Tasokuvion peilaus pisteen suhteen vastaa 180 asteen kiertoa saman pisteen ympäri.

Tasogeometria

Kulmat ja suorat

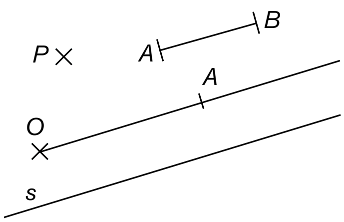
Ympyrä

Monikulmiot

Yhtenevyyskuvaukset

Joustokappaleita

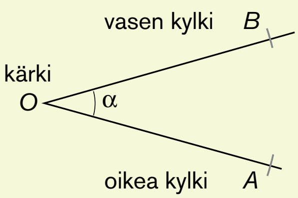
29 Kulma ja kulmien luokittelu



Tasogeometrian peruskäsitteitä ovat piste, jana, puolisuora, suora ja kulma.

Piste nimetään suuraakkosella, kuten piste *P*. Jana nimetään päätepisteidensä mukaan, jana *AB*. Puolisuora nimetään alkupisteen ja suoralla olevan pisteen avulla, kuvassa puolisuora *OA*, ja suora yleensä pienaakkosin, esimerkiksi suora *s*.

Kulma



Kulma *AOB* muodostuu siten, että puolisuora *OA* kiertyy pisteen *O* ympäri pisteeseen *B*. Kuviossa kulma merkitään sen aukeamaan piirretyllä pienellä kaarella.

Kulman *AOB* oikea kylki on *OA* ja vasen kylki *OB*. Piste *O* on kulman kärki. Kulman merkki on ∢.

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle O = \alpha$

Kulman suuruus ilmoitetaan asteina. Yksi aste 1° on täyden kierroksen 360:s osa.

α alfa	β beeta
γ gamma	δ delta

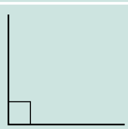
Kreikkalaisia aakkosia. Kreikkalaisten aakkosten luettelo on sivulla 297.

Kulma voidaan nimetä

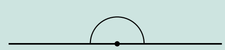
- kärkipisteen avulla, kulma *O* eli ∢*O*
- kyljillä olevien pisteiden ja kärjen avulla järjestyksessä **oikean kyljen piste, kärkipiste, vasemman kyljen piste**: kulma *AOB* eli ∢*AOB*
- kreikkalaisella kirjaimella α, β, γ jne., joka merkitään kulman aukeamaan.

Kulmien luokittelu

nollakulma 0°

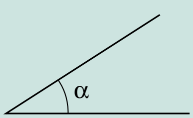


suora kulma 90°

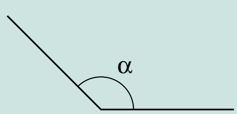


oikokulma 180°

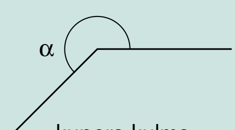
täysi kulma 360°



terävä kulma
$0° < \alpha < 90°$

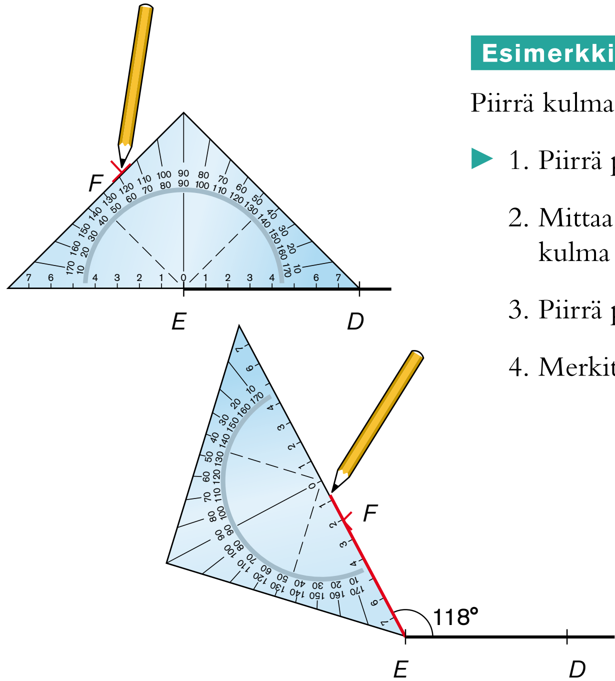


tylppä kulma
$90° < \alpha < 180°$



kupera kulma
$180° < \alpha < 360°$

30 Kulman mittaaminen ja piirtäminen



Esimerkki 1

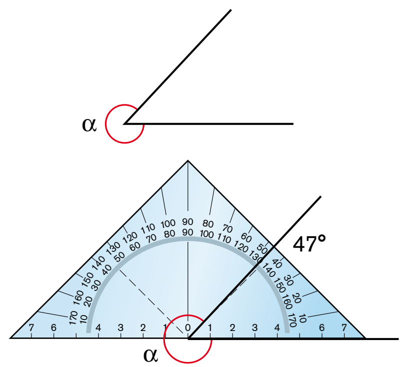
Piirrä kulma *DEF* = 118°.

▶ 1. Piirrä puolisuora *ED*.

2. Mittaa piirtokolmiolla kulma 118° ja merkitse piste *F*.

3. Piirrä puolisuora *EF*.

4. Merkitse kaarella kulma *DEF*.



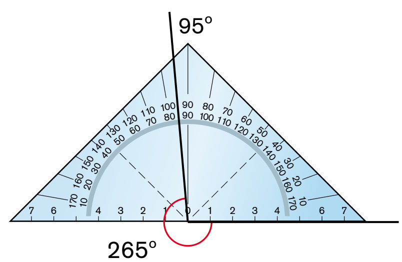
Esimerkki 2

Mittaa kupera kulma α.

▶ Kupera kulma α voidaan mitata niin, että mitataan ensin piirtokolmiolla vastaava terävä kulma, joka vähennetään täydestä kulmasta. Siis

$\alpha = 360° - 47° = 313°$.

Vastaus: $\alpha = 313°$



Esimerkki 3

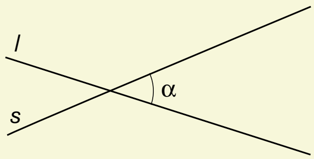
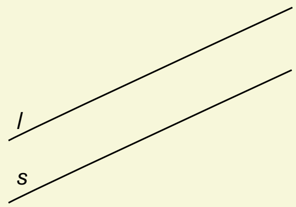
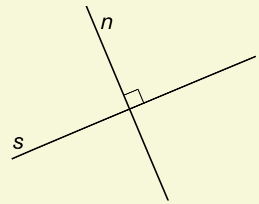
Piirrä kupera kulma 265°.

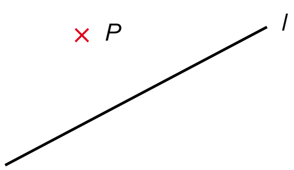
▶ Piirrä ensin tylppä kulma

$360° - 265° = 95°$.

Merkitse kaarella kulma 265°.

31 Suorat tasossa

Erisuuntaiset	Yhdensuuntaiset	Kohtisuorat
		
Suorat *l* ja *s* leikkaavat. Suorien välinen kulma α on pienin muodostuneista kulmista.	**Suorat *l* ja *s* eivät leikkaa, merkitään *l* || *s*.**	**Suorien *n* ja *s* väliin muodostuu suora kulma. Suorat ovat toistensa normaaleja, merkitään *n* ⊥ *s*.**

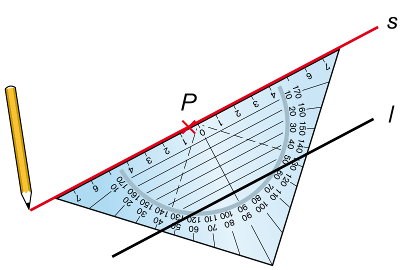


Esimerkki 1

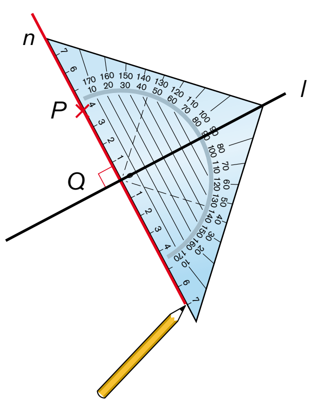
Piirrä piirtokolmion avulla pisteen *P* kautta

a) suoran *l* kanssa yhdensuuntainen suora *s*

b) suoran *l* normaali *n* ja mittaa pisteen *P* etäisyys suorasta *l*.



▶ **a)** Aseta piirtokolmion pisin sivu pisteen *P* kautta siten, että piirtokolmiossa olevat yhdensuuntaiset apuviivat ovat mahdollisimman tarkasti suoran *l* suuntaisia. Piirrä suora *s*.



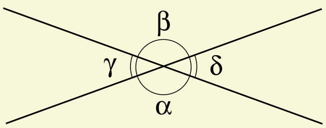
b) Pisteen etäisyys suorasta tarkoittaa kohtisuoraa eli lyhintä etäisyyttä.

Aseta piirtokolmion pisin sivu pisteen *P* kautta siten, että piirtokolmion tätä sivua vastaan kohtisuorassa oleva apuviiva yhtyy suoraan *l*. Piirrä normaali *n*. Lue etäisyys 4,0 cm piirtokolmion mitta-asteikolta.

Vastaus: **b)** $PQ = 4{,}0$ cm

32 Ristikulmat ja vieruskulmat

Ristikulmat

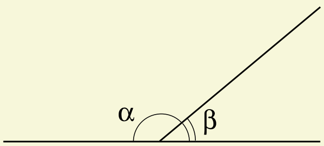


$\alpha = \beta$ ja $\gamma = \delta$

Ristikulmiksi sanotaan kahden suoran leikkauspisteeseen muodostuvia vastakkaisia kulmia.

Lause. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

Vieruskulmat



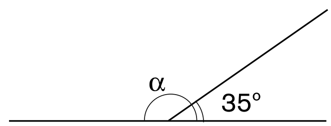
$\alpha + \beta = 180°$

Kun oikokulma 180° jaetaan puolisuoralla kahdeksi kulmaksi, niin näitä kulmia α ja β sanotaan vieruskulmiksi.

Lause. Vieruskulmien summa on 180°.

Esimerkki 1

Laske kulman α suuruus.

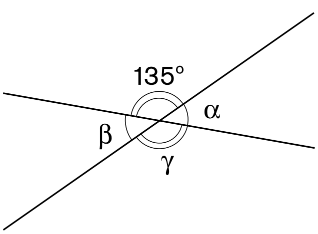


► Kulmat 35° ja α ovat vieruskulmia, joten

$\alpha = 180° - 35° = 145°$.

Vastaus: $\alpha = 145°$

Esimerkki 2



Laske kulmien α, β ja γ suuruudet.

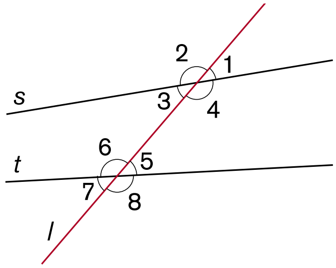
► Kulmat 135° ja α ovat vieruskulmia, joten
$\alpha = 180° - 135° = 45°$.

Kulmat α ja β ovat ristikulmia, joten $\beta = 45°$.

Kulmat γ ja 135° ovat ristikulmia, joten $\gamma = 135°$.

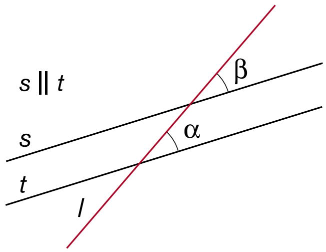
Vastaus: $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$ ja $\gamma = 135°$

33 Samankohtaiset kulmat



Kun suora *l* leikkaa kahta muuta suoraa *s* ja *t*, niin muodostuu neljä paria **samankohtaisia kulmia**:

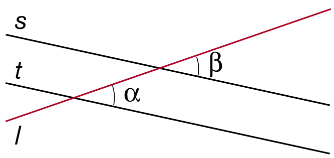
- kulmat 1 ja 5
- kulmat 2 ja 6
- kulmat 3 ja 7 sekä
- kulmat 4 ja 8.



Samankohtaisten kulmien yhtäsuuruus

Lause. **Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.**

Jos *s* || *t*, niin $\alpha = \beta$.



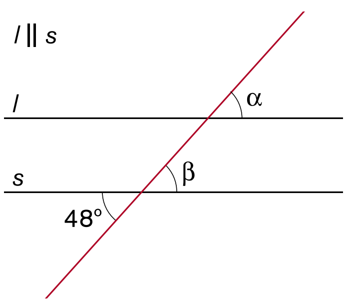
Suorien yhdensuuntaisuus

Lause. **Jos samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin suorat ovat yhdensuuntaiset.**

Jos $\alpha = \beta$, niin *s* || *t*.

Esimerkki 1

Kuinka suuria kulmat α ja β ovat, kun suorat *l* ja *s* ovat yhdensuuntaiset? Perustele vastauksesi.

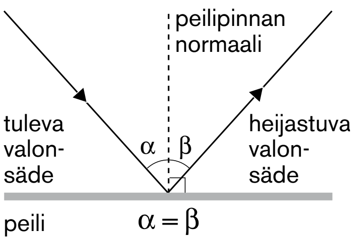


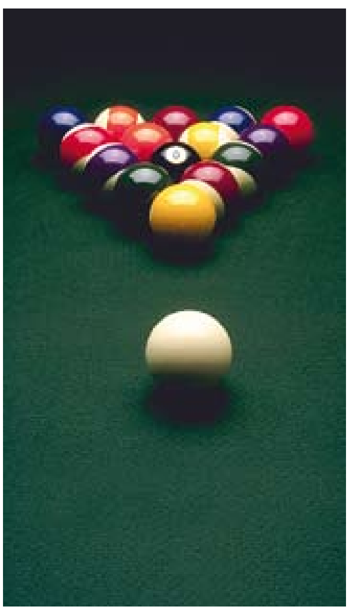
▶ Kulmat 48° ja β ovat ristikulmia, joten kulma $\beta = 48°$.
Koska *l* || *s*, niin samankohtaisina kulmina $\alpha = \beta = 48°$.

Vastaus: $\alpha = \beta = 48°$

34 Heijastuminen

Jos valonsäde osuu tasopeiliin 60°:n kulmassa, niin valo heijastuu peilistä yhtä suuressa kulmassa.



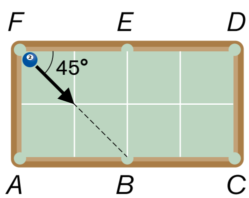


Tulokulma on tulevan valonsäteen ja peilipinnan normaalin välinen kulma. **Heijastuskulma** on heijastuneen valonsäteen ja normaalin välinen kulma.

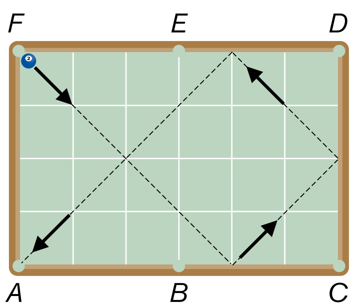
Valonsäde heijastuu peilin pinnasta siten, että **tulokulma** α on yhtä suuri kuin **heijastuskulma** β.

Esimerkki 1

Biljardipallo kimpoaa pelipöydän reunasta siten, että tulokulma ja heijastuskulma ovat yhtä suuret. Pallo lyödään pöydän nurkasta F vastakkaiseen reunaan 45°:n kulmassa.

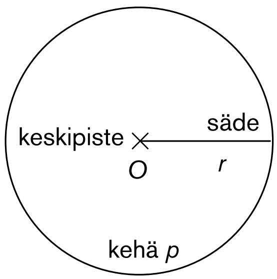


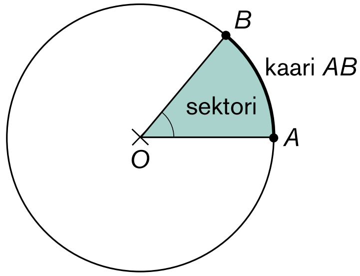
Jos pelipöydän koko on 2×4 ruutua, niin pallo putoaa pussiin B.

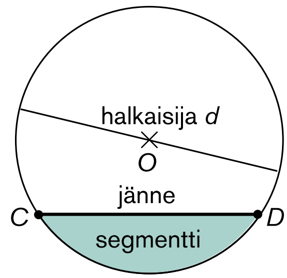


Jos pelipöydän koko on 4×6 ruutua, niin pallo kimpoaa laidoista ja putoaa pussiin A.

35 Ympyrä





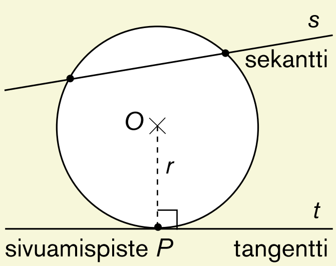


Ympyräviivan eli ympyrän **kehän** muodostavat ne tason pisteet, jotka ovat **säteen** etäisyydellä **keskipisteestä**.

Kaari on kahden kehäpisteen välinen ympyräviivan osa. **Sektori** on kahden säteen ja niiden välisen kaaren rajoittama alue. Säteiden välinen kulma on **keskuskulma**.

Jänne on kahden kehäpisteen välinen jana. Keskipisteen kautta kulkeva jänne on **halkaisija**. **Segmentti** on jänteen ja vastaavan kaaren rajoittama alue.

Sekantti ja tangentti

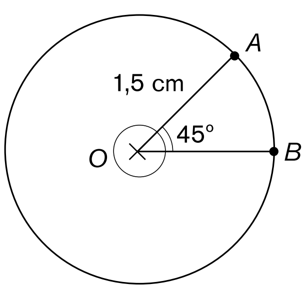


Sekantti on suora, joka leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä.

Tangentti on suora, jolla on yksi yhteinen piste ympyrän kanssa.

Lause. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.

Esimerkki 1



a) Laske kuperan kulman AOB suuruus.
b) Laske ympyrän halkaisijan pituus.

▶ **a)** Kulman BOA suuruus on 45°, joten

$\sphericalangle AOB = 360° - 45° = 315°$.

b) Ympyrän halkaisija on kaksi kertaa säteen pituinen.
$2 \cdot 1{,}5\text{ cm} = 3{,}0\text{ cm}$

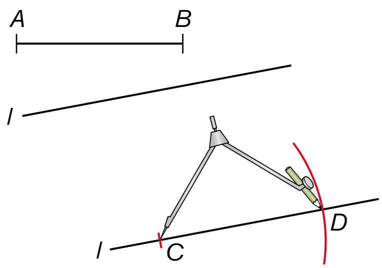
Vastaus: **a)** $\sphericalangle AOB = 315°$ **b)** 3,0 cm

Geometrinen piirtäminen:

36 Janan ja kulman siirtäminen

Geometrisessa piirtämisessä sallitut apuvälineet ovat harppi ja viivain ilman mitta-asteikkoa.

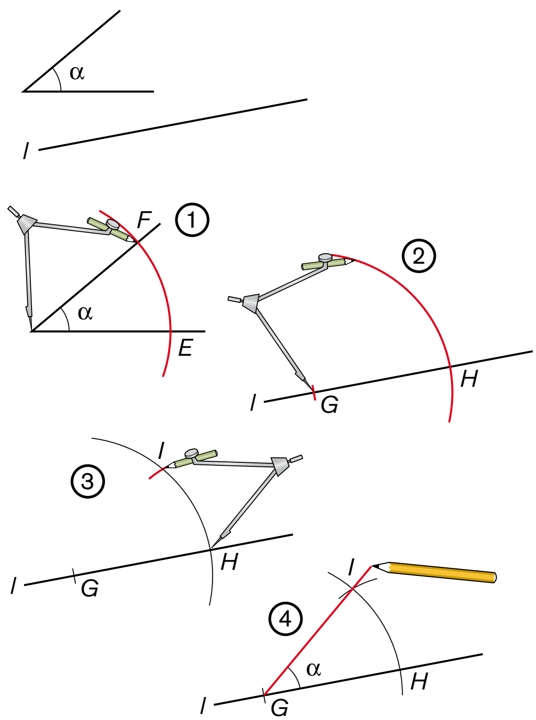
Esimerkki 1



Siirrä geometrisesti jana *AB* suoralle *l*.

▶ Säädä harpin kärkiväli pisteestä *A* pisteeseen *B*. Aseta harpin kärki suoralta *l* valittuun pisteeseen *C* ja piirrä kärkiväliä muuttamatta ympyrän kaari, joka leikkaa suoran pisteessä *D*. Jana *CD* on samanpituinen kuin *AB*.

Esimerkki 2



Siirrä geometrisesti kulma α suoralle *l*.

▶ 1. Aseta harpin kärki kulman α kärkeen ja piirrä ympyrän kaari, joka leikkaa kulman kyljet pisteissä *E* ja *F*.

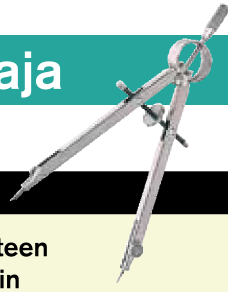
2. Siirrä harpin kärki kärkiväliä muuttamatta suoralla *l* olevaan pisteeseen *G* ja piirrä ympyrän kaari, joka leikkaa suoran pisteessä *H*.

3. Säädä harpin kärkiväli pisteestä *E* pisteeseen *F* ja siirrä harpin kärki kärkiväliä muuttamatta pisteeseen *H* sekä piirrä ympyrän kaari, joka leikkaa aiemmin piirretyn kaaren pisteessä *I*.

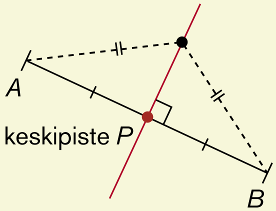
4. Piirrä puolisuora *GI*. Kulma *HGI* on vaadittu kulma.

Geometrinen piirtäminen:

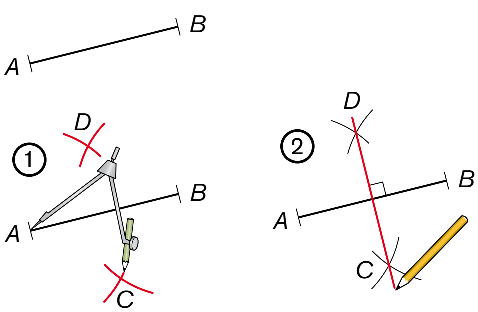
37 Keskinormaali ja kulmanpuolittaja



Janan keskinormaali



Janan keskinormaali on janan keskipisteen kautta kulkeva normaali. Keskinormaalin jokainen piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



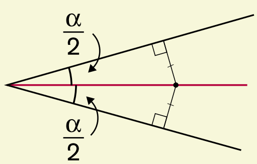
Esimerkki 1

Piirrä geometrisesti janan *AB* keskinormaali.

▶ 1. Piirrä *A* ja *B* keskipisteinä samansäteiset toisensa leikkaavat kaaret janan *AB* molemmille puolille.

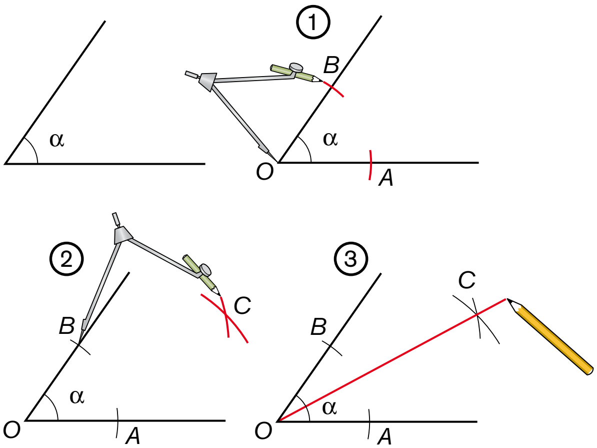
2. Keskinormaali on kaarien leikkauspisteiden *C* ja *D* kautta kulkeva suora.

Kulmanpuolittaja



Kulmanpuolittaja on puolisuora, joka jakaa kulman α kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Kulmanpuolittajan jokainen piste on yhtä etäällä kulman kyljistä.



Esimerkki 2

Piirrä harpin ja viivaimen avulla terävän kulman α puolittaja.

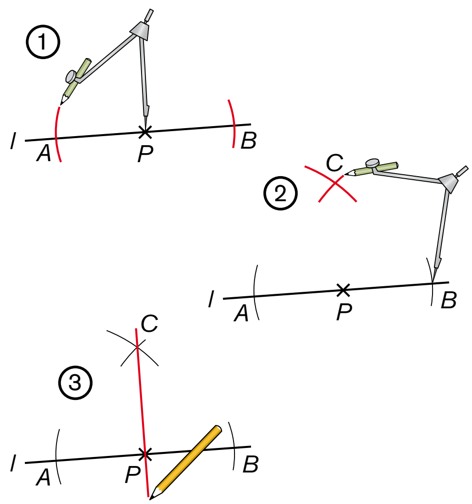
▶ 1. Mittaa harpin avulla yhtä pitkät etäisyydet *OA* ja *OB* kulman α molempia kylkiä pitkin.

2. Piirrä pisteet *A* ja *B* keskipisteinä samansäteiset toisensa leikkaavat kaaret kulman α aukeamaan.

3. Kulmanpuolittaja on kärkipisteestä *O* lähtevä ja kaarien leikkauspisteen kautta kulkeva puolisuora.

Geometrinen piirtäminen:

38 Normaali ja yhdensuuntainen suora



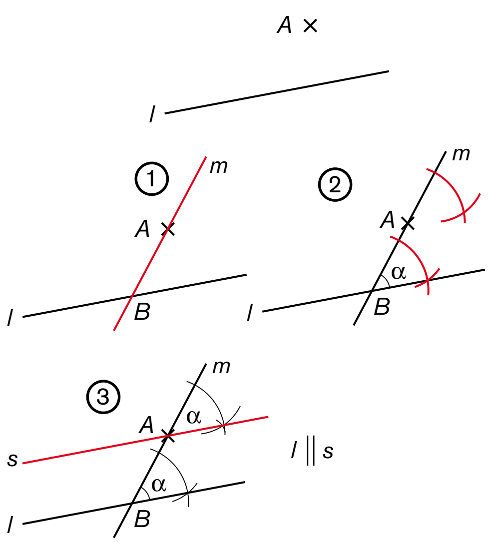
Esimerkki 1

Piirrä geometrisesti normaali suoralle *l* pisteeseen *P*.

▶ 1. Mittaa harpin avulla yhtä pitkät etäisyydet *PA* ja *PB* suoraa *l* pitkin molempiin suuntiin.

2. Piirrä pisteet *A* ja *B* keskipisteinä samansäteiset toisensa leikkaavat kaaret suoran samalle puolelle. Kaarien leikkauspiste on *C*.

3. Normaali on pisteen *P* ja kaarien leikkauspisteen *C* kautta kulkeva suora.



Esimerkki 2

Piirrä geometrisesti pisteen *A* kautta suoran *l* kanssa yhdensuuntainen suora *s*.

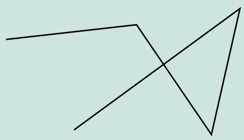
▶ 1. Piirrä viivaimen avulla pisteestä *A* suora *m*, joka leikkaa suoran *l* pisteessä *B*.

2. Siirrä leikkauspisteeseen *B* muodostunut kulma α suoran *m* pisteeseen *A* siten, että suora *m* on kulman vasen kylki.

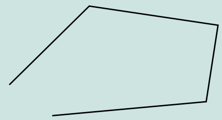
3. Siirretyn kulman oikea kylki on vaaditulla suoralla.

40 Monikulmio

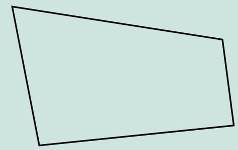
Murtoviiva muodostuu peräkkäin asetetuista janoista.



itseään leikkaava murtoviiva



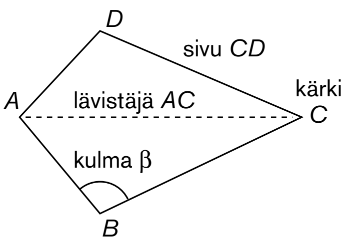
itseään leikkaamaton murtoviiva



itseään leikkaamaton suljettu murtoviiva

Monikulmio

Monikulmiota rajoittaa itseään leikkaamaton suljettu murtoviiva.

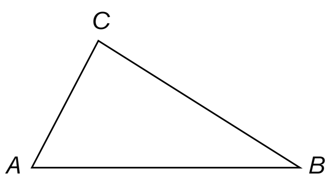


Monikulmio nimetään kärkien lukumäärän mukaan.

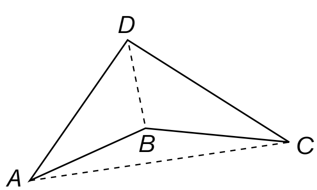
Monikulmion
- **lävistäjä** on kahden kärjen välinen jana, joka ei ole sivu
- **piiri** eli ympärysmitta on sivujen pituuksien summa
- **kulma** on kahden sivun välinen kulma, jonka aukeama jää monikulmion sisään.

Esimerkki 1

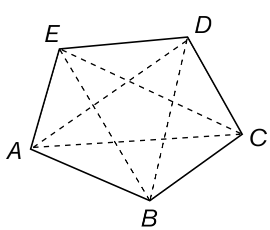
Nimeä monikulmio ja laske sen lävistäjien lukumäärä.



▶ *ABC* on kolmikulmio eli **kolmio**.
Kolmiolla ei ole lävistäjää.



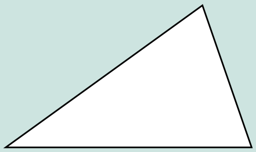
ABCD on **nelikulmio**.
Nelikulmiolla on kaksi lävistäjää. Lävistäjä *BD* on nelikulmion sisällä ja lävistäjä *AC* sen ulkopuolella.



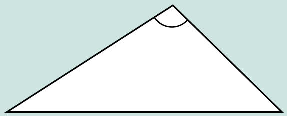
ABCDE on **viisikulmio**.
Viisikulmiolla on viisi lävistäjää.

41 Kolmion kulmia

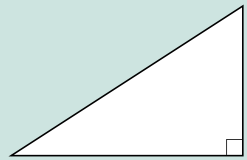
Kolmioiden luokittelua



Teräväkulmaisen kolmion jokainen kulma on terävä.

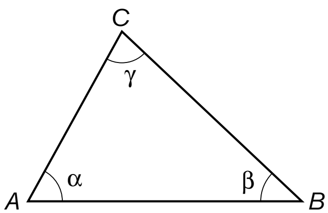


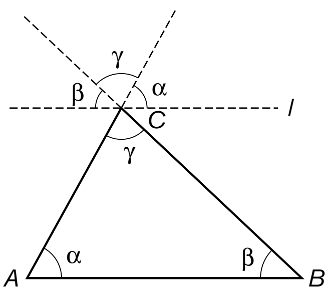
Tylppäkulmaisen kolmion yksi kulma on tylppä.



Suorakulmaisen kolmion yksi kulma on 90°.

Esimerkki 1





Kolmion *ABC* kulmat ovat α, β ja γ. Päättele kuvion avulla kolmion kulmien summa $\alpha + \beta + \gamma$.

▶ Piirretään kärjen *C* kautta sivun *AB* kanssa yhdensuuntainen suora *l*. Jatketaan sivuja *AC* ja *BC* pisteen *C* yli. Pisteeseen *C* muodostuu suoran *l* yläpuolelle kolme kulmaa.

Oikeanpuoleinen kulma on samankohtainen ja siksi yhtä suuri kulman α kanssa. Vastaavasti vasemmanpuoleinen kulma on samankohtainen ja yhtä suuri kulman β kanssa. Keskimmäinen kulma on ristikulmana samansuuruinen kulman γ kanssa.

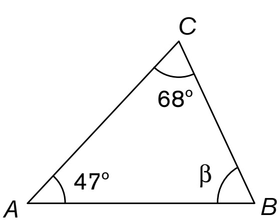
Näiden kolmen kulman suuruudet ovat α, β ja γ, ja ne muodostavat yhdessä oikokulman. Kulmien summa on siis $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Vastaus: 180°

Kolmion kulmien summa

Lause. Kolmion kulmien summa on 180°.

Esimerkki 2



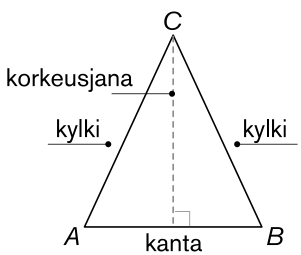
Laske kulman β suuruus.

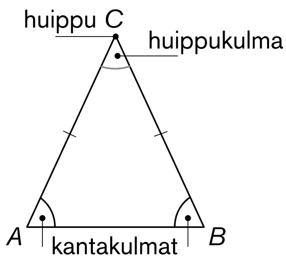
▶ Kolmion kulmien summa on 180°, joten kulman β suuruus on

$\beta = 180° - 47° - 68° = 65°$.

Vastaus: $\beta = 65°$

42 Tasakylkinen ja tasasivuinen kolmio

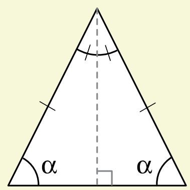




Yhtä pitkät sivut merkitään kuvioon pienellä poikkiviivalla.

Tasakylkisen kolmion yhtä pitkät sivut AC ja BC ovat kolmion **kyljet** ja kolmas sivu AB on **kanta**. Kulmat A ja B ovat **kantakulmat**. Piste C on kolmion **huippu**, kulma C on **huippukulma**.

Tasakylkinen kolmio

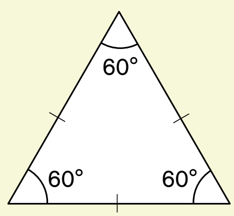


Kolmio on tasakylkinen, jos siinä on kaksi yhtä pitkää sivua.

Tasakylkisen kolmion kannan vastainen korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Lause. **Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.**

Tasasivuinen kolmio

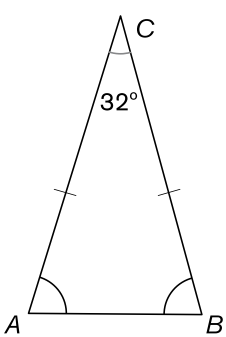


Kolmio on tasasivuinen, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

Lause. **Tasasivuisen kolmion jokainen kulma on 60°.**

Esimerkki 1

Tasakylkisen kolmion *ABC* huippukulma on 32°.
Laske kantakulman suuruus.



▶ Kantakulmien summa on

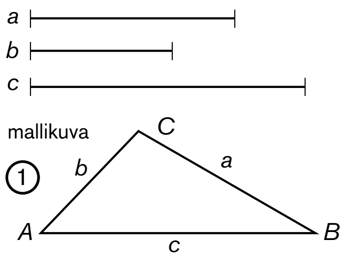
$180° - 32° = 148°.$

Koska tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, niin kantakulman suuruus on

$\frac{148°}{2} = 74°.$

Vastaus: 74°

43 Kolmion piirtäminen

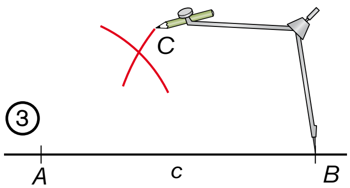


Esimerkki 1

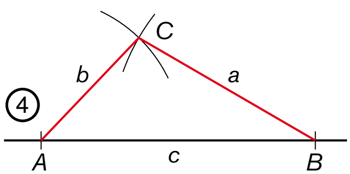
Piirrä geometrisesti kolmio, jonka sivut ovat janojen *a*, *b* ja *c* pituiset.

▶ 1. Piirrä ratkaisun suunnittelua varten mallikuva vaaditusta kolmiosta.

2. Piirrä suora ja siirrä jana *c* tälle suoralle pisteeseen *A*. Merkitse janan *c* toista päätepistettä kirjaimella *B*.



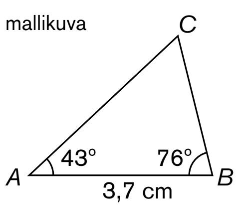
3. Piirrä piste *A* keskipisteenä ympyrän kaari, jonka säteenä on jana *b*, ja piirrä piste *B* keskipisteenä tätä kaarta leikkaava ympyrän kaari, jonka säteenä on jana *a*.



4. Yhdistä viivaimella kaarien leikkauspiste *C* janan *c* päätepisteisiin *A* ja *B*. Näin muodostuneen kolmion *ABC* sivut ovat janojen *a*, *b* ja *c* pituiset.

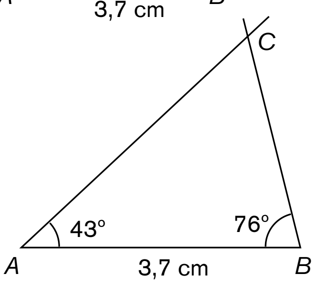
Esimerkki 2

Piirrä kolmio, jonka kaksi kulmaa ovat 43° ja 76° ja niiden välisen sivun pituus on 3,7 cm.



▶ 1. Piirrä ratkaisun suunnittelua varten mallikuva vaaditusta kolmiosta.

2. Piirrä viivaimen avulla sivu $AB = 3{,}7$ cm.

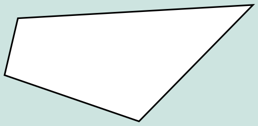


3. Piirrä piirtokolmion avulla pisteeseen *A* kulma 43° ja pisteeseen *B* kulma 76°.

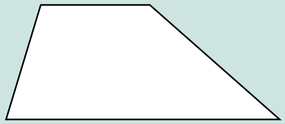
4. Jatka kulman *A* vasenta ja kulman *B* oikeaa kylkeä, kunnes ne leikkaavat. Merkitse kylkien leikkauspistettä kirjaimella *C*. Näin muodostunut kolmio *ABC* on kysytty kolmio.

44 Nelikulmio

Nelikulmioiden luokittelua



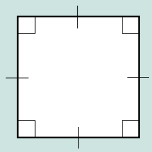
Nelikulmiossa on neljä kulmaa ja neljä sivua.



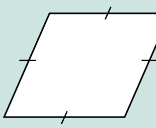
Puolisuunnikas on nelikulmio, jossa on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua.

Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

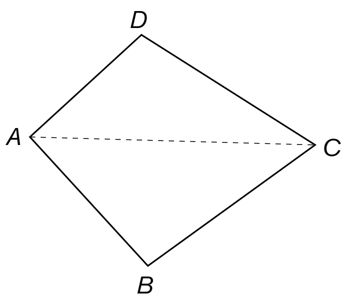
Suorakulmio on suunnikas, jonka kulmat ovat 90°.



Neliö on suorakulmio, jonka sivut ovat yhtä pitkät.



Neljäkäs eli **vinoneliö** on suunnikas, jonka sivut ovat yhtä pitkät.



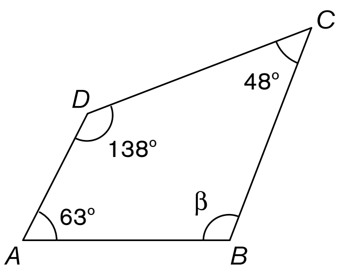
Nelikulmiossa $ABCD$

- AB ja AD ovat **viereisiä sivuja**
- AB ja CD ovat **vastakkaisia sivuja**
- $\sphericalangle A$ ja $\sphericalangle B$ ovat **viereisiä kulmia**
- $\sphericalangle A$ ja $\sphericalangle C$ ovat **vastakkaisia kulmia**
- jana AC on **lävistäjä**.

Koska lävistäjä jakaa nelikulmion kahdeksi kolmioksi, niin nelikulmion kulmien summa on kaksi kertaa kolmion kulmien summa.

Nelikulmion kulmien summa

Lause. Nelikulmion kulmien summa on 2 · 180° = 360°.



Esimerkki 1

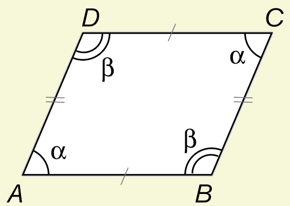
Laske kulman β suuruus.

▶ $\beta = 360° - 63° - 138° - 48° = 111°$

Vastaus: $\beta = 111°$

45 Suunnikas

Suunnikas



Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

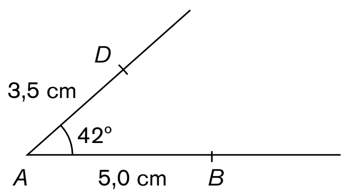
Lause. Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

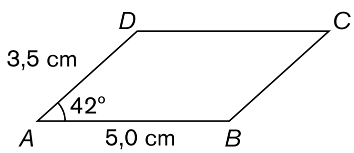
Lause. Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Lause. Suunnikkaan viereisten kulmien summa on 180°.

Esimerkki 1

a) Piirrä piirtokolmion avulla suunnikas $ABCD$, jonka viereiset sivut ovat $AB = 5{,}0$ cm ja $AD = 3{,}5$ cm ja niiden välinen kulma A on 42°.
b) Kuinka suuria suunnikkaan muut kulmat ovat?





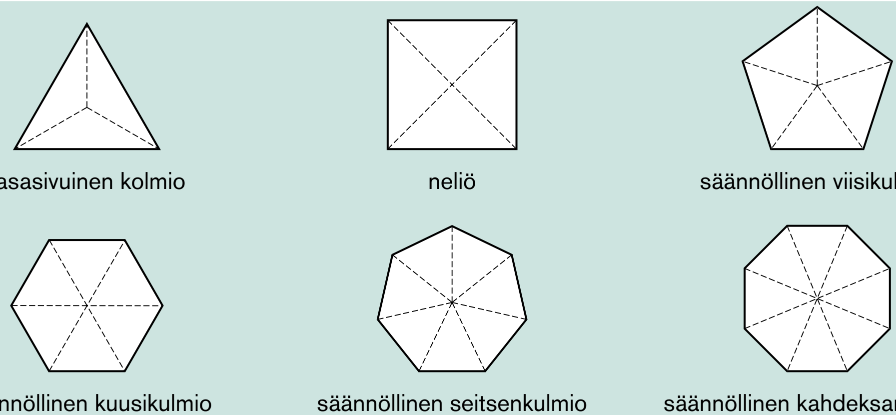
► **a)** Piirrä sivu $AB = 5{,}0$ cm ja piirrä pisteeseen A kulma 42°. Erota kulman vasemmalta kyljeltä sivu $AD = 3{,}5$ cm. Piirrä piirtokolmion linjaviivojen avulla pisteen D kautta sivun AB kanssa yhdensuuntainen suora ja pisteen B kautta sivun AD kanssa yhdensuuntainen suora. Merkitse suorien leikkauspistettä kirjaimella C. Nelikulmio $ABCD$ on vaadittu suunnikas.
b) Kulmat B ja D ovat molemmat kulman A viereisiä kulmia suunnikkaassa $ABCD$. Kummankin suuruus on siten $180° - 42° = 138°$. Kulma C on vastakkaisena kulmana yhtä suuri kuin kulma A.

Vastaus: **b)** $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 138°$ ja $\sphericalangle C = 42°$

Suunnikkaita käytetään lattialaattoina.

46 Säännöllinen monikulmio

Säännöllisiä monikulmioita



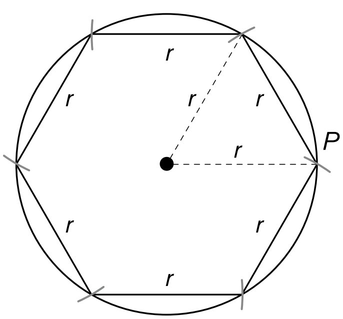
Säännöllinen monikulmio

Monikulmio on säännöllinen, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat yhtä suuret.

Säännöllinen monikulmio voidaan piirtää ympyrän sisälle. Sivua vastaavan keskuskulman suuruus saadaan jakamalla täysi kulma 360° sivujen lukumäärällä.

Esimerkki 1

Piirrä ympyrän sisälle säännöllinen kuusikulmio.



▶ Kuusikulmion sivua vastaava keskuskulma on $360° : 6 = 60°$, joten sivua vastaava keskuskolmio on tasasivuinen. Kuusikulmion sivu on siis ympyrän säteen pituinen. Kuusikulmio voidaan siten piirtää seuraavasti:

1. Merkitse ympyrän kehälle jokin piste *P*.
2. Erota harpin avulla pisteestä *P* alkaen säteen pituisia jänteitä.
3. Piirrä jänteet.

Kertausta:

47 Pituuden ja pinta-alan yksiköt

neliökilometri	hehtaari	aari	neliömetri	neliödesimetri	neliösenttimetri	neliömillimetri
km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000 1 m^2	0,000 001 m^2

: 10

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

· 10

Pituuden yksiköiden suhdeluku on 10.

: 100

km^2	ha	a	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

· 100

Pinta-alan yksiköiden suhdeluku on 100.

Esimerkki 1

Jaakon pituus on 161 cm. Ilmoita pituus **a)** metreinä **b)** millimetreinä.

m	dm	cm	mm
1	6	1	0

▶ **a)** 161 cm = 16,1 dm = 1,61 m

b) 161 cm = 1 610 mm

Vastaus: **a)** 1,61 m **b)** 1 610 mm

Esimerkki 2

Muunna neliömillimetreiksi. **a)** 8 cm^2 **b)** 6 dm^2

m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
				0	8	0	0

m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			6	0	0	0	0

▶ **a)** 8 cm^2 = 800 mm^2

b) 6 dm^2 = 600 cm^2 = 60 000 mm^2

Vastaus: **a)** 800 mm^2 **b)** 60 000 mm^2

Esimerkki 3

Viljapellon pinta-ala on 68 a. Kuinka suuri pellon pinta-ala on **a)** neliömetreinä **b)** hehtaareina?

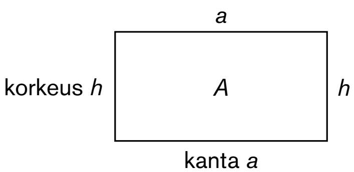
km^2		ha		a		m^2	
				6	8	0	0

▶ **a)** 68 a = 6 800 m^2

b) 68 a = 0,68 ha

Vastaus: **a)** 6 800 m^2 **b)** 0,68 ha

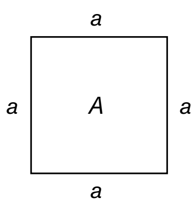
48 Suorakulmion piiri ja pinta-ala



Suorakulmion piiri ja pinta-ala

Lause. **Suorakulmion piiri p on kannan ja korkeuden summa kerrottuna kahdella.**
$p = 2 \cdot (a + h)$

Suorakulmion pinta-ala A on kannan ja korkeuden tulo.
$A = a \cdot h$

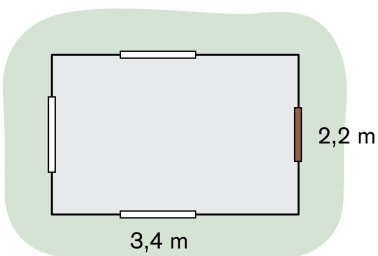


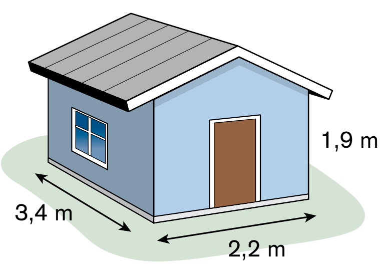
Neliön piiri ja pinta-ala

Lause. **Neliön piiri on sivu kerrottuna neljällä.**
$p = 4 \cdot a$

Neliön pinta-ala on sivun pituuden toinen potenssi eli sivun pituuden neliö.
$A = a \cdot a = a^2$

Esimerkki 1





Suorakulmion muotoisen vajan lattian pituus on 3,4 metriä ja leveys 2,2 metriä. Vajan seinän korkeus on 1,9 metriä.

a) Kuinka suuri on vajan pohjan pinta-ala?
b) Kuinka pitkä on lattian alla kiertävä sokkeli eli pohjana olevan suorakulmion piiri?

► **a)** Vajan lattian pinta-ala on

$A = 3{,}4\ \text{m} \cdot 2{,}2\ \text{m} = 7{,}48\ \text{m}^2 \approx 7{,}5\ \text{m}^2.$

Kertolaskun tulos pyöristetään yhtä monen merkitsevän numeron tarkkuuteen kuin niitä on epätarkimmassa lähtöarvossa.

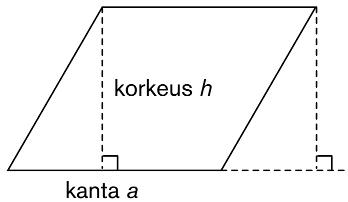
b) Lattian alla kiertävän sokkelin pituus eli suorakulmion piiri on

$p = 2 \cdot (3{,}4\ \text{m} + 2{,}2\ \text{m}) = 11{,}2\ \text{m}.$

Yhteenlaskun tulos pyöristetään yhtä monen desimaalin tarkkuuteen kuin niitä on epätarkimmassa lähtöarvossa.

Vastaus: **a)** $A \approx 7{,}5\ \text{m}^2$ **b)** $p = 11{,}2$ m

49 Suunnikkaan ja kolmion pinta-ala



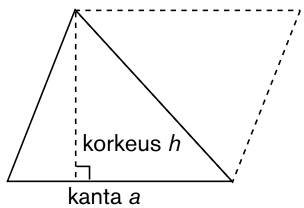
Suunnikkaan **korkeus** on kärkipisteen kohtisuora etäisyys **kannasta**.

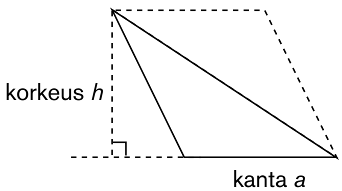
Suunnikkaan voi muuttaa samankorkuiseksi ja samankantaiseksi suorakulmioksi.

Suunnikkaan pinta-ala

Lause. **Suunnikkaan pinta-ala A on kannan ja korkeuden tulo.**

$$A = a \cdot h$$





Kolmion **korkeus** on kärkipisteen kohtisuora etäisyys **kannasta** tai kannan jatkeesta.

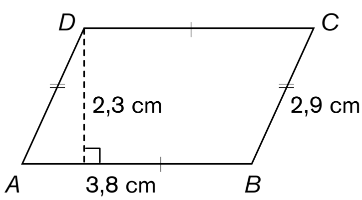
Kolmion pinta-ala on puolet samankorkuisen ja samankantaisen suunnikkaan pinta-alasta.

Kolmion pinta-ala

Lause. **Kolmion pinta-ala A on kannan ja korkeuden tulo jaettuna kahdella.**

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

Esimerkki 1



Laske suunnikkaan *ABCD* pinta-ala ja piiri.

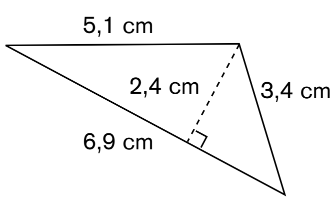
▶ Suunnikkaan kanta on 3,8 cm ja korkeus 2,3 cm. Pinta-ala on

$$A = 3{,}8 \text{ cm} \cdot 2{,}3 \text{ cm} = 8{,}74 \text{ cm}^2 \approx 8{,}7 \text{ cm}^2.$$

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, joten piiri on

$$p = 3{,}8 \text{ cm} + 2{,}9 \text{ cm} + 3{,}8 \text{ cm} + 2{,}9 \text{ cm} = 13{,}4 \text{ cm}.$$

Esimerkki 2



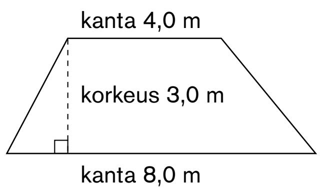
Laske kolmion pinta-ala.

▶ Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{6{,}9 \text{ cm} \cdot 2{,}4 \text{ cm}}{2} = 8{,}28 \text{ cm}^2 \approx 8{,}3 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: $A \approx 8{,}3 \text{ cm}^2$

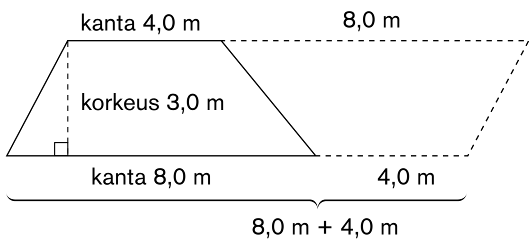
50 Puolisuunnikkaan pinta-ala



Esimerkki 1

Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen eli kantojen pituudet ovat 4,0 m ja 8,0 m. Puolisuunnikkaan korkeus eli kantojen välinen etäisyys on 3,0 m. Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.

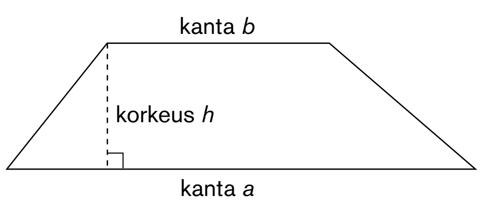
▶ Puolisuunnikas voidaan jatkaa kuvion mukaisesti suunnikkaaksi. Suunnikkaan korkeus on sama kuin puolisuunnikkaan korkeus, ja suunnikkaan kanta on puolisuunnikkaan kantojen summa.



Puolisuunnikkaan pinta-ala A on puolet suunnikkaan pinta-alasta.

$$A = \frac{(8{,}0\text{ m} + 4{,}0\text{ m}) \cdot 3{,}0\text{ m}}{2}$$
$$= \frac{12{,}0\text{ m} \cdot 3{,}0\text{ m}}{2}$$
$$= 18\text{ m}^2$$

Vastaus: $A = 18\text{ m}^2$

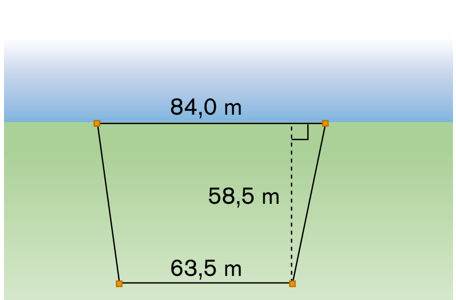


Puolisuunnikkaan pinta-ala

Lause. **Puolisuunnikkaan pinta-ala A on kantojen keskiarvon ja korkeuden tulo.**

$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Esimerkki 2



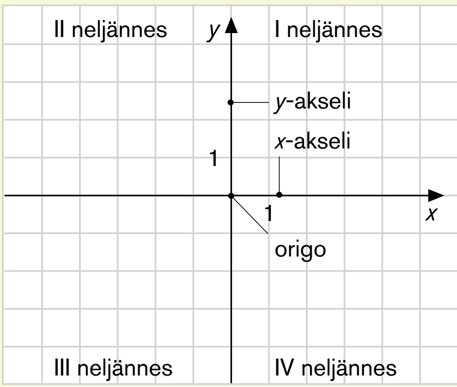
Puolisuunnikkaan muotoisen rantatontin yhdensuuntaiset sivut ovat 63,5 m ja 84,0 m ja niiden välinen etäisyys on 58,5 m. Kuinka monta aaria on tontin pinta-ala?

▶ $$A = \frac{63{,}5\text{ m} + 84{,}0\text{ m}}{2} \cdot 58{,}5\text{ m}$$
$$= 4\,314{,}375\text{ m}^2 \approx 43{,}1\text{ a}$$

Vastaus: $A \approx 43{,}1$ a

51 Koordinaatisto

xy-koordinaatisto



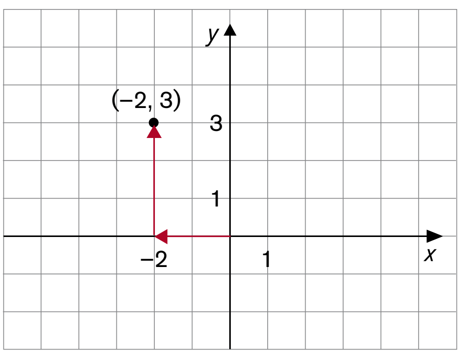
Koordinaatiston muodostavat kaksi toisiaan vastaan kohtisuorassa olevaa lukusuoraa. Lukusuorat ovat koordinaattiakseleita. Vaaka-akseli on *x*-akseli ja pystyakseli on *y*-akseli. Akselien leikkauspiste on origo. Akselit jakavat koordinaatiston neljänneksiin.

Pisteen paikka koordinaatistossa ilmaistaan lukuparilla (*x*, *y*).

(*x*, *y*)

***x*-koordinaatti   *y*-koordinaatti**

Esimerkki 1

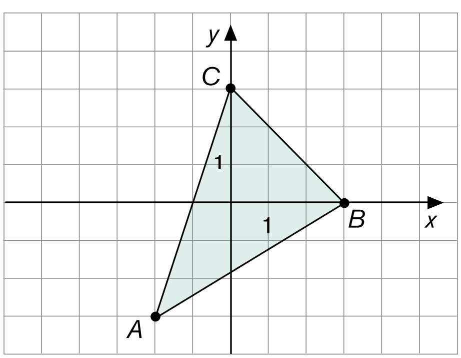


Merkitse koordinaatistoon piste $A(-2, 3)$.

▶ Pisteen $(-2, 3)$ koordinaatit ovat $x = -2$ ja $y = 3$.

Piste löytyy niin, että lähdetään origosta, kuljetaan ensin pitkin x-akselia kaksi yksikköä vasemmalle kohtaan -2 ja sitten y-akselin suuntaisesti kolme yksikköä ylös.

Esimerkki 2



Mitkä ovat kolmion ABC kärkipisteiden koordinaatit?

▶ Piste A on $(-2, -3)$.

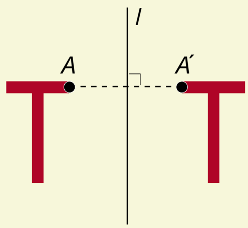
Piste B on x-akselilla, joten y-koordinaatti on 0. Siis B on $(3, 0)$.

Piste C on y-akselilla, joten x-koordinaatti on 0. Siis C on $(0, 3)$.

Vastaus: $A(-2, -3)$, $B(3, 0)$ ja $C(0, 3)$

52 Peilaus suoran suhteen

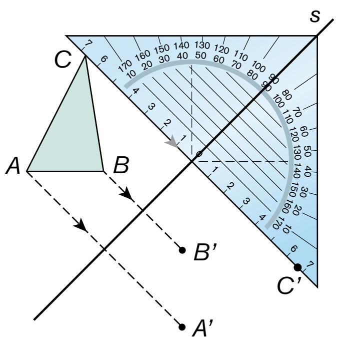
Peilikuva suoran suhteen



Pisteet *A* ja *A'* ovat toistensa peilikuvia suoran *l* suhteen, jos ne ovat suoran *l* normaalilla samalla etäisyydellä suorasta *l*.

Suora *l* on peilaussuora.

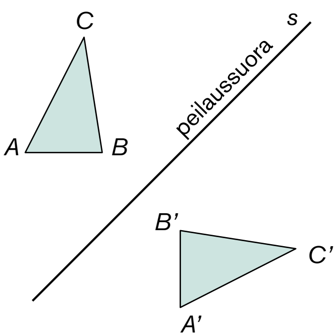
Kuviot ovat toistensa peilikuvia suoran suhteen, jos kuvion jokaisella pisteellä on peilikuva toisessa kuviossa.



Esimerkki 1

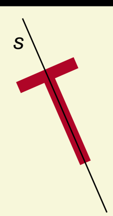
Peilaa kolmio *ABC* suoran *s* suhteen eli piirrä kolmion peilikuva.

▶ Piirrä piirtokolmion avulla ensin kärkipisteiden peilikuvat *A'*, *B'* ja *C'*. Peilikuva on kolmio *A'B'C'*.



Jos piirros taitetaan peilaussuoraa pitkin huomataan, että kuviot ovat täsmälleen samanlaiset eli **yhtenevät**. Päällekkäin olevat yhtä pitkät janat ovat toistensa **vastinjanoja** ja yhtä suuret kulmat toistensa **vastinkulmia**.

Symmetria suoran suhteen

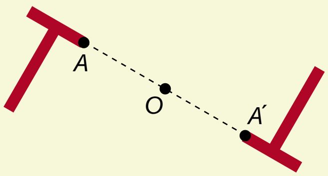


Kuvio on symmetrinen suoran *s* suhteen, jos kuvio on itsensä peilikuva.

Suora *s* on symmetria-akseli.

53 Peilaus pisteen suhteen

Peilikuva pisteen suhteen



Pisteet *A* ja *A′* ovat toistensa peilikuvia pisteen *O* suhteen, jos ne ovat *O*:n kautta kulkevalla suoralla samalla etäisyydellä pisteestä *O*.

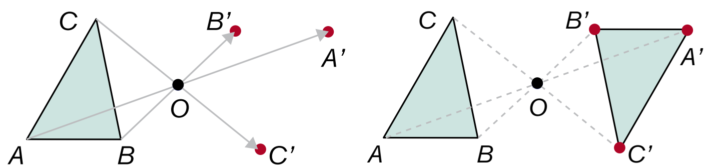
Piste *O* on peilauskeskus.

Kuviot ovat toistensa peilikuvia pisteen suhteen, jos kuvion jokaisella pisteellä on peilikuva toisessa kuviossa. Pisteen suhteen peilatut kuviot ovat yhtenevät.

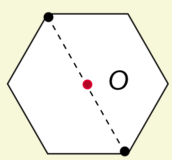
Esimerkki 1

Peilaa kolmio ABC kolmion ulkopuolella olevan pisteen O suhteen.

▶ Piirrä ensin kärkipisteiden peilikuvat A', B' ja C'. Peilikuva on kolmio $A'B'C'$.



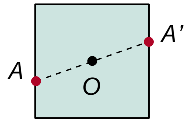
Symmetria pisteen suhteen



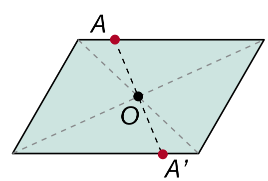
Kuvio on symmetrinen pisteen *O* suhteen, jos kuvio on itsensä peilikuva.

Piste *O* on symmetriakeskus.

Esimerkki 2



Neliö on symmetrinen keskipisteen O suhteen.



Suunnikas on symmetrinen lävistäjien leikkauspisteen suhteen.

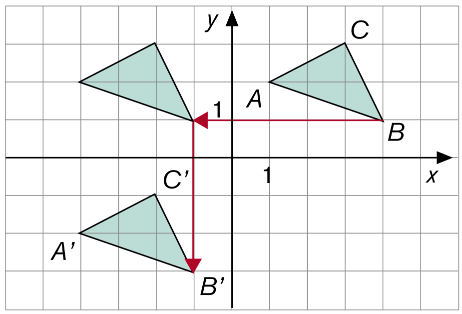
54 Siirto ja kierto

Siirrossa kuvion jokainen piste siirtyy samaan suuntaan yhtä pitkän matkan. Siirretty kuvio on yhtenevä alkuperäisen kuvion kanssa.

Esimerkki 1

Kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(1, 2)$, $B(4, 1)$ ja $C(3, 3)$. Mikä on kolmion ABC kuva siirrossa, jossa piste $(0, 0)$ siirtyy pisteeseen $(-5, -4)$?

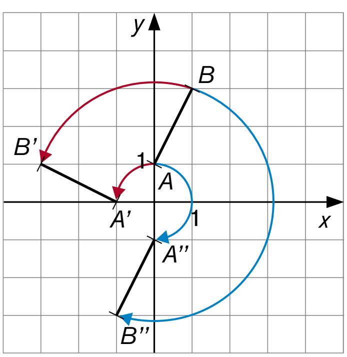
▶ Kolmiota siirretään viisi yksikköä vasemmalle ja neljä yksikköä alas.



Vastaus: Kuvakolmion $A'B'C'$ kärkipisteet ovat $A'(-4, -2)$, $B'(-1, -3)$ ja $C'(-2, -1)$.

Kierrossa kuvion jokainen piste kiertyy yhtä suuren kulman kiinteän pisteen, **kiertokeskuksen**, ympäri etäisyytensä säilyttäen. Kierto tapahtuu joko myötäpäivään tai vastapäivään. Kierretty kuvio on yhtenevä alkuperäisen kuvion kanssa.

Esimerkki 2



Janan AB päätepisteet ovat $(0, 1)$ ja $(1, 3)$. Tutki piirtämällä, mikä on janan AB kuva kierrossa origon ympäri **a)** 90° vastapäivään **b)** 180° myötäpäivään.

▶ **a)** Kuviosta nähdään, että kuvajanan $A'B'$ päätepisteet ovat $A'(-1, 0)$ ja $B'(-3, 1)$.

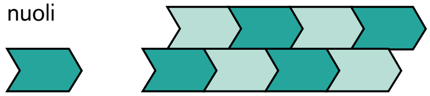
b) Kuviosta nähdään, että kuvajanan $A''B''$ päätepisteet ovat $A''(0, -1)$ ja $B''(-1, -3)$.

55 Tason täyttäminen laatoilla

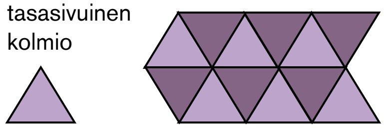
Esimerkki 1

Seinä- tai lattialaattojen tulee peittää koko pinta.
Laattoja, joilla taso voidaan peittää, ovat esimerkiksi:

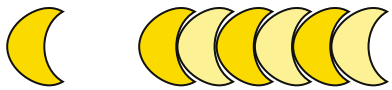
nuoli



tasasivuinen kolmio

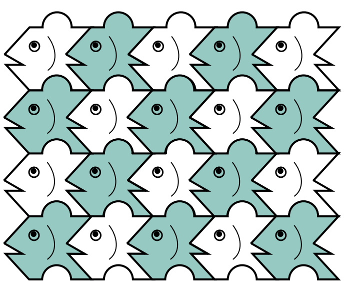


Kuun sirpin muotoinen laatta ei peitä koko tasoa.



Tessellaatio

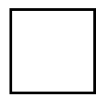
Tessellaation eli laatoituksen muodostavat kuviot, jotka täyttävät tason aukottomasti.



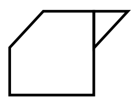
Esimerkki 2

Tee paperista tai tietokoneella kuvion mukainen laatoitus.

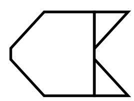
▶ 1. Piirrä paperille suuri neliö.



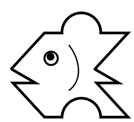
2. Poista neliön vasemmasta yläkulmasta tasakylkinen suorakulmainen kolmio ja piirrä se kuvion oikeaan yläkulmaan.



3. Poista kuvion vasemmasta alakulmasta tasakylkinen suorakulmainen kolmio ja piirrä se kuvion oikeaan alakulmaan.



4. Leikkaa kalan suu ja piirrä pala pyrstöksi.
5. Leikkaa mahasta kaareva alue ja piirrä se selkäeväksi.

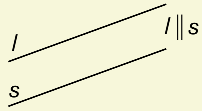


6. Lisää silmä ja pyyhi ylimääräiset viivat pois.
7. Leikkaa laatta irti paperista, tee siitä 9 kopiota ja asettele laatat vierekkäin.

Tiivistelmä

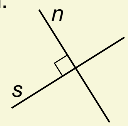
Normaali ja yhdensuuntaiset suorat

Yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa.



$l \parallel s$

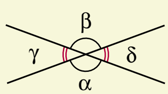
Suoran normaali on kohtisuorassa suoraa vastaan.



$n \perp s$

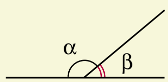
Ristikulmat ja vieruskulmat

Ristikulmat ovat yhtä suuret.



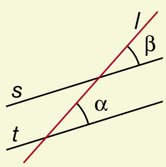
$\alpha = \beta$ ja $\gamma = \delta$

Vieruskulmien summa on 180°.



$\alpha + \beta = 180°$

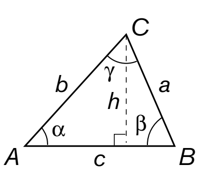
Samankohtaiset kulmat



Jos suorat ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

Jos $s \parallel t$, niin $\alpha = \beta$.

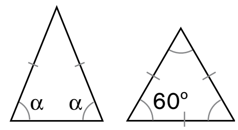
Kolmio



Kolmion kulmien summa $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Kolmion pinta-ala $A = \dfrac{c \cdot h}{2}$.

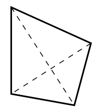
Kulma β on sivun b vastakkainen kulma.
Kulman β viereiset sivut ovat a ja c.



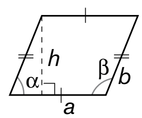
Tasakylkisen kolmion kyljet ovat yhtä pitkät ja kantakulmat ovat yhtä suuret.

Tasasivuisen kolmion sivut ovat yhtä pitkät ja kulmat ovat 60°.

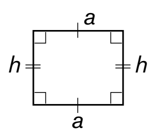
Nelikulmio



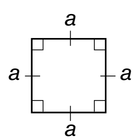
Nelikulmiolla on kaksi lävistäjää.
Kulmien summa on $2 \cdot 180° = 360°$.



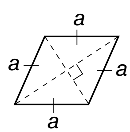
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät.
Vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja viereisten kulmien summa on $\alpha + \beta = 180°$.
Suunnikkaan pinta-ala $A = a \cdot h$.



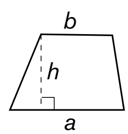
Suorakulmion pinta-ala $A = a \cdot h$.
Suorakulmion piiri $p = 2 \cdot (a + h)$.



Neliön pinta-ala $A = a^2$.
Neliön piiri $p = 4 \cdot a$.



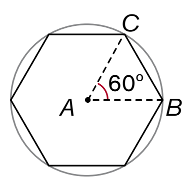
Neljäkkään sivut ovat yhtä pitkät ja lävistäjät ovat kohtisuorassa.



Puolisuunnikkaassa on kaksi yhdensuuntaista sivua.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on
$A = \dfrac{a + b}{2} \cdot h$.

Säännöllinen kuusikulmio



Sivun pituus on ympäri piirretyn ympyrän säde.

Keskuskulman suuruus on $360° : 6 = 60°$.