

Korkeamman asteen yhtälöt

- Kaikki 1. ja 2. asteen yhtälöt voidaan ratkaista **algebrallisesti** eli käyttämällä yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua sekä juurilausekkeita.
- Myös 3. ja 4. asteen yhtälöille voidaan johtaa algebralliset ratkaisukaavat, mutta ne ovat monimutkaisia.
- Viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöille ei ole yleistä ratkaisukaavaa.
- Korkeamman asteen ($n \geq 3$) yhtälöitä ratkaistaessa joudutaan yleensä tyytymään laskimilla tai tietokoneella saatuihin likimääräisiin ratkaisuihin.
- Tietyissä erikoistapauksissa korkeamman asteen polynomiyhtälö $P(x) = 0$ voidaan kuitenkin ratkaista algebrallisesti.

Korkeamman asteen yhtälön ratkaiseminen

Polynomi yhtälö $P(x) = 0$ voidaan tällä kurssilla usein ratkaista jakamalla polynomi $P(x)$ tekijöihin ja käyttämällä **tulon nollasääntöä**.

Tulon nollasääntö

Tulo on nolla, jos ja vain jos jokin tulon tekijöistä on nolla.

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{tai} \quad b = 0$$

Esimerkki. Ratkaise yhtälö $x^2 + x = 0$.

$$x^2 + x = 0$$

$$x \cdot (x + 1) = 0 \quad \Bigg| \quad \text{tulon nollasääntö}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -1 \quad \text{Vastaus: } x = -1 \text{ tai } x = 0$$

Esimerkki. Ratkaise yhtälö $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$.

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 \cdot x + 3x \cdot x - 4 \cdot x = 0$$

$$x \cdot (x^2 + 3x - 4) = 0 \quad | \text{ tulon nollasääntö}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Vastaus: $x = -4$, $x = 0$ tai $x = 1$

Joskus korkeamman asteen yhtälöstä saadaan yksinkertaisempi sopivalla apumuuttujalla.

Esimerkki. Ratkaise yhtälö $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2)^2 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$t = x^2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Vastaus: $x = \pm 1$