Eukleidinen geometria aksiomaattisena systeeminä

Harri Mäkinen

Kreikkalaisen Eukleides Aleksandrialaisen noin 300 vuotta ennen ajanlaskun alkua kirjoittama Alkeet (kreikaksi Stoikheia, latinaksi Elementa), oli ensimmäinen matematiikan oppikirja, jossa matematiikan logiikka perustettiin aksioomiin. Kirjan alussa esitellään joukko yleisesti hyväksyttyjä Määritelmiä ja viisi postulaateiksi nimettyä yleisesti hyväksyttävää geometrian totuutta, sekä kahdeksan aksioomaksi nimitettyä selviötä. Kaikki kirjassa esitetyt tulokset ja todistukset on rakennettu käyttäen näitä postulaatteja, aksioomia, selviöitä ja päättelysääntöjä, tai niiden avulla aikaisemmin todistettuja lauseita.

MÄÄRITELMÄT

Ennen postulaattien ja aksioomien esittelyä Alkeissa esiteltiin ensin joukko määritelmiä, kuten pisteen, viivan, suoran, tason (eli pinnan), ympyrän ja suoran kulman määritelmä. Näitä määritelmiä oli yhteensä 34, eikä niiden kaikkien esittely ole tämän esitelmän kannalta välttämätöntä. Esitelmään valitsemissani todistuksissa käytetään kuitenkin määritelmiä 15 ja 23, joten niiden esittely on tarpeellista esitelmässä esiteltyjen todistusten logiikan ymmärtämiseksi. Määritelmät oli kirjoitettu seuraavasti

(15) Ympyrä on sellaisen viivan rajoittama kuvio, että kaikki janat samasta kuvion sisällä olevasta pisteestä reunaviivalle (eli ympyrän kehälle) ovat yhtä pitkät.

(23) Monikulmio, jonka sivut ovat yhtä suuria, on tasasivuinen. (Määritelmä 23 sisälsi myös muita monikulmioita koskevia määritelmiä.)

Määritelmien jälkeen Alkeissa esiteltiin viisi postulaattia, jotka ovat merkittävä osa matematiikan historiaa.

POSTULAATIT

Eukleideen neljä ensimmäistä Alkeissa esiteltyä geometrian postulaattia ovat

(P1) Voidaan vetää suora viiva mistä pisteestä tahansa mihin pisteeseen tahansa

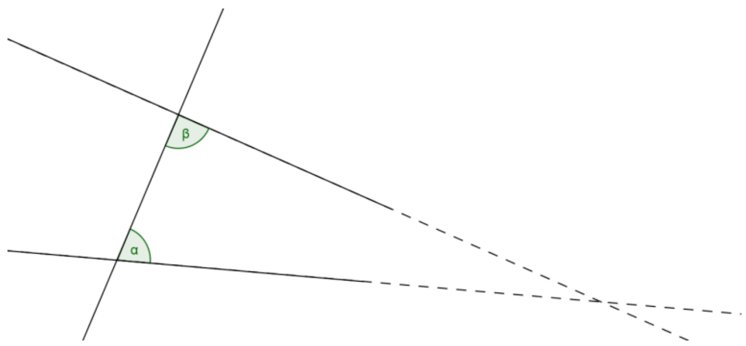
(P2) Janaa voidaan jatkaa kumpaankin suuntaan yli päätepisteidensä.

(P3) Pisteen ympäri voidaan piirtää minkä tahansa toisen pisteen kautta kulkeva ympyrä.

(P4) Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.

Viides postulaatti, jota nimitetään Paralleelipostulaatiksi, on monimutkaisempi kuin neljä edellistä. Paralleelipostulaatti kuuluu Eukleideen esittämässä muodossa seuraavasti:

(P5) Jos suora leikkaa kaksi muuta suoraa siten, että sisäpuolisten, leikkaajan samalla puolella olevien kulmien summa on vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, nämä kaksi suoraa leikkaavat toisensa sillä puolella.



Viidettä postulaattia voidaan havainnollistaa yllä olevalla kuvalla. Koska viides postulaatti ei ollut yhtä selkeä kuin edeltävät postulaatit, sitä yritettiin myöhemmin todistaa neljän ensimmäisen postulaatin avulla, kunnes 1800-luvulla epäeuklidisen geometrian kehittämisen yhteydessä todistettiin, ettei se ollut mahdollista.

AKSIOOMAT

Postulaattien jälkeen Eukleides määritteli kahdeksan aksioomaa, joista esimerkkitodistusten logiikan seuraamisen kannalta riittää tässä esitelmässä esitellä kolme ensimmäistä aksioomaa.

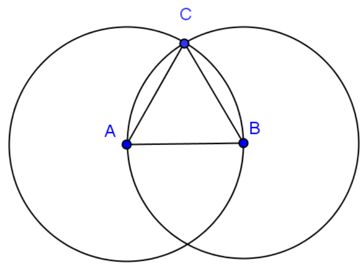
(1) Saman kanssa yhtä suuret ovat yhtä suuret.
(2) Jos yhtä suuret yhdistetään yhtä suuriin, niin saadaan yhtä suuret.
(3) Jos yhtä suuret poistetaan yhtä suurista, niin jäännökset ovat yhtä suuret.

Määritelmien, postulaattien ja aksioomien esittämisen jälkeen Alkeissa esitettiin useita tehtäviä ja todistuksia, jotka perustettiin noihin perusolettamuksiin, joita myöhemmin nimitettiin yleisesti pelkästään aksioomiksi. Esimerkeiksi valitsin kirjan ensimmäisen tehtävän, jossa muodostettiin tasasivuinen kolmio ja viidennen todistuksen, jossa todistettiin tasakylkisen kolmion kantakulmien yhtäsuuruus.

TASASIVUISEN KOLMION KONSTRUOIMINEN

Tehtävä 1.1. On konstruoitava tasasivuinen kolmio, jonka yhtenä sivuna on annettu jana.

Ratkaisu. Tehtävän ratkaiseminen alkaa konstruoimalla viivoittimella ja harpilla alla oleva kuvio. (Olen käyttänyt kuvioissa ja todistuksissa latinalaisia kirjaimia kreikkalaisten asemasta.)



Ota *A* keskipisteeksi ja piirrä ympyrä, jonka kehä kulkee toisen pisteen *B* kautta [Post. 3]. Ota sitten *B* keskipisteeksi ja piirrä ympyrä, joka kulkee *A*:n kautta [Post. 3]. Yhdistä ympyröiden leikkauspiste *C* suorilla viivoilla pisteisiin *A* ja *B* [Post. 1].

AB ja *AC* ovat säteet samasta ympyrästä ja siten yhtä suuret [Määr. 15]. Samoin ovat *AB* ja *BC* yhtä suuret [Määr. 15]. Koska *AC* ja *BC* ovat saman janan AB kanssa yhtä suuret, ovat ne keskenään yhtä suuret [Aks.1]. Kaikki kolmion *ΔABC* sivut ovat siis yhtä suuret, joten kolmio *ΔABC* on tasasivuinen [Määr. 23]. On siis konstruoitu tasasivuinen kolmio, jossa *AB* on sivu, kuten tehtävässä vaadittiin.

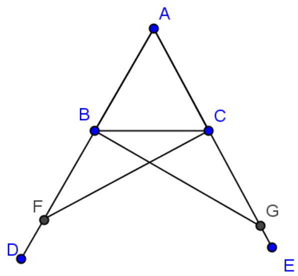
Kuten huomattiin, ratkaisu kyettiin konstruoimaan ja todistamaan edellä mainittujen määritelmien, postulaattien ja aksioomien avulla. Todistukseen jäi tosin kuvainnollisesti sanoen pieni aukko ympyrän kaarien leikkauspisteiden kohdalle, sillä Eukleideella ei ollut mitään aksioomaa, joka takaisi ympyröiden leikkauspisteen olemassaolon. Se otettiin Alkeissa itsestäänselvyytenä, mutta asia korjautui myöhemmin Alkeiden pohjalta tehdyissä uudemmissa geometrian aksioomajärjestelmissä, kuten esitelmässä myöhemmin esiteltävissä Hilbertin aksioomissa.

THALEEN KANTAKULMALAUSE

Seuraavaksi esittelen esimerkin vuoksi Alkeissa esitetyn niin sanotun Thaleen kantakulmalauseen todistuksen esimerkkinä todistuksesta, jossa todistus perustetaan aksioomien lisäksi aikaisemmin todistettuihin lauseisiin. Todistus käyttää kirjan tehtävää 1.3, jossa esitellään menetelmä annetun lyhyemmän janan pituisen janan leikkaamiseksi pidemmästä janasta, sekä lausetta 1.4, jossa todistetaan niin sanottu SKS-lause, eli kaksi kolmiota ovat yhtenevät, mikäli niiden kaksi vastinsivua ovat yhtä pitkät ja vastinsivujen välinen kulma on yhtä suuri. Tehtävän 1.3 ratkaisu ja lauseen 1.4 todistus jätetään tässä esitelmässä esittämättä, jotta esitelmän pituus ei kasvaisi kohtuuttomaksi, mutta todistukset voi lukea esitelmän lopussa mainitusta lähteestä.

Lause 1.2. Tasakylkisessä kolmiossa ovat kannan viereiset kulmat, kantakulmat, yhtä suuret. Samoin ovat niiden ulkopuoliset kulmat yhtä suuret.

Todistus. Olkoon annettuna tasakylkinen kolmio *ΔABC*, jossa sivut *AB* ja *AC* ovat yhtä suuret, ja olkoot *BD* ja *CE* janojen *AB* ja *AC* suoraviivaiset jatkeet [Post. 2]. Väitän, että sisäkulmat *∠ABC* ja *∠ACB* ja ulkokulmat *∠CBD* ja *∠BCE* keskenään ovat yhtä suuret. (Kulmien nimeäminen ei vastaa nykyistä käytäntöä.)



Valitaan BD:ltä mielivaltainen piste F. On olemassa piste G puolisuoralla AE siten, että AG ja AF ovat yhtä pitkät [1.3]. Oletuksen mukaan sivut AB ja AC ovat keskenään yhtä pitkät, konstruktion mukaan sivut AF ja AG ovat keskenään yhtä pitkät, ja kulmat ∠FAC ja ∠GAB ovat peräti samat. Siksi kolmiot *ΔAFC* ja *ΔAGB* ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät ja erityisesti kannat FC ja GB ovat yhtä pitkät ja vastinkulmat ∠ACF ja ∠ABG sekä ∠AFC ja ∠AGB keskenään yhtä suuret [1.4]. Ja koska koko AF ja koko AG on tehty yhtä suuriksi, ja niissä AB ja AC ovat yhtä suuret, ovat jäännöspalat BF ja CG nekin yhtä pitkät [Aks. 3]. Kolmiot *ΔBFC* ja *ΔCGB* ovat siis SKS-lauseen 1.4 nojalla yhtenevät ja erityisesti kulmat ∠FBC ja ∠GCB yhtä suuret [1.4]. Tätä väitettiin. Sisäkulmat syntyvät vähentämällä näistä keskenään yhtä suuriksi todetuista kulmista kulmat ∠CBG ja ∠BCG, nekin samojen yhtenevien kolmioiden vastinkulmina yhtä suuret [Aks. 3].

Todistus oli aika monimutkainen ja jo antiikin aikoina keksittiin helpompi tapa todistaa tasakylkisen kolmion sisäkulmien yhtäsuuruudet. Riittää kun huomaa, että kolmiot *ΔABC* ja *ΔACB* ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät.

Eukleideen Alkeissa on monia muitakin myöhemmin havaittuja puutteita, mutta silti sen ansiot ovat kiistattomat ja se on yksi eniten käytettyjä matematiikan oppikirjoja matematiikan historiassa. Ensimmäisenä aksiomaattisena matematiikan teoksena se viitoitti tietä nykyaikaisen matematiikan kehittämiselle.

HILBERTIN AKSIOOMAT

Eukleideen jälkeen monet matemaatikot kehittivät aksiomaattista geometriaa Eukleideen aksioomien pohjalta. Vuonna 1899 julkaisi saksalainen matematiikko David Hilbert teoksensa *The Foundations of Geometry*, jossa hän esitti Eukleideen geometrian nykyaikaistetussa muodossa.

Hilbert järjesti aksioomat viiteen eri ryhmään, niiden kuvaamien ominaisuuksien mukaisesti. Nämä aksioomaryhmät olivat seuraavat

I. Liitännäisaksioomat
II. Järjestysaksioomat
III. Yhteneväisyysaksioomat
IV. Yhdensuuntaisuusaksiooma (paralleeliaksiooma)
V. Jatkuvuusaksioomat

Aksioomissa merkitään pisteitä suurilla kirjaimilla $(A, B \dots)$, suoria pienillä kirjaimilla $(a, b \dots)$ ja tasoja kreikkalaisilla kirjaimilla $(\alpha, \beta \dots)$.

I. LIITÄNNÄISAKSIOOMAT

Hilbertin liitännäisaksioomat muodostavat yhteyden pisteiden ja suorien välille. Suorien lisäksi Hilbertin aksioomat määrittelevät myös tason ja tasojen yhteyden suoriin ja pisteisiin. Toisin kuin Eukleideen aksioomissa, Hilbertin aksioomissa ei sen sijaan määritelty lainkaan ympyrää.

I-1 Jos P ja Q ovat eri pisteitä, on olemassa yksi ja vain yksi suora, joka kulkee pisteiden P ja Q kautta.

I-2 Jokaisella suoralla on vähintään kaksi eri pistettä

I-3 Kolme pistettä A, B ja C, jotka eivät ole samalla suoralla, määrittelevät yksikäsitteisesti tason α, johon pisteet A, B ja C kuuluvat. Käytämme merkintää taso $ABC = \alpha$.

I-4 Jos suoran a mitkä tahansa kaksi pistettä A ja B kuuluvat tasoon α, niin tasoon α kuuluvat myös kaikki muutkin suoran a pisteet.

I-5 Jos kahdella tasolla α ja β on yksi yhteinen piste A, niin tasoilla α ja β on vähintään kaksi yhteistä pistettä A ja B.

I-6 Avaruudessa on vähintään neljä eri pistettä, jotka eivät ole samalla tasolla.

Lause 2.1 Olkoot α ja β kaksi tasoa. Tällöin niillä on joko yhteinen suora tai ei ollenkaan yhteisiä pisteitä.

Todistus. Koska tasot ovat toisistaan eriäviä, niillä ei välttämättä tarvitse olla yhteisiä pisteitä. Mikäli niillä on yhteinen piste A, niin aksiooman I-5 mukaan niillä täytyy olla myös toinenkin yhteinen piste B. Tällöin aksiooman I-4 mukaan niillä on yhteinen suora AB. Valitsemme vielä mielivaltaisen tason α pisteen C, joka ei kuulu suoralle AB. Tällöin aksiooman I-3 mukaan , jos piste C kuuluu tasoon β, niin tasot ovat samat, eli $\alpha = ABC = \beta$. Siis tasoilla α ja β on joko yhteinen suora tai ei ollenkaan yhteisiä pisteitä.

II. JÄRJESTYSAKSIOOMAT

Järjestysaksioomat määrittelevät täsmällisesti pisteiden välissä olon suoralla. Paschin aksioomaksi nimetty neljäs järjestysaksiooma määrittelee suorien leikkaamisen, mikä Eukleideen aksioomissa jäi määrittelemättä. Esimerkissä todistamme järjestysaksioomien avulla, että suoralla on ääretön määrä pisteitä.

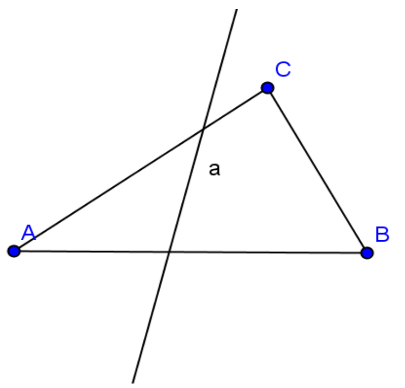
Järjestysaksioomien merkinnät $A * B * C$ tarkoittaa, että piste B on pisteiden A ja C välissä ja merkitä $\overleftrightarrow{AB}$ tarkoittaa suoraa, joka kulkee pisteiden A ja B kautta.

II-1 Jos $A * B * C$, niin A, B ja C ovat saman suoran pisteitä ja myös $C * B * A$.

II-2 Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $*$ $A * B, A * D * B$ ja $A * B * E$.

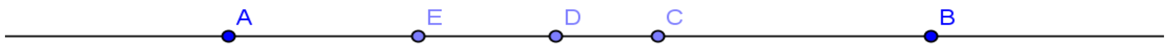
II-3 Jos A, B ja C ovat saman suoran pisteitä, niin tasan yksi niistä on toisten pisteiden välissä.

II-4 (Paschin aksiooma). Olkoot tasolla suora a ja siihen kuulumattomat pisteet A, B ja C, jotka eivät ole samalla suoralla. Jos suora a leikkaa janan AB, niin sen täytyy leikata myös jana BC tai jana AC.



Paschin aksioomaa voidaan havainnollistaa esimerkiksi yllä olevalla kuvalla.

Lause 2.2 Suoralla on kahden pisteen välissä äärettömän monta pistettä.



Todistus: Tarkastellaan kahden pisteen A ja B määrittelemää suoraa (kuva). Aksiooman II-2 mukaan pisteiden A ja B välistä löytyy aina yksi piste C. Nyt saman aksiooman II-2 mukaan pisteiden A ja C välistä löytyy myös piste D, ja pisteiden A ja D välistä piste E jne. Ketjua voi jatkaa loputtomiin, joten jokaisen kahden suoralla olevan pisteen välistä löytyy siis ääretön määrä pisteitä.

III. YHTENEVÄISYYSAKSIOOMAT

Yhteneväisyysaksioomat määrittelevät janojen ja kulmien väliset yhteneväisyysrelaatiot.

III-1 Jos A ja B ovat kaksi suoran a pistettä, ja jos piste A' on suoralla a', joka voi olla myös sama suora kuin a, niin suoralla a' on annetulla puolella täsmälleen yksi piste B', niin että janat AB ja $A'B'$ ovat yhtenevät. Tätä suorien välistä suhdetta merkitään $AB \cong A'B'$. Jokainen jana on yhtenevä itsensä kanssa, joten aina pätee $AB \cong AB$.

III-2 Jos jana AB on yhtenevä janan $A'B'$ kanssa ja myös janan $A''B''$ kanssa, niin myös jana $A'B'$ on yhtenevä janan $A''B''$ kanssa.

III-3 Olkoon suoralla a kaksi janaa AB ja BC, joilla on yhteisenä pisteenä ainoastaan piste B. Olkoon lisäksi suoralla a', joka voi olla myös suora a, kaksi janaa $A'B'$ ja $B'C'$, joilla on yhteisenä pisteenä ainoastaan piste B'. Tällöin, jos $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin täytyy olla $AC \cong A'C'$.

III-4 Olkoon tasolla α jokin kulma $\angle(h,k)$ ja suora a'. Olkoon myös annettuna toinen suoran a' määräämistä puolista. Olkoon suoralla a' puolisuora h' joka alkaa pisteestä P'. Tällöin annetulla puolella suoraa a' on täsmälleen yksi sellainen puolisuora k', että kulma $\angle(h,k)$ on yhtenevä kulman $\angle(h',k')$ kanssa. Samalla kaikki kulman $\angle(h',k')$ pisteet sijaitsevat samalla puolella suoraa a'. Merkitsemme $\angle(h,k) \cong \angle(h',k')$. Jokainen kulma on yhtenevä itsensä kanssa, eli $\angle(h,k) \cong \angle(h,k)$ tai $\angle(h,k) \cong \angle(k,h)$.

III-5 Jos kulma $\angle(h,k)$ on yhtenevä kulman $\angle(h',k')$ ja kulman $\angle(h'',k'')$, niin kulma $\angle(h',k')$ on yhtenevä kulman $\angle(h'',k'')$ kanssa. Eli jos $\angle(h,k) \cong \angle(h',k')$ ja $\angle(h,k) \cong \angle(h'',k'')$ niin myös $\angle(h',k') \cong \angle(h'',k'')$.

III-6 Jos kolmioissa ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ pätee $AB \cong A'B'$ ja $AC \cong A'C'$ ja $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, niin pätee myös $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ ja $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$.

Merkillepantavaa on, että Hilbertin aksioomissa ei määritellä ympyrää, kuten oli Eukleideen aksioomissa. Tämä johtuu siitä, että ympyrä voidaan helposti määritellä muiden aksioomien avulla. Ympyrä voidaan määritellä pistejoukkona, jonka etäisyys ympyrän keskipisteestä on vakio.

Määritelmä 2.3 Janan AB pituisen säteen ja keskipisteen O määrittelmä *ympyrä* on pistejoukko S, jossa $S = \{C \in S \mid OC \ \cong AB\}$.

Lause 2.4 Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Todistus. Jotta janojen yhtenevyys olisi ekvivalenssirelaatio, janojen yhtenevyyden tulee olla refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Refleksiivisyys: Aksiooman III-1 mukaan jokainen jana on yhtenevä itsensä kanssa. Siis janojen yhtenevyys on refleksiivinen. Symmetrisyys: Olkoon $AB \cong A'B'$, jolloin refleksiivisyyden perusteella $A'B' \cong A'B'$. Nyt aksiooman III-2 mukaan $A'B' \cong AB$. Siis janojen yhtenevyys on symmetrinen. Transitiivisuus: Olkoot $AB \cong A'B'$ ja $A'B' \cong A''B''$. Tällöin symmetrisyyden perusteella $A''B'' \cong A'B'$, jolloin aksiooman III-2 mukaan $AB \cong A''B''$. Siis janojen yhtenevyys on transitiivinen. Refleksiivisyyden, symmetrisyyden ja transitiivisuuden perustella janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio. ■

IV. YHDENSUUNTAISUUSAKSIOOMA

Yhdensuuntaisuusaksiooma korvaa Eukleideen paralleelipostulaatin. Siinä lähestytään ongelmaa hieman eri suunnasta. Hilbert määrittelee yhdensuuntaisen suoran, kun taas Eukleides määritteli milloin suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

IV-1 Jos tasolla α on suora a ja piste A, joka ei ole suoralla a, voidaan pisteen A kautta piirtää täsmälleen yksi suora joka ei leikkaa suoraa a. Näitä suoria kutsutaan yhdensuuntaisiksi suoriksi.

V. JATKUVUUSAKSIOOMAT

Jatkuvuusaksioomat määrittelevät geometrian jatkuvuuden ja täydellisyyden.

V-1 (Arkhimedeen aksiooma) Olkoon piste A_1 missä tahansa janalla AB. Valitaan pisteet A_2, A_3, ... siten, että piste A_1 sijaitsee pisteiden A ja A_2 välissä, A_2 pisteiden A_1 ja A_3välissä jne. Olkoon myös janat AA_1, A_1A_2, A_2A_3… kaikki yhteneviä. Tällöin löytyy aina jokin piste A_n siten, että piste B sijaitsee pisteiden A ja A_n välissä.

V-2 (Täydellisyysaksiooma) Pisteiden, suorien ja tason muodostamaan järjestelmään on mahdotonta lisätä muita elementtejä siten että järjestelmä yleistettynä muodostaisi uuden geometrian joka noudattaisi kaikkia näiden viiden ryhmän aksioomia.

AKSIOOMAJÄRJESTELMÄN RISTIRIIDATTOMUUS JA KESKINÄINEN RIIPPUMATTOMUUS

Jotta aksioomajärjestelmä olisi hyödyllinen, pitää sen olla ristiriidaton ja eri aksioomien pitää olla riippumattomia toisistaan. Riippumattomuutta emme esitelmän rajoitusten vuoksi todista, mutta lopuksi konstruoimme reaaliluvuista mallin, joka osoittaa aksioomat ristiriidattomiksi [6].

Esimerkki 2.5 Olkoon joukko Ω sellainen, että se koostuu kaikista niistä luvuista, jotka on saatu reaaliluvusta 1 soveltamalla siihen äärellisen monta kertaa viittä eri laskutoimitusta, joihin kuuluvat yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku. Viidentenä laskutoimituksena on $|\sqrt{1+w^2}|$, missä luku w on saatu näiden viiden laskutoimituksen avulla.

Määrittelemme lukuparin $(x, y) \in \Omega$ pisteeksi ja kutsumme pistettä $(0,0)$ origoksi. Lisäksi määrittelemme suoraksi kolmen luvun $u, v, w \in \Omega$ suhteen$(u: v: w)$, missä luvut u ja v eivät voi yhtä aikaa olla nollia. Tämän jälkeen ajattelemme, että jos yhtälö

$$ux + vy + w = 0$$

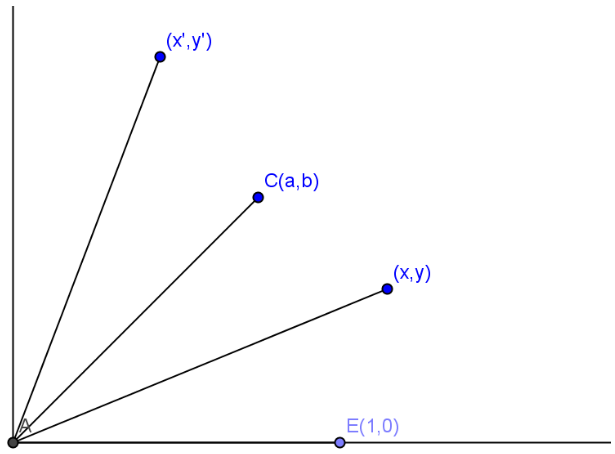
on voimassa, niin piste (x, y) on suoralla $(u: v: w)$. Tällöin selvästi aksioomat I-1 – 3 ja IV ovat voimassa, sillä kahden pisteen avulla voimme yksikäsitteisesti määrittää kertoimet u ja v, jotka määräävät suoran suunnan. Luku w puolestaan kertoo meille suoran sijainnin origon suhteen, eli sitä vaihtelemalla saamme yhdensuuntaisia suoria.

Joukon Ω luvut ovat reaalilukuja, joten voimme järjestää ne suuruusjärjestykseen. Tällöin löydämme helposti sellaisen tulkinnan näiden pisteiden välille, että kaikki ryhmän II aksioomat ovat voimassa. Jos valitsemme joltakin suoralta jonon mielivaltaisia pisteitä $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, ..., voidaan tätä järjestystä pitää pisteiden järjestyksenä suoralla, kunhan luvut x_1, x_2, x_3, ... ja y_1, y_2, y_3, ... kasvavat tai vähenevät samassa järjestyksessä. Nyt aksioomat II-1-3 ovat voimassa. Jotta aksiooma II-4 olisi voimassa, niin meidän täytyy sopia vielä, että kaikki ne pisteet (x, y), joille $ux + vy + w > 0$, ovat eri puolella suoraa $(u: v: w)$ kuin ne pisteet (x, y), joille $ux + vy + w < 0$. Näemme helposti, että myös tämän tulkinnan mukaan pystymme määrittelemään pisteiden järjestyksen suoralla.

Janojen ja kulmien määrittely seuraa tunnetusta analyyttisen tasogeometrian määrittelystä. Kuvauksella $x' = x + a$ ja $y' = y + b$ määritellään janojen ja kulmien siirto, kun taas kuvaus $x' = x$ ja $y' = -y$ antaa meille peilauksen suoran y=0 suhteen. Olkoot nyt pisteet $O = (0,0)$, $E = (1,0)$ ja mielivaltainen piste $C = (a, b)$. Tällöin kulmaa $\angle COE$ vastaava pisteen (x,y) kierto pisteen O suhteen pisteeksi (x', y') voidaan näyttää kuvauksella

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y.$$



Kuvassa pisteen (x,y) kierto pisteen O suhteen pisteeksi (x',y') kulman $\angle COE$ verran.

Koska luku $\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2}$ kuuluu joukkoon Ω , aksioomat III 1-5 toteutuvat tulkinnoille. Selvästi myös aksiooma V-1 pätee, kun taas täydellisyysaksiooma V-2 ei päde. Edellä olevan perusteella jokainen aksioomajärjestelmämme ristiriitaisuus täytyy ilmetä myös joukon Ω aritmetiikassa.

Jos olisimme käyttäneet määrittelyjoukon Ω sijasta kaikkia reaalilukuja, myös täydellisyysaksiooma V 2 olisi toteutunut. Tällöin ryhmien I-V aksioomien ristiriitaisuus näkyisi siis reaalilukujen aritmetiikassa. Kutsumme tätä geometriaa karteesiseksi geometriaksi. Nyt siis on ääretön määrä geometrioita, joissa aksioomat I-IV ja V-1 ovat voimassa, mutta ainoastaan yksi geometria, jossa lisäksi aksiooma V-2 on voimassa samaan aikaan.

Lähteet:

[1] Lauri Kahanpää, Tasogeometria (suom. Eukleideen Alkeet I kirja) Kirjapaino Kopi-Jyvä 2011

http://users.jyu.fi/~laurikah/ETG/LaurinALKEET5.pdf

[2] Matti Lehtinen, Matematiikan historia:

http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/

[3] Paralleelipostulaatti, Solmu 3/2008

http://solmu.math.helsinki.fi/2008/3/paralleelipostulaatti.pdf

[4] Matti Lehtinen, Geometria, Helsingin yliopisto 2011

http://solmu.math.helsinki.fi/2011/geometria2011.pdf

[5] David Hilbert, The Foundations of Geometry, La Salle Illinois 1950

http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf

[6] Teemu Lempiäinen, Hilbertin aksioomajärjestelmän tärkastelua, TY Pro gradu tutkielma 2008

http://tutkielmat.uta.fi/pdf/gradu02563.pdf