b)** Impulssiperiaatteen mukaan on $\overline{I} = m\Delta\overline{v}$ eli $\overline{I} = m(\overline{0} - \overline{v}_1)$. Sovitaan vaunun tulosuunta positiiviseksi. Impulssin suunta on vaunun liikkeelle vastakkaissuuntainen, joten saadaan skalaariyhtälö $-I_1 = m(0 - v_1)$. Vaunun nopeus ennen törmäystä on

$$v_1 = \frac{I_1}{m} = \frac{0{,}06153\ \text{Ns}}{0{,}215\ \text{kg}} = 0{,}286186\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}29\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kun vaunun liikesuunta on muuttunut, jousi vapautuu aiheuttaen vaunun liikemäärään muutoksen, joka on yhtä suuri kuin jousivoiman impulssi $\overline{I}_2$. Impulssin suuruus on käyrän huipun oikealle puolelle jäävä fysikaalinen pinta-ala.




Mittausohjelma antaa impulssin arvoksi 0,06946 Ns.

Vaunun nopeuden suunta vaihtuu törmäyksessä, joten nopeus törmäyksen jälkeen on

$$v_2 = \frac{-I_2}{m} = \frac{-0{,}06946\ \text{Ns}}{0{,}215\ \text{kg}} = -0{,}323070\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx -0{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Huomautus: Vaunun nopeuden suuruus törmäyksen jälkeen ei todellisuudessa voi olla suurempi kuin ennen törmäystä. Mittaustuloksista saatu päinvastainen tulos aiheutuu mittauksen ja mittaustulosten käsittelyyn liittyvistä virhelähteistä, joita ei ole huomioitu ratkaisussa.

**c)** Impulssiperiaatteen mukaan törmäyksen aikana vaikuttavan voiman impulssi on yhtä suuri kuin vaunun liikemäärän muutos. Vaunun törmätessä anturiin impulssiperiaate skalaariyhtälönä on

$$I = m\Delta v = m(v_2 - v_1).$$

Liikemäärän muutos on

$I = 0{,}215 \text{ kg} \cdot (-0{,}323070 \text{ m/s} - 0{,}286186 \text{ m/s}) \approx -0{,}13 \text{ kgm/s}.$

**15-7.** Valitaan pallon alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi suunnaksi. Silloin $v_1 = 25$ m/s ja $v_2 = -35$ m/s. Pallon liikemäärän muutos on silloin

$\Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1)$

$= 0{,}065 \text{ kg} \cdot (-35 \text{ m/s}) - 25 \text{ m/s}) = -3{,}9 \text{ kgm/s}.$ Impulssiperiaatteen mukaan liikemäärän muutos on yhtä suuri kuin impulssi $I = Ft$, jossa $F$ on kappaleeseen kohdistunut keskimääräinen voima ja $\Delta t$ on voiman vaikutusaika. Saadaan yhtälö $Ft = \Delta p$, josta voidaan ratkaista

keskimääräinen voima: $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{-3{,}9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{4{,}0 \text{ ms}} \approx -0{,}98 \text{ kN}.$

Keskimääräisen voiman suuruus on 0.98 kN.

**15-8.** Pallon nopeus sen osuessa lattiaan saadaan energiaperiaatteen avulla: pallon potentiaalienergia muuntuu pudotuksessa liike-energiaksi.

Saadaan yhtälö $\dfrac{1}{2}mv^2 = mgh,$ josta saadaan nopeuden suuruudeksi

$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}0 \text{ m}} = 4{,}42944 \text{ m/s}.$

Valitaan suunta ylös positiiviseksi suunnaksi. Silloin pallon liikemäärä juuri ennen lattiaan osumista on

$p_\text{a} = -mv_1 = -0.150 \text{ kg} \cdot 4{,}42944 \text{ m/s} = -0{,}654416 \text{ Ns}.$

Koska pallon nopeus törmäyksen jälkeen on likimain samansuuruinen kuin ennen törmäystä, on pallon liikemäärä törmäyksen jälkeen $p_1 = mv_1 = 0{,}654416 \text{ Ns}.$ Impulssiperiaatteen mukaan palloon törmäyksessä vaikuttavan voiman impulssi on sama kuin liikemäärän muutos eli

$I = \Delta p = p_\mathrm{l} - p_\mathrm{a} = 0{,}654416\ \mathrm{Ns} - (-0{,}654416\ \mathrm{Ns}) \approx 1{,}3\ \mathrm{Ns}.$

Koska impulssi on positiivinen, on sen suunta ylöspäin.

**15-9.** **a)** Heinäsirkkaan vaikuttavan voiman impulssi ylöspäin on
$I = Ft = 0{,}38\ \mathrm{N} \cdot 0{,}019\ \mathrm{s} = 0{,}00722\ \mathrm{Ns}.$
Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos eli
$\Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - 0)$, josta saadaan nopeudeksi

$$v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{I}{m} = \frac{0{,}00722\ \mathrm{Ns}}{0{,}0025\ \mathrm{kg}} = 2{,}888\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tätä nopeutta vastaava liike-energia $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ on muuntunut potentiaalienergiaksi $E_\mathrm{p} = mgh$ heinäsirkan saavuttaessa hyppynsä lakikorkeuden $h$.
Tästä saadaan yhtälö $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, josta saadaan hypyn korkeudeksi

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(2{,}888\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} \approx 0{,}43\ \mathrm{m}.$$

**b)** Heinäsirkan kyky hypätä korkealle perustuu sen pitkiin takajalkoihin. Heinäsirkka painaa jalkojaan voimakkaasti alustaa vastaan, jolloin alusta kohdistaa niihin voiman Newtonin III lain mukaisesti. Jalkojen pituuden takia voimavaikutus kestää suhteellisen pitkän ajan, jolloin impulssi (liikemäärän muutos) on suuri.

**15-10.** Kananmunan potentiaalienergia $E_\mathrm{p} = mgh$ muuttuu putoamisen aikana liike-energiaksi $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$. Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ voidaan ratkaista kananmunan nopeus sen osuessa lattiaan:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}0\ \mathrm{m}} = 4{,}42945\ \mathrm{m/s}.$$

Kananmunan liikemäärä sen osuessa lattiaan on

$p = mv = 0{,}060\ \mathrm{kg} \cdot 4{,}42945\ \mathrm{m/s} \approx 0{,}27\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$. Koska kananmuna särkyy lattiaan osuessaan, törmäyksen jälkeen sen liikemäärä on nolla, joten liikemäärän muutos $\Delta p$ on suuruudeltaan sama ja suunnaltaan vastakkainen kuin liikemäärä ennen törmäystä. Lattian kananmunaan kohdistaman voiman impulssi on yhtä suuri kuin kananmunan liikemäärän muutos eli $I = \Delta p = 0{,}27$ Ns ja sen suunta on ylöspäin. Kananmunan lattiaan kohdistaman voiman impulssi on Newtonin III lain perusteella saman suuruinen eli 0,27 Ns, mutta sen suunta on alaspäin.

**15-11.** Lasketaan ensin pallon nopeus törmäyksen jälkeen. Törmäyksen jälkeen pallo pomppaa korkeudelle $h_2 = 3{,}1$ m, jolloin sen liike-energia on muuttunut potentiaalienergiaksi eli $\frac{1}{2}mv_2^{\,2} = mgh_2$.

Ratkaistaan tästä nopeuden suuruus törmäyksen jälkeen:

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ (\mathrm{m/s^2}) \cdot 3{,}1\ \mathrm{m}} = 7{,}79885\ \mathrm{m/s}.$$

Pallon nopeus pienenee törmäyksessä, joten

$\Delta p = mv_2 - mv_1 = -\,0{,}91$ kgm/s.

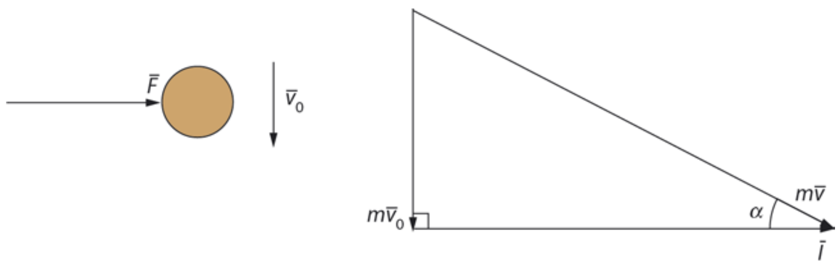
Pallon nopeus ennen törmäystä on silloin

$$v_1 = \frac{mv_2 - \Delta p}{m} = \frac{0{,}20\ \mathrm{kg} \cdot 7{,}79885\ \mathrm{m/s} - (-0{,}91\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s})}{0{,}20\ \mathrm{kg}} = 12{,}3489\ \mathrm{m/s}.$$

Mekaanisen energian säilymislaista saadaan $\frac{1}{2}mv_1^{\,2} = mgh_1$, josta saadaan pudotuskorkeudeksi

$$h_1 = \frac{v_1^{\,2}}{2 \cdot g} = \frac{(12{,}3489\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} \approx 7{,}8\ \mathrm{m}.$$

**15-12.** Mailan osuessa palloon voiman impulssi on
$\overline{I} = \Delta\overline{p} = m\overline{v} - m\overline{v}_0 = m\overline{v} + (-m\overline{v}_0)$. Impulssi voidaan arvioida kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana (likimain kolmion alana):
$I \approx 3{,}3$ Ns.




Voiman impulssi on liikemäärän muutos vaakasuunnassa eli $I = mv_x$, joten

$$v_x = \frac{I}{m} = \frac{3{,}3\,\text{Ns}}{0{,}15\,\text{kg}} = 22\,\text{m/s}.$$

Pallon nopeus pystysuunnassa on $v_0 = v_y = 11{,}2$ m/s.

Nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22\,\text{m/s})^2 + (11{,}2\,\text{m/s})^2} \approx 25\,\text{m/s}.$$

Nopeuden suuntakulma on $\alpha$: $\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$, josta $\alpha \approx 27°$ vaakatasoon nähden alaviistoon.

**15-13.** **a)** Voiman impulssi on sama kuin liikemäärän muutos eli

$\overline{I} = \Delta\overline{p}$ eli $\overline{F}\Delta t = \overline{p}_1 - \overline{p}_a = m_a(\overline{v}_1 - \overline{v}_a) = m_a \cdot \overline{0} - m_a\overline{v}_a$, sillä auto pysähtyy törmäyksessä eli auton nopeus lopussa on $v_1 = 0$. Kun auton nopeuden suunta valitaan negatiiviseksi suunnaksi, saadaan voimaksi

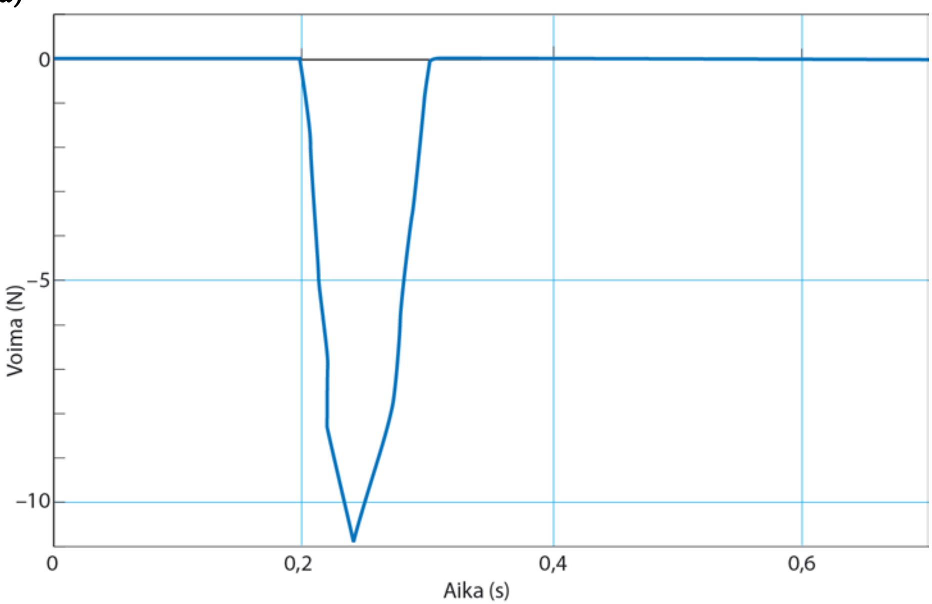
$$F = \frac{m_a v_a}{\Delta t_a} = \frac{1300\ \text{kg} \cdot 15{,}6\ \text{m/s}}{0{,}072\ \text{s}} = 281\ 883 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}8 \cdot 10^5\ \text{N}.$$

Voima on positiivinen eli sen suunta on auton nopeuden suunnalle vastakkainen.

**b)** Koska aikuisnuken nopeus törmäyksen alkaessa on sama kuin auton nopeus, saadaan voimalle samalla tavalla kuin a-kohdassa yhtälö

$$F = \frac{m_h v_a}{\Delta t_n} = \frac{75\ \text{kg} \cdot 15{,}6\ \text{m/s}}{0{,}115\ \text{s}} = 10173{,}9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}0 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

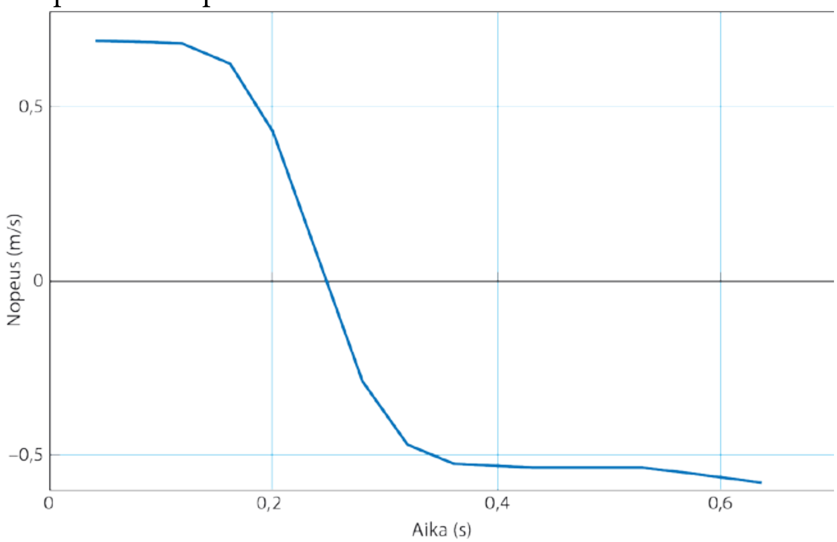
**15-14. a)**



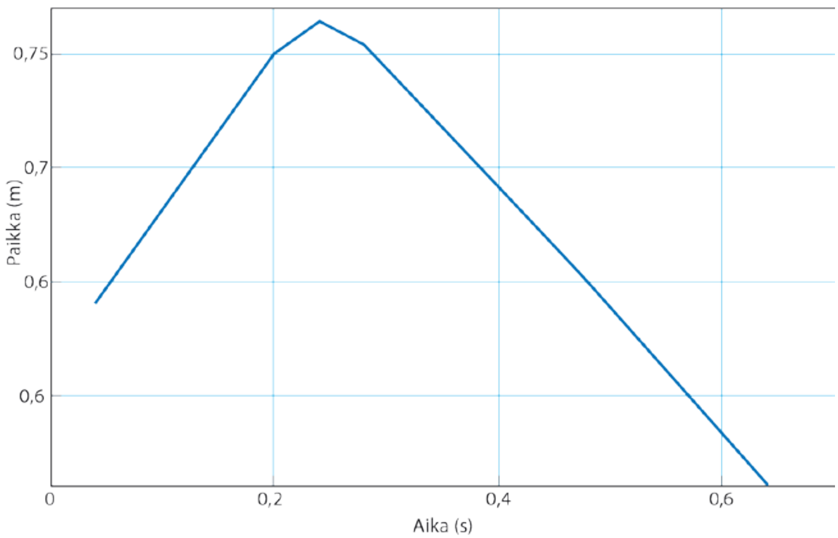

Voima, aika-kuvaajasta saadaan törmäyksen kestoksi 0,10 s.

**b)** Kohdan a kuvaajasta saadaan voiman suurimmaksi arvoksi 11 N.

**c)** Nopeus, aika-kuvaajasta saadaan nopeudeksi ennen törmäystä 0,69 m/s ja törmäyksen jälkeen −0,54 m/s, joten nopeuden muutos on
$\Delta v = -0{,}54 - 0{,}69 \text{ m/s} = -1{,}23 \text{ m/s}$.
Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos, joten
$I = \Delta p = m\Delta v = 0{,}570 \text{ kg} \cdot (-1{,}23 \text{ m/s}) \approx -0{,}70 \text{ Ns}$.
Data-aineistossa positiivinen suunta on vaunun suunta ennen törmäystä, joten impulssin suuruus on 0,31 Ns ja suunta päinvastainen kuin vaunun alkuperäisen nopeuden suunta.




Huomaa, että nopeudet saa myös annetusta paikka,aika-kuvaajasta määrittämällä kuvaajan fysikaaliset kulmakertoimet ennen ja jälkeen törmäyksen.


0,75
0,7
0,6
0,6
Paikka (m)
0
0,2
0,4
0,6
Aika (s)

## TEHTÄVIEN RATKAISUT

**16-1.** Kimmoisina a, b ja e, kimmottomina c ja d.

**16-2.** Mittauksessa määritettiin toisiinsa törmäävien vaunujen massat $m_1$ ja $m_2$ sekä törmäävän vaunun nopeus $v_1$ ja toisiinsa tarttuneiden vaunujen nopeus $u$:

| $m_1$ (kg) | $m_2$ (kg) | $v_1$ (m/s) |
|---|---|---|
| 0,526 | 0,549 | 3,98 |
| 0,526 | 0,650 | 4,30 |
| 0,526 | 0,751 | 3,94 |
| 0,526 | 0,853 | 3,82 |
| 0,526 | 0,954 | 4,00 |

Mittaustuloksista lasketut liikemäärät ja liike-energiat ennen ja jälkeen törmäyksen ovat:

| $p_a = m_1v_1$ (kgm/s) | $p_l = (m_1 + m_2)u$ (kgm/s) | $E_{k,a} = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ (J) | $E_{k,l} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$ (J) |
|---|---|---|---|
| 2,09 | 2,05 | 4,17 | 1,96 |
| 2,26 | 2,22 | 4,86 | 2,10 |
| 2,07 | 2,03 | 4,08 | 1,61 |
| 2,01 | 1,97 | 3,84 | 1,41 |
| 2,10 | 2,07 | 4,21 | 1,45 |

**a)** Liikemäärä säilyy törmäyksissä mittaustarkkuuden rajoissa.

**b)** Liike-energia ei säily törmäyksissä.

**c)** Koska vaunut liikkuvat törmäyksen jälkeen toisiinsa kiinnittyneinä, kyse on täysin epäelastisesta törmäyksestä.

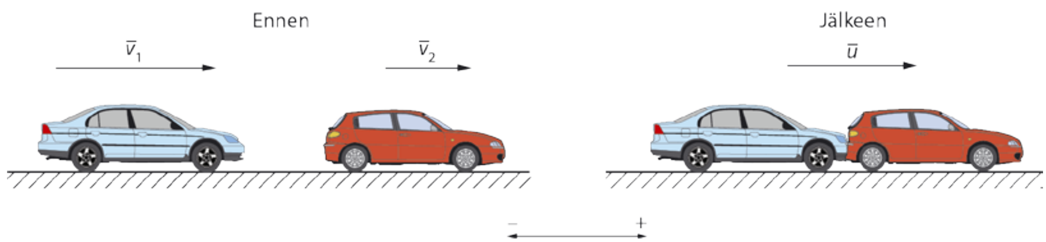
**16-3.** **a)** Alussa liikemäärä on nolla. Kun mies alkaa kävellä, hänen liikemääränsä on $p_{\text{mies}} = m_{\text{mies}} v_{\text{mies}} = 75\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \ \text{m/s} = 112{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$. Liikemäärän säilymislain mukaan vaunun liikemäärä on yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin miehen liikemäärä niin, että liikemäärien summa on nolla. Vaunun liikemäärän suuruudelle saadaan silloin yhtälö $p_{\text{vaunu}} = m_{\text{vaunu}} v_{\text{vaunu}} = p_{\text{mies}}$ eli

$$v_{\text{vaunu}} = \frac{p_{\text{mies}}}{m_{\text{vaunu}}} = \frac{112{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{210\ \text{kg}} \approx 0{,}54\ \text{m/s}.$$

Nopeuden suunta on miehen suuntaan nähden vastakkainen.

**b)** Kun mies pysähtyy, hänen liikemääränsä on nolla. Liikemäärän säilymisen perusteella myös vaunun liikemäärä on nolla eli myös vaunu pysähtyy.

**16-4.**




Autojen törmäys on kimmoton, jolloin liikemäärän säilymislaki on

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}.$$

Sovitaan autojen alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi, jolloin

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Autojen yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on

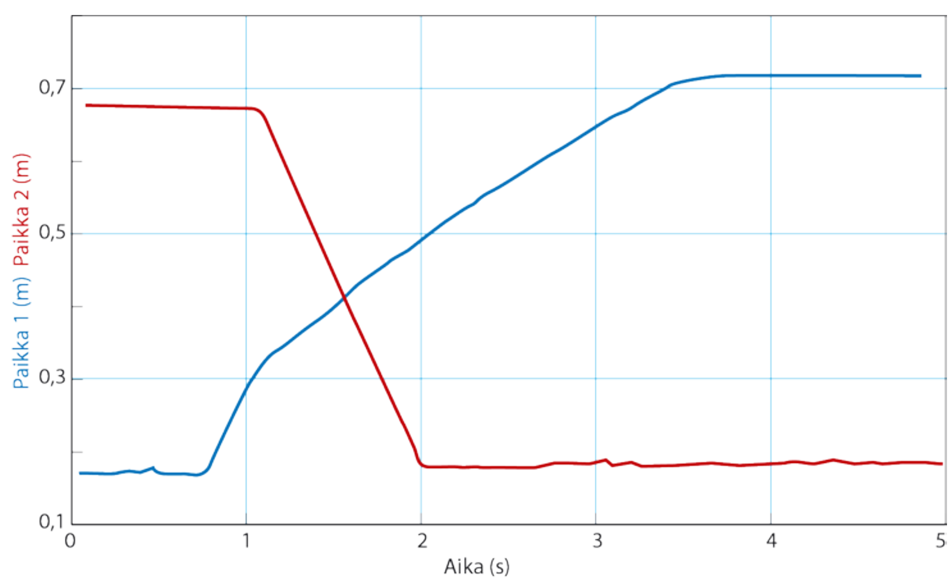
$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{940\ \text{kg} \cdot 102\ \text{km/h} + 920\ \text{kg} \cdot 85\ \text{km/h}}{940\ \text{kg} + 920\ \text{kg}}$$
$$\approx 94\ \text{km/h}.$$

Liikkeen suunta on sama kuin autojen alkuperäisen liikkeen suunta.

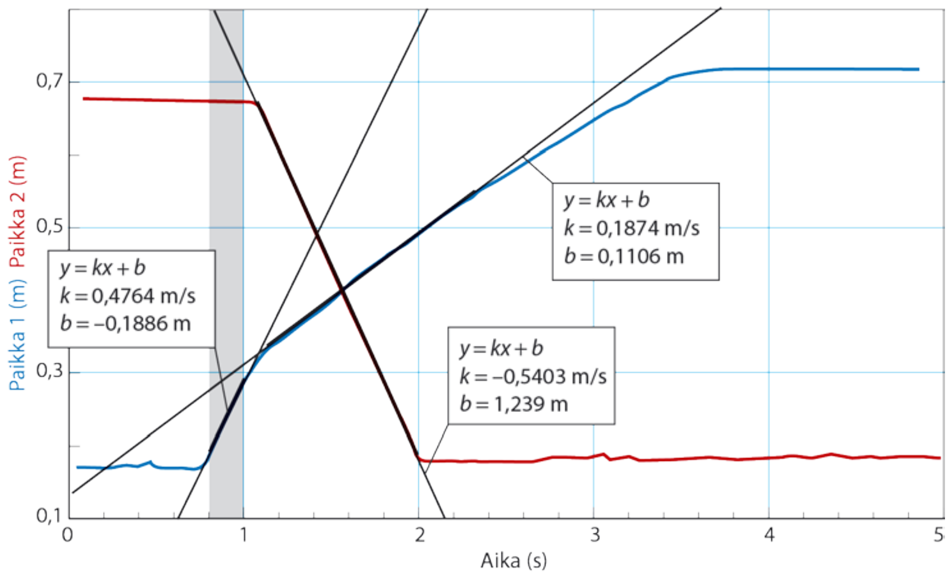
**16-5.** Veneen ja veden vuorovaikutus oletetaan pieneksi, joten tyttöä ja venettä tarkastellaan eristettynä systeeminä. Tytön liikemäärä hypyn aikana on yhtä suuri kuin veneen ja tytön yhteenlaskettu liikemäärä tytön pysähdyttyä veneen pohjalle. Kun tytön liikesuunta sovitaan positiiviseksi, liikemäärän säilymislaista saadaan skalaariyhtälö $m_1 v = (m_1 + m_2)u$, koska liikesuunnat hypyn aikana ja hypyn jälkeen ovat samat. Skalaariyhtälöstä tytön massaksi saadaan

$$m_1 = \frac{m_2 u}{v-u} = \frac{34\,\text{kg}\cdot 1{,}5\,\text{m/s}}{2{,}5\,\text{m/s} - 1{,}5\,\text{m/s}} = 51\text{ kg.}$$

**16-6.** **a)** Mittausohjelmalla saadusta kuvasta saadaan selville törmäävän vaunun nopeus ennen sen törmäämistä paikallaan olevaan vaunuun ja molempien vaunujen nopeudet törmäyksen jälkeen.



**b)** Mittausohjelmalla on määritetty liikkeen kuvaajien sivuajat juuri ennen ja jälkeen törmäyksen.




Sivuajien fysikaaliset kulmakertoimet antavat vaunujen nopeudet, ja ne ovat luettavissa mittausohjelman antamista tiedoista. Vaunun 1 ($m_1$ = 1,000 kg) nopeus ennen törmäystä on $v_{1,a} = 0,4764$ m/s ja törmäyksen jälkeen $v_{1,l} = 0,1874$ m/s.

Vaunun 2 ($m_2$ = 0,500 kg) nopeus ennen törmäystä on $v_{2,a} = 0$ m/s ja törmäyksen jälkeen $v_{2,l} = |-0,5403 \text{ m/s}|$.

Vaunujen yhteen laskettu liikemäärä ennen törmäystä on

$$p_\text{a} = p_{1,\text{a}} + p_{2,\text{a}} = 1,000 \text{ kg} \cdot 0,4764 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0 = 0,4764 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

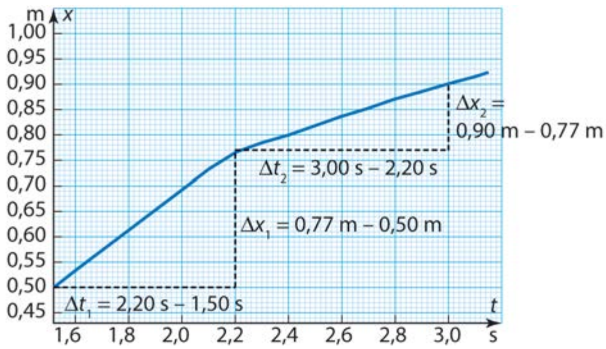
ja törmäyksen jälkeen

$$p_l = p_{1,l} + p_{2,l} = 1,000 \text{ kg} \cdot 0,1874 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,500 \text{ kg} \cdot 0,5403 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 0,4576 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

Liikemäärä säilyy törmäyksessä mittaustarkkuuden rajoissa. Huomaa, mittausohjelma antaa samaan suuntaan liikkuville vaunuille erimerkkiset nopeudet, koska anturi ovat radan eri päissä.

**16-7.**




**a)** Tutka mittaa vaunuradalla liikkuvan vaunun paikkaa. Hetkellä 2,2 s vaunu törmää toiseen vaunuun, jolloin vaunut tarttuvat yhteen. Vaunun nopeus ennen törmäystä on suurempi kuin yhteen tarttuneiden vaunujen nopeus.

**b)** Vaunun nopeus ennen törmäystä saadaan jyrkemmän suoran kulmakertoimesta.

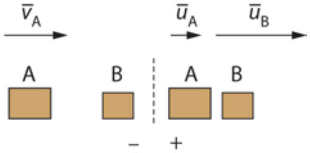
Keskinopeus on $v_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \dfrac{0{,}77\text{ m} - 0{,}50\text{ m}}{2{,}20\text{ s} - 1{,}50\text{ s}} \approx 0{,}39\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

Yhteen tarttuneiden vaunujen keskinopeus on

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{0{,}90 - 0{,}77\text{ m}}{3{,}00\text{ s} - 2{,}20\text{ s}} \approx 0{,}16\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nopeudet ovat samaan suuntaan.

**16-8.** **a)** Aluksi kappale A on tasaisessa liikkeessä ja B levossa. Hetkellä 0,50 s kappale A törmää kappaleeseen B. Törmäyksen jälkeen A:lla ja B:llä on erisuuret vakionopeudet. Molemmat liikkuvat kappaleen A alkuperäisen nopeuden suuntaan.



**b)** Liikemäärä säilyy törmäyksessä. Ennen törmäystä $m_B\bar{v}_B = \bar{0}$, joten kuvan merkinnöillä saadaan yhtälö $m_A\bar{v}_A = m_A\bar{u}_A + m_B\bar{u}_B$. Valitaan kappaleiden liikesuunta positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä

$m_A v_A = m_A u_A + m_B u_B$ eli $m_A(v_A - u_A) = m_B u_B$

saadaan kappaleen A massaksi

$$m_A = \frac{u_B}{v_A - u_A} m_B$$

Kappaleiden nopeudet saadaan kappaleiden paikan kuvaajista suorien fysikaalisina kulmakertoimina:

$$v_A = \frac{\Delta x_{A1}}{\Delta t_{A1}} = \frac{0,80\,\text{m}}{0,50\text{ s}} = 1,6\text{ m/s},\quad u_A = \frac{\Delta x_{A2}}{\Delta t_{A2}} = \frac{0,20\,\text{m}}{0,50\,\text{s}} = 0,40\text{ m/s}\quad \text{ja}$$

$$u_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} = \frac{1,0\,\text{m}}{0,50\,\text{s}} = 2,0\text{ m/s}.$$

Kappaleen A massa on

$$m_A = \frac{u_B}{v_A - u_A} m_B = \frac{2,0\text{ m/s}}{1,6\text{ m/s} - 0,40\,\text{m/s}} \cdot 51\,\text{g} = 85\text{ g}.$$

Kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia ennen törmäystä on

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{1}{2}m_B v^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,085\text{ kg}\cdot(1,6\text{ m/s})^2 + 0\text{ J} = 0,1088\text{ J} \approx 0,11\text{ J}$$

ja törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,085\text{ kg}\cdot(0,40\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}\cdot 0,051\text{ kg}\cdot(2,0\text{ m/s})^2 \approx 0,1088\text{ J} = 0,11\text{ J}. \end{aligned}$$

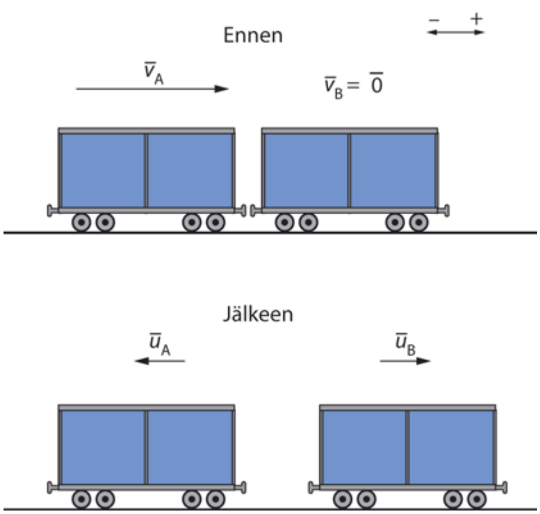
Huomataan, että liike-energia säilyy, joten a-kohdan vastausta voidaan täydentää toteamalla, että törmäys on kimmoinen.

**16-9.** Kappaleen ja siihen tarttuneen nuolen liike-energia törmäyksen jälkeen on $E_\text{k} = \frac{1}{2}Mu^2$, jossa $M = m_\text{kpl} + m_\text{nuoli}$ ja $u$ on yhteinen nopeus. Kun kappaleen heilahduksen lakikorkeus on $h$, mekaanisen energian säilymislaista seuraa yhtälö $\frac{1}{2}Mu^2 = Mgh$, josta voidaan ratkaista nopeus $u$, $u = \sqrt{2gh}$. Merkitään nuolen nopeutta sen osuessa kappaleeseen $v_\text{nuoli}$. Koska liikemäärä säilyy nuolen ja kappaleen törmäyksessä, saadaan yhtälö $m_\text{nuoli}v_\text{nuoli} = Mu$, josta saadaan nuolen nopeudeksi

$$v_\text{nuoli} = \frac{Mu}{m_\text{nuoli}} = \frac{\left(m_\text{kpl} + m_\text{nuoli}\right)\sqrt{2gh}}{m_\text{nuoli}}$$

$$= \frac{\left(0{,}95\text{ g} + 0{,}045\text{ kg}\right)\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\cdot 0{,}08\text{ m}}}{0{,}045\text{ kg}} \approx 28\text{ m/s}.$$

**16-10.**




Törmäyksessä liikemäärä säilyy, joten $m_\text{A}\bar{v}_\text{A} + m_\text{B}\bar{v}_\text{B} = m_\text{A}\bar{u}_\text{A} + m_\text{B}\bar{u}_\text{B}$. Koska vaunu B on levossa ennen törmäistä, liikemäärän säilymislaki saa muodon $m_\text{A}\bar{v}_\text{A} + \bar{0} = m_\text{A}\bar{u}_\text{A} + m_\text{B}\bar{u}_\text{B}$.

Valitaan vaunun A suunta ennen törmäystä positiiviseksi suunnaksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$$m_A v_A = m_A(-u_A) + m_B u_B .$$

Vaunun B nopeudeksi saadaan

$$u_B = \frac{m_A v_A - m_A(-u_A)}{m_B} = \frac{80\,\text{kg} \cdot 5{,}0\,\text{m/s} - 80\,\text{kg} \cdot (-1{,}45\,\text{m/s})}{320\,\text{kg}} = 1{,}61250\,\text{m/s}.$$

Koska vierimisvastus on pieni, mekaaninen energia säilyy törmäyksen jälkeen.

Vaunun B liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi:

$$\frac{1}{2} m_B u_B^2 = m_B g h.$$

Ylätasanteen suurin korkeus on

$$h = \frac{u_B^2}{2g} = \frac{(1{,}6125\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}13\,\text{m}.$$

**16-11. a)** Liikemäärän säilymislaista seuraa yhtälö $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$, jossa $u$ on yhteen tarttuneiden autojen nopeus heti törmäyksen jälkeen. Valitaan kuorma-auton liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi, jolloin henkilöauton nopeus tulee kaavoihin negatiivisena. Ratkaistaan $u$:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{21\ 500\ \text{kg} \cdot 72\ \text{km/h} + 980\ \text{kg} \cdot (-108\ \text{km/h})}{21\ 500\ \text{kg} + 980\ \text{kg}}$$
$$= 64{,}1530\ \text{km/h} \approx 64\ \text{km/h}.$$

Koska tulos on positiivinen, liike on kuorma-auton alkuperäisen liikkeen suuntainen.

**b)** Kuorma-auton liikemäärän muutos on

$$\Delta p_1 = m_1 u - m_1 v_1 = m_1\left(u - v_1\right) = 21\,500 \text{ kg} \cdot (64{,}1530 \text{ km/h} - 72 \text{ km/h})$$
$$= -1{,}68711 \cdot 10^5 \text{kg} \cdot \frac{1}{3{,}6} \text{m/s} = -4{,}68640 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Suunta on päinvastainen kuorma-auton liikkeen alkuperäiseen suuntaan nähden.

Impulssiperiaatteen mukaan liikemäärän muutos $\Delta\overline{p}$ on yhtä suuri kuin impulssi $\overline{I} = \overline{F}t$, jossa $\overline{F}$ on kappaleeseen vaikuttava voima ja $t$ voiman vaikutusaika. Voimalle saadaan silloin yhtälö

$$\overline{F} = \frac{\overline{I}}{t} = \frac{\Delta\overline{p}}{t} \text{ eli skalaariyhtälönä}$$

$$F = \frac{\Delta p_1}{t} = \frac{-4{,}68640 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{50 \cdot 10^{-3} \text{s}} \approx -0{,}94 \text{ MN}.$$

Koska voima on negatiivinen, sen suunta on päinvastainen kuorma-auton liikkeen alkuperäiseen suuntaan nähden.

**16-12.** **a)** Kun mies (massa $m_1$) työntää pariaan (naisen massa $m_2$), he erkanevat ja liikkuvat vastakkaisiin suuntiin. Tapahtumassa kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$. Aluksi liikemäärä on nolla, joten $\overline{0} = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$. Kun miehen liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $0 = m_1u_1 - m_2u_2$, josta saadaan miehen nopeudeksi

$$u_1 = \frac{m_2u_2}{m_1}.$$

Kitkan tekemä työ on työnnön aikana pieni työnnössä vaikuttaviin voimiin verrattuna, joten se voidaan jättää huomiotta.

Työntöön käytetty energia 41 J muuttuu luistelijoiden liike-energiaksi eli

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = E.$$

Sijoitetaan tähän miehen nopeus $u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1}$:

$$\frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2 u_2}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = E.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{m_2^2}{m_1}u_2^2 + m_2 u_2^2 = 2E,$$

josta saadaan naisen nopeudeksi

$$u_2 = \sqrt{\frac{2E}{\frac{m_2^2}{m_1} + m_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 41\,\mathrm{J}}{\frac{(53\,\mathrm{kg})^2}{75\,\mathrm{kg}} + 53\,\mathrm{kg}}} = 0{,}952126\ \mathrm{m/s} \approx 0{,}95\ \mathrm{m/s}.$$

Miehen nopeus on

$u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1} = \frac{53\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}952126\ \mathrm{m/s}}{75\ \mathrm{kg}} = 0{,}672836\ \mathrm{m/s} \approx 0{,}67\ \mathrm{m/s}$ vastakkaiseen suuntaan.

**b)** Työ-energiaperiaatteen mukaan kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin liike-energian muutos eli $W = \Delta E_\mathrm{k}$. Luistelijoiden liike-energia kuluu kitkatyöhön. Nainen liukuu matkan *s*, jolloin työperiaatteen mukaan on

$$F_{\mu 2} s = \frac{1}{2}m_2 u_2^2.$$

Kun kitkavoima $F_{\mu 2} = \mu N = \mu m_2 g$ sijoitetaan yhtälöön $F_{\mu 2} s = \frac{1}{2}m_2 u_2^2$,

yhtälö tulee muotoon

$$\mu m_2 g s = \frac{1}{2}m_2 u_2^2.$$

Naisen liukuma matka on

$$s = \frac{u_2^2}{2\mu g} = \frac{(0{,}952126 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0{,}020 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2} \approx 2{,}3 \text{ m}.$$

Vastaavalla tavalla ratkaistaan miehen liukuma matka, joka on

$$s = \frac{u_1^2}{2\mu g} = \frac{(0{,}672836 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0{,}020 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2} \approx 1{,}2 \text{ m}.$$

**16-13.** **a)** Pallo pomppaa ensimmäisessä pompussa noin 64 cm:n korkeudelle, jolloin sen mekaaninen energia on $E = mgh$ = 0,055 g · 9,81 m/s² · 0,64 m = 0,345312 J. Alussa mekaaninen energia oli $E = mgh$ = 0,055 g · 9,81 m/s² · 1,00 m = 0,539550 J. Koska mekaaninen energia säilyy, nämä potentiaalienergiat ovat yhtä suuria kuin vastaavat liike-energiat lattian tasolla. Todetaan, että liike-energia ei säily törmäyksessä, vaan pienenee 0,53955 J – 0,345312 J = 0,194238 J, joten törmäys ei ole kimmoisa. Törmäys ei myös ole täysin kimmoton, koska pallo ei tartu lattiaan kiinni. Törmäys on siis kimmoton.

**b)** Pallon osuessa lattiaan, sen liike-energia on a-kohdan mukaan

$\frac{1}{2}mv_a^2 = 0{,}539550 \text{ J}$, josta saadaan nopeudeksi

$$v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}539550 \text{ J}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}539550 \text{ J}}{0{,}055 \text{ kg}}} = 4{,}42944 \text{ m/s}.$$

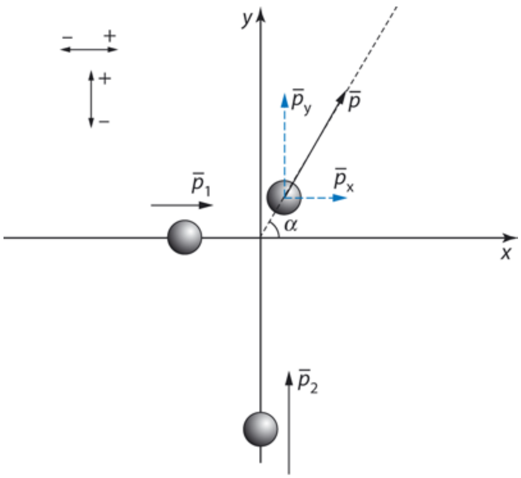
Lattiaan törmäyksen jälkeen pallon nopeus saadaan yhtälöstä

$\frac{1}{2}mv_1^2 = 0{,}345312 \text{ J}$ eli

$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}345312 \text{ J}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}345312 \text{ J}}{0{,}055 \text{ kg}}} = 3{,}54356 \text{ m/s}.$ Valitaan suunta ylös positiiviseksi suunnaksi. Pallon liikemäärän muutos on silloin

$$\Delta p = mv_1 - mv_a = m(v_1 - v_a) = 0{,}055\ \text{kg} \cdot \big(3{,}54356\ \text{m/s} - (-4{,}42944\ \text{m/s})\big)$$
$$\approx 0{,}44\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

**16-14.**




Oletetaan, että kiekko 1 liikkuu pitkin $x$-akselia ja kiekko 2 pitkin $y$-akselia, kumpikin positiiviseen suuntaan, ja että kiekot törmäävät origossa. Kiekot tarttuvat törmäyksessä yhteen, joten törmäys on kimmoton. Kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}$ . Liikemäärä säilyy myös $x$- ja $y$-suunnissa komponenteittain:

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u_x$ ja $m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u_y$.

Ratkaistaan nopeuden $u$ komponentit:

$$u_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}71\,\text{kg} \cdot 1{,}6\,\text{m/s}}{0{,}71\,\text{kg} + 0{,}52\,\text{kg}} \approx 0{,}9236\,\text{m/s} \quad \text{ja}$$

$$u_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}52\,\text{kg} \cdot 3{,}8\,\text{m/s}}{0{,}71\,\text{kg} + 0{,}52\,\text{kg}} \approx 1{,}607\,\text{m/s}.$$

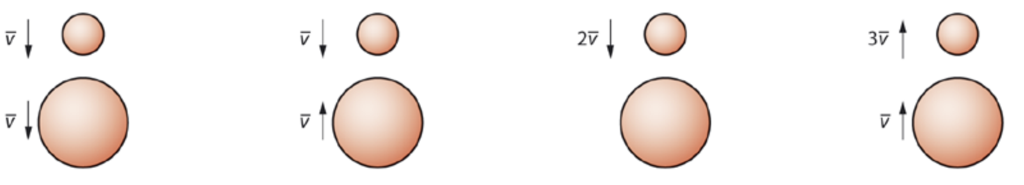
Kiekkojen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(0{,}9236\ \text{m/s})^2 + (1{,}607\ \text{m/s})^2} \approx 1{,}9\ \text{m/s}.$$

Suuntakulma $\alpha$ positiivisen $x$-akselin suhteen saadaan trigonometrian avulla:

$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{1{,}61\,\mathrm{m/s}}{0{,}924\,\mathrm{m/s}}$, josta saadaan suuntakulmalle arvo $\alpha \approx 60^\circ$.

**16-15.** Kun pallot putoavat, ne saavat saman nopeuden $v$. Voimme olettaa, että koripallon törmäys lattiaan on likipitäen kimmoisa, jolloin koripallon nopeus sen alkaessa liikkua ylöspäin on myös suunnilleen $v$. Tällöin jalkapallon nopeus koripallon suhteen on niiden törmätessä $2v$. Voidaan olettaa, että pallojen törmäys on kimmoinen, jolloin jalkapallo liikkuu törmäyksen jälkeen ylöspäin nopeudella $2v$ koripallon suhteen. Lattian suhteen se siis liikkuu nopeudella $3v$. Jalkapallon nopeuden suuruus siis kolminkertaistuu törmäyksessä eli sen liike-energia $\frac{1}{2}mv^2$ yhdeksänkertaistuu. Jos kaikki törmäykset olisivat täysin kimmoisia ja ilmanvastus ei vaikuttaisi, nousisi jalkapallo siis yhdeksän kertaa korkeammalle kuin mistä se pudotettiin, koska mekaanisen energian säilymislain mukaan $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$. Ihan niin korkealle se ei nouse käytännössä, mutta yllättävän korkealle kuitenkin.




Kuvat esittävät pallojen nopeuksia tapahtuman eri vaiheissa. Ensimmäisessä kuvassa molemmat pallot liikkuvat alaspäin. Toisessa kuvassa iso pallo on osunut jo lattiaan ja liikkuu ylöspäin, ja pieni pallo on vielä matkalla alaspäin. Kolmas kuva esittää samaa vaihetta kuin toinen kuva, mutta isomman pallon kannalta nähtynä: koska iso pallo liikkuu nopeudella *v* ylöspäin ja pieni pallo samalla nopeudella alaspäin, pieni pallo lähestyy isoa palloa nopeudella 2*v*. Neljännessä kuvassa molemmat pallot ovat matkalla ylöspäin.

## TESTAA OSAATKO S. 159

**1.** a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** a, c **5.** a, b **6.** c **7.** a, b, c **8.** a, b, c 9**.** a **10.** a