

Yhtälön ratkaisuperiaatteet

Yhtälön ratkaisut pysyvät samoina eli yhtälö säilyy **yhtäpitävänä** eli **ekvivalenttina**, kun

1. yhtälön puolet vaihdetaan keskenään:

$$a = b \Leftrightarrow b = a$$

2. yhtälön molemmille puolille lisätään (tai vähennetään) sama luku:

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

3. yhtälön molemmat puolet kerrotaan tai jaetaan samalla nollasta eroavalla luvulla: Jos $c \neq 0$, niin

$$a = b \Leftrightarrow ca = cb$$

Huom! Jos viimeisessä kohdassa $c = 0$, niin yhtälö **ei säily yhtäpitävänä**.

Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2x + 3}{x + 1} = 1$$

Ratkaisu. Määrittelyehto: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{2x + 3}{x + 1} &= 1 & | \cdot (x + 1) \quad (\neq 0) \\ \frac{\cancel{(x + 1)} \cdot (2x + 3)}{\cancel{x + 1}} &= 1 \cdot (x + 1) \end{aligned}$$

$$2x + 3 = x + 1$$

$$2x - x = 1 - 3$$

$$x = -2 \quad \text{kelpaa}$$

Vastaus: $x = -2$

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x-3} = \frac{6}{x^2-3x} + 1$$

Ratkaisu. Nimittäjien nollakohdat:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Määrittelyehto: $x \neq 0$ ja $x \neq 3$

Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x-3} = \frac{6}{x^2-3x} + 1$$

Ratkaisu. Määrittelyehto: $x \neq 0$ ja $x \neq 3$

$$\frac{2}{x-3} = \frac{6}{x^2-3x} + 1$$

$$\frac{2}{x-3} = \frac{6}{x(x-3)} + 1 \quad | \cdot x(x-3) \quad (\neq 0)$$

$$\frac{2 \cdot \cancel{x}(\cancel{x-3})}{\cancel{x}\cancel{x-3}} = \frac{6 \cdot \cancel{x}(\cancel{x-3})}{\cancel{x}(\cancel{x-3})} + x(x-3)$$

$$2x = 6 + x^2 - 3x$$

$$0 = x^2 - 5x + 6 \quad | \text{ ratkaisukaava}$$

$$x = 2 \text{ tai } \underbrace{x = 3}_{\text{Ei kelpaa}} \quad \underline{\text{Vastaus: } x = 2}$$