

A-OSA

1. a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2 = (x - 3)^2$
 b) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$
 c) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = x^2(x - 4) + 2(x - 4) = (x^2 + 2)(x - 4)$
 d) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x^2 - 2^2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

2. a) $(x - 3)^2 = 16$
 $x - 3 = \pm\sqrt{16}$
 $x - 3 = 4$ tai $x - 3 = -4$
 $x = 7$ tai $x = -1$
- b) $x(x^2 - x - 4) = x^3 - 2x(x + 1) + 1$
 $x^3 - x^2 - 4x = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$
 $x^3 - x^3 - x^2 + 2x^2 - 4x + 2x - 1 = 0$
 $x^2 - 2x - 1 = 0$

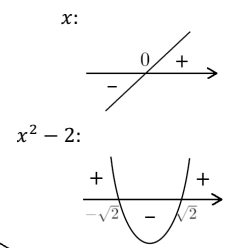
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

3. a) $x^3 < 2x$
 $x^3 - 2x < 0$
 $x(x^2 - 2) < 0$
- Ratkaistaan nollakohdat: $x(x^2 - 2) = 0$
- Tulon nollasääntö:
 $x = 0$ tai $x^2 - 2 = 0$
 $x^2 = 2$
 $x = \pm\sqrt{2}$

Laaditaan merkkikaavio:

	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	
x	-	-	+	+
$x^2 - 2$	+	-	-	+
tulo	-	+	-	+



Merkkikaavion perusteella epäyhtälö on voimassa,
 kun $x < -\sqrt{2}$ tai $0 < x < \sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{12}}{6} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{18}}{6} - \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{36} - \sqrt{12}}{6} = -\frac{6}{6} = -1$

B1-OSA

4. a) Polynomien tekijät ovat $x - (-2)$, $x - 1$ ja $x - 3$,

joten sen lauseke on $P(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

$$P(0) = 12, \text{ joten } a(0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 12, \text{ tästä saadaan } 6a = 12, \text{ eli } a = 2.$$

Polynomien lauseke on

$$P(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 3) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$$

- b) Merkitään hintoja kirjaimilla x ja y . Tällöin $x + y = 4,5$, joten $y = 4,5 - x$.

Lisäksi tiedetään, että $xy = 4,5$. Saadaan siis yhtälö $x(4,5 - x) = 4,5$.

Laskimella saadaan ratkaisu: $x = 1,5$ tai $x = 3$.

Hinnat ovat siis 1,5€ ja 3€.

5. Merkitään korkokerrointa kirjaimella k . Tilillä oleva rahasumma kasvaa siis k -kertaiseksi vuosittain. Kymmenessä vuodessa rahamäärä kasvaa näin ollen k^{10} -kertaiseksi.

Tästä saadaan yhtälö

$$5000 \cdot k^{10} = 8000, \text{ josta laskimella saadaan ratkaisuksi } k = \pm 1.04812\dots$$

Koska korkokerroin ei voi olla negatiivinen, kasvaa rahamäärä vuosittain kertoimella 1.04812...

Korkoa tulee vuosittain prosentteina $104,812\dots\% - 100\% = 4,812\dots\% \approx 4,8\%$

6. Lauseketta voidaan supistaa, kun osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä. Nimittäjä on

$$2x - 6 = 2(x - 3), \text{ joten osoittajalla tulee olla tekijänä polynomi } x - 3.$$

Näin on täsmälleen siinä tapauksessa, kun $x = 3$ on osoittajan nollakohta, eli kun

$$2 \cdot 3^2 - k \cdot 3 + 6 = 0$$

$$-3k + 24 = 0$$

$$k = 8$$

Lauseketta voidaan siis supistaa, kun $k = 8$.

Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtien avulla:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

Laskimella saadaan ratkaisu:

$$x = 1 \text{ tai } x = 3$$

Näin ollen voidaan laskea

$$\frac{2x^2 - 8x + 6}{2x - 6} = \frac{2(x - 1)(x - 3)}{2(x - 3)} = x - 1$$

Murtolauseke on määritelty, kun osoittaja ei ole nolla, eli kun $x \neq 3$.

B2-OSA

7. Neliöjuuren määritelmän mukaan $\sqrt{a} = b$, jos $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.

Siis $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} = 5 - 2\sqrt{3}$, mikäli yllä olevat ehdot ovat voimassa. Tarkistetaan ne:

$$1) \quad 5 - 2\sqrt{3} = \sqrt{25} - \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{25} - \sqrt{12} \geq 0$$

$$2) \quad (5 - 2\sqrt{3})^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot (-2\sqrt{3}) + (-2\sqrt{3})^2 = 25 - 20\sqrt{3} + 4 \cdot 3 = 37 - 20\sqrt{3}$$

Määritelmän ehdot täyttyvät, joten $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} = 5 - 2\sqrt{3}$

8. Funktion nollakohdat ovat yhtälön $2x^2 + 2ax + 6 - a = 0$ ratkaisut. Ratkaisuja on kaksi täsmälleen silloin, kun diskriminantti on positiivinen, eli kun

$$D > 0$$

$$(2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (6 - a) > 0$$

$$4a^2 - 48 + 8a > 0 \quad || : 4$$

$$a^2 + 2a - 12 > 0$$

Laskimella saadaan ratkaisuksi $a < -1 - \sqrt{13}$ tai $a > -1 + \sqrt{13}$

9. Merkitään luvuista keskimmäistä kirjaimella x , jolloin luvut ovat $x - 1$, x ja $x + 1$. Lukujen neliöiden summa on 8429, joten saadaan yhtälö

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 8429$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 8429$$

$$3x^2 + 2 = 8429$$

$$3x^2 = 8427 \quad || : 3$$

$$x^2 = 2809$$

$$x = \pm 53$$

Luvut ovat siis joko 52, 53, 54 tai -54, -53, -52.