

MAA2-opintojaks, kertaus toiseen välikokeeseen. Kertauksessa keskitytään tehtäviin, jossa A-osan työkalut ovat käytössä. Viimeistä kokeen aihetta 24. yleinen juuriyhtälö ei käydä läpi.

Tehnyt: Pasi Jäntti

Aloitetaan kertaus muistikaavoista. Muistikaavat tulevat vastaan useissa tilanteissa, ja niiden hyödyntäminen on tärkeä taito. Muistikaavoja on kolme ja nämä löytyvät MAOL:sta:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{Summan neliö}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{Erotuksen neliö (nämä kaksi yhdessä ovat nimeltään binomin neliöt)}$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{Summan ja erotuksen tulo.}$$

Erityisen tärkeää on huomata ero:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Mitä tässä pitää huomata? Se, että binomin neliö voidaan tarvittaessa purkaa potenssin määritelmän avulla. Muutama harjoitusesimerkki:

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$(2x + \sqrt{2})^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 4x^2 + 4\sqrt{2}x + 2$$

$$(3x - \sqrt{5})(3x + \sqrt{5}) = (3x + \sqrt{5})(3x - \sqrt{5}) = (3x)^2 - (\sqrt{5})^2 = 9x^2 - 5$$

Harjoittele seuraavilla esimerkeillä ja tarkista, että saat samat vastaukset. Sievennä ja laske, mikäli mahdollista:

a) $(2x - 1)^2$ *Vastaus* : $4x^2 - 4x + 1$

b) $(5\sqrt{3} + 2)(5\sqrt{3} - 2)$ *Vastaus* : 71

c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *Vastaus* : $x + \frac{1}{2}$

Sitten siirrytään varsinaiseen toisen välikokeen aihepiiriin: Korkeamman asteen polynomifunktio, korkeamman asteen yhtälö, nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys sekä korkeamman asteen epäyhtälö.

Määritelmä

Polynomifunktio, jonka asteluku on kolme tai sitä suurempi, kutsutaan korkeamman asteen polynomifunktioksi.

Tärkeä tulos muistaa:

-Mikäli polynomifunktion asteluku n on parillinen, niin funktiolla on korkeintaan n nollakohtaa.

-Mikäli polynomifunktion asteluku n on pariton, niin funktiolla on vähintään 1, mutta korkeintaan n nollakohtaa.

Polynomifunktion kuvaajan muoto (nollakohtien määrä sekä käytös isoilla ja pienillä x :n arvoilla) riippuu polynomin asteluvusta sekä korkeimman asteen termin kertoimesta.

Korkeimman asteen termin tulee määräämään tahdin suurilla ja pienillä x :n arvoilla eli toisin sanoen mitä tapahtuu, kun x kasvaa tai pienenee rajatta. Mieti, jos sijoitat vaikka $x=1000$ tai $x=-1000$ polynomifunktion lausekkeisiin

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \text{tai} \quad g(x) = -x^3 + x^2 - 1$$

Harjoittele kuvaajan tulkitsemista kirjan tehtävillä 15.8, 15.10 ja 15.12, mikäli tuntuu, että näissä on hankaluutta.

Korkeamman asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälöitä osaamme ratkaista helposti. Toisen asteen yhtälöille löytyy ratkaisukaava, jonka käyttöä on harjoiteltu pitkän opintojakson. Mutta miten ratkaistaan korkeamman asteen yhtälöitä, esimerkiksi kolmannen tai neljännen asteen yhtälö?

Idea on seuraava: muokataan yhtälö sellaiseen muotoon, että vasemmalla puolella on polynomien tulo ja oikealla puolella on nolla. Tällöin voidaan soveltaa tulon nollasääntöä.

Miten yhtälön vasemmalle puolelle saadaan polynomien tulo? Tapoja on kolme: muistikaavat, yhteisen tekijän ottaminen sekä ryhmittely.

Otetaan esimerkkejä. Ratkaise yhtälöt

a) $4x^4 - 9 = 0$ Summan ja erotuksen tulon muistikaava:

$$(2x^2)^2 - 3^2 = 0$$

$$(2x^2 + 3)(2x^2 - 3) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö}$$

$$2x^2 + 3 = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 - 3 = 0$$

$$2x^2 = -3 \quad \text{tai} \quad 2x^2 = 3 \quad |:2 \quad \text{Ensimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Näin ollen ratkaisut ovat}$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{Tämän yhtälön olisi voinut myös ratkaista eri tavalla. Voit miettiä miten!}$$

b)

$$x^3 - 2x^2 = 24x \quad \text{Siirretään termejä, jotta oikealla puolella on nolla}$$

$$x^3 - 2x^2 - 24x = 0 \quad \text{Otetaan yhteinen tekijä x}$$

$$x(x^2 - 2x - 24) = 0 \quad \text{Käytetään tulon nollasääntöä}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 2x - 24 = 0 \quad \text{Toinen yhtälö täytyy ratkaista ratkaisukaavalla:}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2} \quad \text{Tässä vaiheessa pieni vinkki. Kannattaa varmistaa}$$

Speedcrunchilla hankalammat laskut, niin ei tule laskuvirheitä!

Tästä saadaan kaksi eri ratkaisua:

$$x = \frac{2 + 10}{2} = 6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2 - 10}{2} = -4$$

Näin ollen alkuperäisen yhtälön ratkaisut ovat $x=0$, $x=6$ tai $x=-4$.

c)

$$4x^2 + 4 = 3x^3 + 3x \quad \text{Muokataan termit vasemmalle puolelle}$$

$$-3x^3 + 4x^2 - 3x + 4 = 0 \quad \text{Ryhmitellään}$$

$$x^2(-3x + 4) + 1(-3x + 4) = 0 \quad \text{Otetaan yhteinen tekijä. Tässä voisi ryhmitellä myös eri tavalla!}$$

$$(-3x + 4)(x^2 + 1) = 0 \quad \text{Käytetään tulon nollasääntöä}$$

$$-3x + 4 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \text{Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Näin ollen}$$

$$-3x = -4 \quad |: (-3)$$

$$x = \frac{4}{3}.$$

Näin ollen yhtälön ainut ratkaisu on $x=4/3$.

Harjoittele seuraavilla esimerkeillä:

a) $x^3 - 16x = 0$ vastaus : $x = 4, x = -4$ tai $x = 0$

b) $4x^3 - x^2 = 5x$ vastaus : $x = -1, x = 0$ tai $x = \frac{5}{4}$

c) $x^7 - x^5 = 1 - x^2$ vastaus : $x = \pm 1$

Nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys

Tähän aiheeseen liittyy kaksi tärkeää tulosta, jotka muistaa.

Ensimmäinen on seuraava:

Luku x_0 **on polynomin** $P(x)$ **nollakohta täsmälleen silloin, kun** $x - x_0$ **on polynomin** $P(x)$ **tekijä.**

Esimerkki. Onko binomi $x - 3$ polynomin $P(x) = (x^2 - 9)$ tekijä?

Binomi $x-3$ on polynomin $P(x)$ tekijä, mikäli $x=3$ on polynomin P nollakohta. Määritetään polynomi P nollakohdat:

$$P(x) = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$x = \pm 3. \quad \text{Koska } x=3 \text{ on polynomin } P \text{ nollakohta, niin } x-3 \text{ on polynomin } P \text{ tekijä. Toinen tapa tehdä tehtävä olisi ollut}$$

muokata polynomia P eri muotoon: $P(x) = x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$, mistä nähdään suoraan, että $x-3$ on polynomin P tekijä.

Toinen tulos esitellään lauseena, joka löytyy myös MAOL:sta

Jos n :n asteen polynomilla $P(x)$ on nollakohdat $x_1, x_2, \dots, x_n$, niin polynomi P on muotoa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \text{ missä kerroin } a \text{ on polynomin } P \text{ korkeimman asteen termin kerroin.}$$

Muutamia tärkeitä havaintoja lauseesta:

-mikäli polynomilla ei ole yhtään nollakohtaa, sitä ei voida esittää ensimmäisen asteen tekijöiden avulla.

Esimerkki. Polynomi $P(x) = x^4 + 1$. Tällä ei ole nollakohtia reaalilukujen joukossa, joten sitä ei voida esittää ensimmäisen asteen tekijöiden avulla.

-Ensimmäisen asteen tekijä voi esiintyä useammin, mikäli nollakohta on kaksinkertainen tai kolminkertainen.

Esimerkki. Jaa polynomi $P(x) = x^2 - 2x + 1$ tekijöihin. Ratkaistaan ensin polynomin $P(x)$ nollakohdat

$$P(x) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{Erotuksen neliön muistikaava. Tässä voisi myös käyttää ratkaisukaavaa!}$$

$$(x - 1)^2 = 0 \quad \text{Huomataan, että yhtälöllä on vain yksi ratkaisu } x=1. \text{ Näin ollen } x=1 \text{ on kaksinkertainen nollakohta. Toisen}$$

asteen polynomifunktiolla voi olla korkeintaan kaksi nollakohtaa. Koska korkeimman asteen termin kerroin $a=1$, niin polynomi P voidaan esittää muodossa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$$

Esimerkki. Jaa polynomi $P(x) = 3x^3 - x$ tekijöihin.

Ratkaistaan ensin polynomin $P(x)$ nollakohdat:

$$P(x) = 0$$

$$3x^3 - x = 0 \quad \text{Otetaan yhteinen tekijä}$$

$$x(3x^2 - 1) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö}$$

$$x = 0 \text{ tai } 3x^2 - 1 = 0 \quad \text{Ratkaistaan toinen yhtälö}$$

$$3x^2 = 1 \quad | :3$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kolmannen asteen polynomilla on korkeintaan kolme nollakohtaa, ja tämä tilanne meillä on. Korkeimman asteen termin kerroin on 3. Näin ollen polynomi P on muotoa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 3(x - 0) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(x - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$P(x) = 3x \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Mikäli tämä tuntui hankalalta, harjoittele ja kertaakaan 17 tehtävillä.

Korkeamman asteen epäyhtälö

Tiedetään, että polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Huomaa, että välttämättä se ei vaihda! Idea korkeamman asteen epäyhtälön ratkaisussa on vaiheittain seuraava:

- 1: Muokkaa epäyhtälö muotoon, jossa oikealla puolella on nolla.
- 2: Ajattele, että vasemmalla puolella oleva lauseke on jokin funktio $f(x)$, ja ratkaise sen nollakohdat. Tämä vastaa korkeamman asteen yhtälön ratkaisua! Eli täytyy muokata vasen puoli muotoon, jossa esiintyy polynomien tulo.
- 3: Tutki funktion $f(x)$ merkkejä eri alueissa nollakohtien perusteella käyttäen testipisteitä.
- 4: Tee funktion $f(x)$ merkkikaavio ja päätele epäyhtälön ratkaisu.

Esimerkki.

Ratkaise epäyhtälö

$$x^6 \geq 16x^2$$

$$x^6 - 16x^2 \geq 0 \quad \text{Merkitään, että } f(x) = x^6 - 16x^2 \quad \text{ja ratkaistaan sen nollakohdat}$$

$$f(x) = 0$$

$$x^6 - 16x^2 = 0 \quad \text{Otetaan yhteinen tekijä}$$

$$x^2(x^4 - 16) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö}$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^4 - 16 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^4 = 16$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$$

Näin ollen funktiolla $f(x)$ on kolme nollakohtaa $x=0$, $x=2$ ja $x=-2$. Nopein tapa määrittää funktion merkit nollakohtien jakamissa alueissa on laskea funktion arvot speedcrunchin avulla. ÄLÄ missään nimessä laske kokeessa näitä käsin, kun voit tehdä Speedcrunchilla. Näin säästät hurjasti aikaa, ja välttät laskuvirheitä.

Valitaan testipisteiksi $x=-3$, $x=-1$, $x=1$ ja $x=3$.

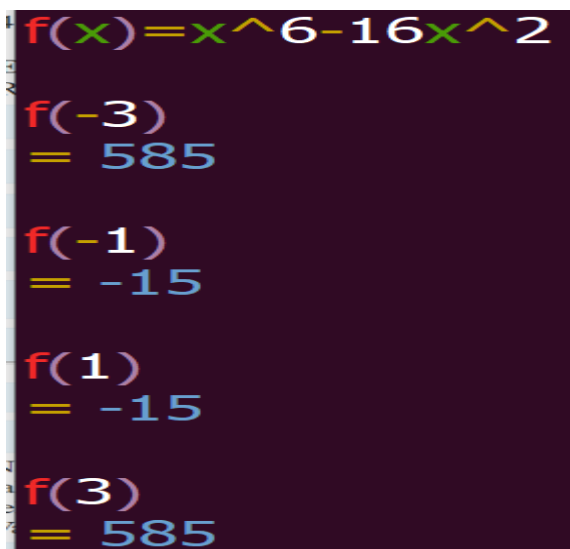
$$f(-3) = 585 > 0$$

$$f(-1) = -15 < 0$$

$$f(1) = -15 < 0$$

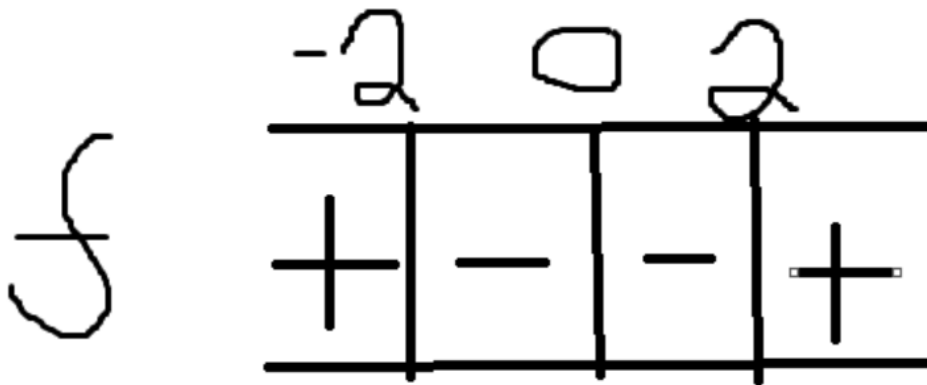
$$f(3) = 585 > 0$$

Tässä kuva Speedcrunchista:



```
f(x)=x^6-16x^2
f(-3)
= 585
f(-1)
= -15
f(1)
= -15
f(3)
= 585
```

Piirretään funktion merkkikaavio. Nopein tapa on tehdä tämä Paintilla:



Näin ollen epäyhtälö

$$x^6 - 16x^2 \geq 0 \quad \text{toteutuu, kun}$$

$$x \leq -2, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x \geq 2$$

Harjoitusesimerkki: Ratkaise epäyhtälö

$$3x^4 - 18x^3 - 3x + 18 \geq 0 \quad \text{vastaus : } x \leq 1 \text{ tai } x \geq 6$$

Seuraavaksi siirrytään rationaalifunktion käsittelyyn.

Rationaalifunktioihin liittyy muutamia käsitteitä, jotka täytyy tietää.

Nämä ovat määrittelyjoukko, määrittelyehto ja arvojoukko.

Polynomifunktiot ovat määritelty koko reaalilukujen joukossa, mutta rationaalifunktiota ei välttämättä ole.

Määrittelyjoukko ja määrittelyehto

Määrittelyjoukko tarkoittaa sitä, että millä x :n arvoilla funktio on määritelty. Annetaan joukkomerkintänä!

Määrittelyehto on sama asia kuin määrittelyjoukko, mutta annetaan x :n avulla sanottuna!

Esimerkki. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} \quad \text{Määrittelyjoukko ja määrittelyehto.}$$

Funktio on määritelty x :n arvoilla, joissa nimittäjä ei ole nollaa. Näin ollen funktio on määritelty, kun $x \neq \pm 3$.

Määrittelyehdon saat ratkaisemalla nimittäjän nollakohdat.

Funktion määrittelyehto on $x \neq \pm 3$.

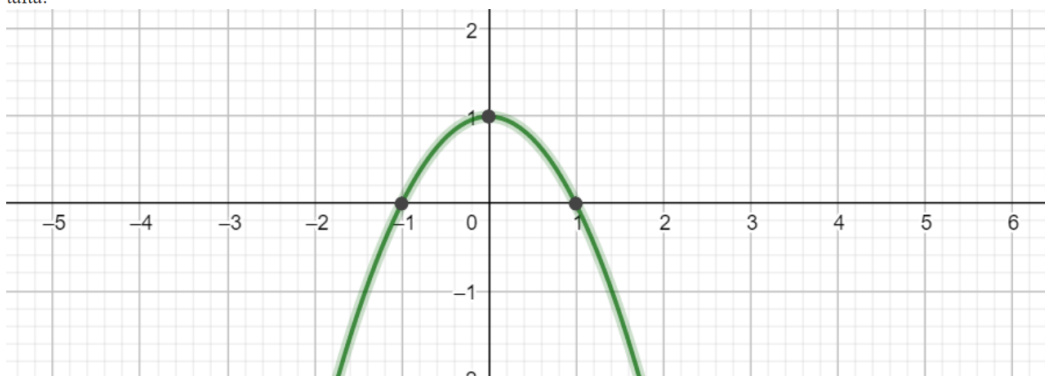
Funktion määrittelyjoukko on: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Huomaa joukkomerkintä!

Arvojoukko

Funktion arvojoukko on ne funktion arvot, joita funktio voi saada määrittelyjoukossaan. Esimerkiksi funktion

$$f(x) = -x^2 + 1 \quad \text{arvojoukko on }]-\infty, 1]. \quad \text{Polynomifunktiona se on määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Funktion kuvaaja}$$

on alaspäin aukeava paraabeli, jolla on kaksi nollakohtaa $x = \pm 1$. Funktion suurin arvo on 1, pienintä arvoa ei ole. Kuva näyttää tältä:



Esittelen seuraavaksi muutaman tilanteen rationaalifunktioista sekä tärkeitä huomautuksista.

Esimerkki. Selvitä funktion $f(x) = \frac{15x - 6x^2}{3x}$ määrittelyehto ja supista funktion lauseke.

Rationaalifunktio f on määritelty kohdissa, joissa nimittäjä ei ole nollaa. Nimittäjä saa arvon 0, jos $x=0$.

Näin ollen funktio f on määritelty, kun $x \neq 0$.

Supistetaan funktion lauseke:

$$f(x) = \frac{15x - 6x^2}{3x} = \frac{3x(5 - 2x)}{3x} = \frac{5 - 2x}{1} = 5 - 2x, \text{ missä } x \neq 0.$$

On erittäin tärkeää huomata, että jos kuvaaja piirretään Geogebraalla, niin nollan kohdalla ei näy "reikää", vaikka siellä funktio ei ole määritelty!! Tämä johtuu siitä, että kyseessä on vain yksittäinen x :n arvo äärettömän monesta ja Geogebra ei pysty sitä erottamaan jatkuvasta viivasta. Tällainen tilanne merkitään tehtävään piirtämällä funktion kuvaajalle avoin pallo kohtaan, jossa funktio ei ole määritelty, katso tehtävä 19.18.

Otetaan sitten soveltavampi esimerkki, jossa kertaantuu nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys. (kirjan tehtävä 19.9).

Määritä ne vakion c arvot, joilla murtolauseke $\frac{x^2 + 3x + c}{2x + 12}$ voidaan supistaa. Jotta murtolauseke voidaan supistaa,

täytyy ylä- ja alakerrassa olla yhteinen tekijä. Muokataan ensin lauseketta:

$$\frac{x^2 + 3x + c}{2x + 12} = \frac{x^2 + 3x + c}{2(x + 6)} \quad \text{Huomataan, että murtolauseke on määritelty, kun } x \neq -6 \text{ ja että nimittäjällä on tekijä}$$

$(x+6)$. Jotta murtolauseke voidaan supistaa, niin myös osoittajalla täytyy olla tekijä $x+6$. Tästä seuraa se, että luvun $x=-6$ täytyy olla osoittajan nollakohta! Tästä tiedosta voidaan ratkaista vakion c arvo. Tiedetään siis, että

$$(-6)^2 + 3 \cdot (-6) + c = 0$$

$$36 - 18 + c = 0$$

$$c = -18$$

Tällöin osoittajassa olevan polynomin lauseke on $x^2 + 3x - 18$. Jotta tämä polynomi voidaan jakaa tekijöihin, täytyy ratkaista sen nollakohdat:

$$x^2 + 3x - 18 = 0 \quad \text{Ratkaisukaava}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} \quad \text{Saadaan kaksi ratkaisua}$$

$$x = \frac{-3 + 9}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 9}{2} = -6 \quad (\text{Tämä nollakohta jo tiedettiin!})$$

Polynomi $x^2 + 3x - 18$ on toisen asteen polynomi, joten sillä voi olla korkeintaan kaksi nollakohtaa. Ratkaistiin, että sillä on kaksi nollakohtaa. Korkeimman asteen termin kerroin on 1, joten polynomi voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$x^2 + 3x - 18 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 3)(x + 6)$$

Palataan takaisin alkuperäiseen murtolausekkeeseen ja sijoitetaan tämä muoto osoittajan lausekkeeseen ja supistetaan:

$$\frac{x^2 + 3x + c}{2x + 12} = \frac{1(x - 3)(x + 6)}{2(x + 6)} = \frac{1(x - 3)}{2} = \frac{x - 3}{2}, \text{ kun } x \neq -6.$$

Otetaan rationaalilausekkeet ja rationaaliyhtälöt yhdellä kertaa.

Rationaalilausekkeet ja rationaaliyhtälöt ovat määritelty kaikkialla, paitsi nimittäjän nollakohdissa.

Muista, että ainostaan tilanteet, joissa osoittaja on nolla on määritelty eli esimerkiksi $0/5$. Tilanteet $0/0$ tai $5/0$, eli tilanteet, joissa nimittäjä on nolla, ei ole määritelty!

Esimerkki rationaalilausekkeista: Sievennä yhdeksi murtolausekkeeksi rationaalilauseke

$$2x - 1 + \frac{x^2 - 5}{x + 4} . \text{ Rationaalilauseke on määritelty, kun } x \neq -4. \text{ Idea on seuraava: lavennetaan termit niin, että nimittäjät}$$

ovat samoja. Lavennetaan ensimmäinen ja toinen termi lausekkeella $x+4$:

$$\frac{2x(x+4)}{x+4} - \frac{x+4}{x+4} + \frac{x^2-5}{x+4} \quad \text{Lasketaan osoittajat yhteen:}$$

$$= \frac{2x(x+4) - (x+4) + x^2 - 5}{x+4}$$

$$= \frac{2x^2 + 8x - x - 4 + x^2 - 5}{x+4} \quad \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit}$$

$$= \frac{3x^2 + 7x - 9}{x+4}, \text{ missä } x \neq -4. \quad \text{Lauseketta ei voi sieventää enempää.}$$

Rationaaliyhtälöitä ratkaistaan niin, että katsotaan ensin milloin yhtälö on määritelty. Tämän jälkeen lavennetaan yhtälössä olevia termejä tilanteen mukaan. Lopuksi tarkistetaan, toteuttaako ratkaisu määrittelyehdon.

Esimerkki. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1} = 0 \quad \text{Huomataan, että yhtälö on määritelty, kun } x \neq 0 \text{ ja } x \neq 1, \text{ sillä nämä ovat nimittäjän nollakohdat.}$$

Lavennetaan ensimmäinen termi $(x-1)$:llä ja toinen termi x :llä, jolloin saadaan:

$$\frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{x^2+x}{x(x-1)} = 0 \quad \text{Lasketaan osoittajat yhteen}$$

$$\frac{x-1-(x^2+x)}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{x-1-x^2-x}{x(x-1)} = 0 \quad \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit}$$

$$\frac{-x^2-1}{x(x-1)} = 0 \quad | \cdot x(x-1) \neq 0$$

$$-x^2-1=0$$

$$x^2 = -1 \quad \text{Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja.}$$

Näin ollen alkuperäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Esimerkki.

Ratkaise yhtälö $\frac{2x}{x-2} - \frac{1}{x} = 2$ Yhtälö on määritelty, kun $x \neq 2$ ja $x \neq 0$ (nimittäjän nollakohdat).

Ratkaistaan laventamalla yhtälön vasemmalla puolella olevat termit samannimisiksi:

$$\frac{x(2x)}{x(x-2)} - \frac{(x-2)}{x(x-2)} = 2$$

$$\frac{2x^2}{x(x-2)} - \frac{x-2}{x(x-2)} = 2 \quad \text{Lasketaan osoittajat yhteen}$$

$$\frac{2x^2 - (x-2)}{x(x-2)} = 2$$

$$\frac{2x^2 - x - 2}{x(x-2)} = 2 \quad | \cdot x(x-2) \neq 0 \quad \text{Jakaja voidaan kertoa pois, kun määrittelyehto on voimassa.}$$

$$2x^2 - x - 2 = 2x(x-2)$$

$$2x^2 - x - 2 = 2x^2 - 4x$$

$$3x = 2 \quad | : 3$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{Tämä ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon } x \neq 2 \text{ ja } x \neq 0, \text{ joten yhtälön ratkaisu on } x = 2/3.$$

Harjoittele seuraavalla esimerkillä. Ratkaise yhtälöt

a) $\frac{3x-1}{x} - \frac{x-5}{x} = 1 \quad \text{vastaus : } x = 4$

b) $\frac{3+4x}{x} - \frac{4}{x-1} = 4 \quad \text{vastaus : } x = -3$

Viimeiseksi käsitellään juurifunktiot ja neliöjuuriyhtälöt. Yleisen juuriyhtälön jätän käsittelemättä, sillä se tulee viimeisillä tunneilla, joten tuskin tarvitsee kerrata :)

Aloitetaan juurifunktioista. Tapaukset jaetaan parittomiin ja parillisiin juuriin. Käytän kirjan määritelmiä juurifunktioille:

Pariton juurifunktio $f(x) = \sqrt[n]{x}$, missä $n = 1, 3, 5, \dots$ Kuten huomautin oppitunneilla, niin ensimmäinen juuri on aika hassua

määritellä, sillä $\sqrt[n]{x} = x$.

Keskitytään siis tapauksiin, missä $n=3,5,\dots$,

Parittoman juurifunktion määrittely- ja arvojoukko on $\mathbb{R}$ eli kaikki reaaliluvut.

On tärkeää huomata, että tämä ei enää välttämättä pidä paikkaansa, jos juuren sisällä oleva lauseke ei ole pelkkä x .
 Demonstroin tätä esimerkillä.

Esimerkki

Määritä seuraavien funktioiden määrittelyehdot ja arvojoukot.

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \quad \text{ja} \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}$$

Funktio f on pariton juurifunktio, joten se on määritelty kaikilla x :n arvoilla. Määrittelyehto on näin ollen kaikki reaaliluvut. Sen arvojoukko on $\mathbb{R}$.

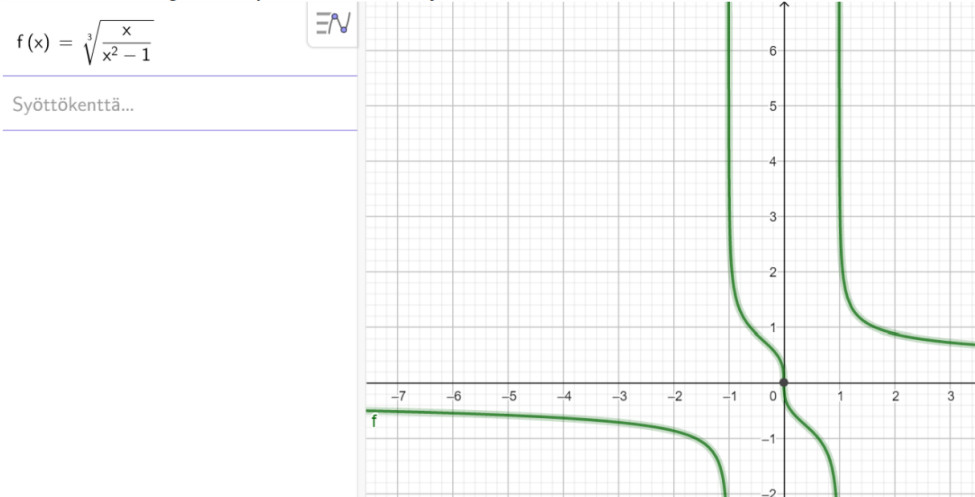
Tutkitaan sitten funktiota g . Pariton juurifunktio on kyllä määritelty kaikilla muuttujan arvoilla, mutta juuren sisällä oleva murtolauseke **ei ole**. Tästä seuraa, että funktio g ei ole määritelty niissä kohdissa, missä juuren sisällä olevan lausekkeen nimittäjä on nolla. Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 1$$

Näin ollen funktion g määrittelyehto on $x \neq \pm 1$. Arvojoukko on edelleen $\mathbb{R}$. Tässä kuva vielä funktiosta:



Kuten kuvasta huomataan, niin käytös "pahojen pisteiden" $x = \pm 1$ ympärillä on hassua. Mutta kaikki reaalilukuarvot tämä funktio saa, joten arvojoukko on edelleen $\mathbb{R}$.

Katsotaan seuraavaksi parillisen juurifunktion tapaus. Parillinen juurifunktio määritellään seuraavasti

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \text{ missä } x = 2, 4, 6, \dots \quad \text{Huomaa, että tapaus } \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} \text{ on tavallinen neliöjuuri! Tämä on}$$

vakiintunut tapa merkitä neliöjuurta.

Parillinen juurifunktio on määritelty vain, kun juurettava on epänegatiivista. Toisin sanoen määrittelyjoukko on $[0, \infty[$.

Parillisen juurifunktion arvojoukko on väli $[0, \infty[$.

Jälleen nämä äsken kaksi mainittua ominaisuutta ei välttämättä pidä paikkaansa, mikäli juuren sisällä oleva lauseke on jotain muuta kuin pelkkä x . Tätä demonstroin seuraava esimerkki:

Esimerkki. Määritä funktioiden

$$f(x) = \sqrt[8]{x} \text{ ja } g(x) = \sqrt[4]{x^2 + 2x - 4} \text{ määrittelyehdot ja arvojoukot.}$$

Aloitetaan funktiosta $f(x)$. Kyseessä on parillinen juuri, joten funktio on määritelty, kun juurettava on epänegatiivista. Tällöin funktion määrittelyehto on $x \geq 0$. Arvojoukko on $[0, \infty[$. Miten tämän voi päätellä pelkästään lausekkeesta? Mieti, kun $x=0$ niin myös kahdeksas juuri luvusta $x=0$ on 0. Näin ollen funktion pienin arvo on 0. Kun juuren sisällä oleva x kasvaa, niin kasvaa myös kahdeksas juuri tästä luvusta. Voit tarkistaa tilanteen piirtämällä kuvaajan:

$$f(x) = \sqrt[8]{x}$$

Syöttökenttä...



Vaikkakin funktion f arvot kasvavat hitaasti, niin silti ne kasvavat rajatta, kun x kasvaa rajatta. Näin ollen arvojoukko on $[0, \infty[$.

Käsitellään sitten funktio $g(x) = \sqrt[4]{x^2 + x - 2}$. Kyseessä on parillinen juuri, joten se on määritelty kun juurettava on epänegatiivista. Määrittelyehto on siis

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \quad \text{Ratkaistaan laskimella}$$

$$\text{solve}(x^2 + x - 2 \geq 0, x)$$

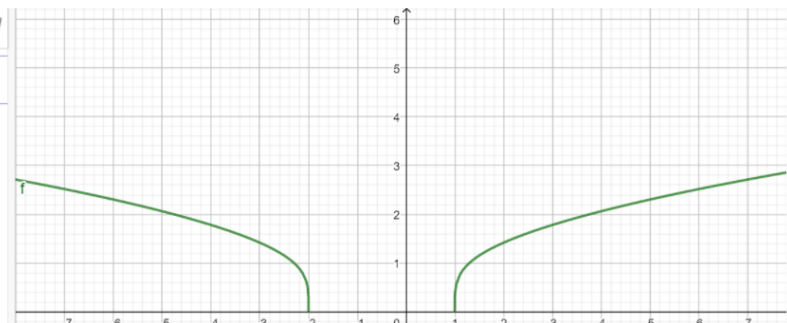
$$\{x \leq -2, 1 \leq x\}$$

Näin ollen funktio g on määritelty, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 1$.

Kuvaaja näyttää tältä:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 + x - 2}$$

Syöttökenttä...



Funktiolla on pienin arvo 0 ja suurinta arvoa ei ole. Näin ollen arvojoukko on $[0, \infty[$. Voit miettiä, miten arvojoukon olisi voinut myös määrittää ilman kuvaajaa! (Juuren sisällä oleva lauseke on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla on kaksi nollakohtaa.)

Harjoittele seuraavilla esimerkeillä:

Esimerkki. Määritä seuraavien funktioiden määrittelyehdot sekä arvojoukot. Voit käyttää kuvaajaa apuna.

a) $\sqrt{1-2x}$ vastaus : määrittelyehto $x \leq \frac{1}{2}$, arvojoukko $[0, \infty[$

b)

$\sqrt[3]{1 + \sqrt[2]{2x}}$ vastaus : määrittelyehto $x \geq 0$, arvojoukko $[1, \infty[$

Käsitellään vielä neliöjuuriyhtälö.

Neliöjuuriyhtälöiden kanssa pitää olla varovainen. Neliöjuuriyhtälöiden ratkaisuun on kaksi eri tapaa, joista esittelen ensin helpoimman tavan, joka toimii "melkein aina".

Tapa 1: Ratkaise neliöönkorottamalla ja tarkista ratkaisu

Esimerkki. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{4-x} - 2 = x$$

$$\sqrt{4-x} = x + 2 \quad \text{Korotetaan puolet neliöön}$$

$$(\sqrt{4-x})^2 = (x+2)^2$$

$$4-x = x^2 + 4x + 4$$

$$-x^2 - 5x = 0 \quad \text{Otetaan yhteinen tekijä}$$

$$-x(x+5) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö:}$$

$$-x = 0 \text{ tai } x + 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -5 \quad \text{Tarkistetaan ratkaisu sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön. Aloitetaan ratkaisusta } x=0:$$

$$\sqrt{4-x} = x + 2$$

$$\sqrt{4-0} = 0 + 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2 \quad \text{Tosi, joten } x=0 \text{ on ratkaisu. Tarkistetaan sitten ratkaisu } x=-5:$$

$$\sqrt{4-x} = x + 2$$

$$\sqrt{4+5} = -5 + 2$$

$$\sqrt{9} = -3 \quad \text{Epätosi, joten } x=-5 \text{ ei ole ratkaisu.}$$

Näin ollen yhtälön ratkaisu on $x=0$.

Tapa 2: Tarkista juuren määrittelyehto sekä neliöönkorotusehto. Ratkaise tämän jälkeen yhtälö neliöönkorottamalla ja katso, toteuttavatko ratkaisut kummatkin ehdot.

Käytetään esimerkkinä samaa yhtälöä:

$$\sqrt{4-x} = x + 2$$

Neliöjuuri on määritelty, kun juurettava on epänegatiivista:

$$4-x \geq 0$$

$$-x \geq -4$$

$x \leq 4$. Näin ollen yhtälön vasen puoli on määritelty ja epänegatiivista, kun $x \leq 4$. Neliöönkorotusehto vaatii, että myös oikea puoli on epänegatiivista:

$$x + 2 \geq 0$$

$$x \geq -2 \quad \text{Yhdistämällä nämä kaksi ehtoa saadaan}$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

Ratkaistaan yhtälö neliöönkorottamalla:

$$\sqrt{4-x} = x+2 \quad | \quad ()^2$$

$$4-x = (x+2)^2$$

$$4-x = x^2 + 4x + 4$$

$$-x^2 - 5x = 0 \quad \text{Otetaan yhteinen tekijä}$$

$$-x(x+5) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö}$$

$$-x = 0 \text{ tai } x+5 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -5$$

Näistä ratkaisuksista ainoastaan $x=0$ toteuttaa ehdon $-2 \leq x \leq 4$, joten yhtälön ratkaisu on $x=0$.

Tässä vaiheessa voisin kommentoida oman mielipiteeni. Usein nopein tapa on tehdä tavan 1 mukaisesti.

Harjoittele seuraavalla esimerkillä. Määritä funktion nollakohdat, kun funktio on

a) $f(x) = \sqrt{x-x^2} - x \quad \text{Vastaus: } x=0 \text{ tai } x=\frac{1}{2}$

b)

$$g(x) = \sqrt{8x} - \sqrt{2x} - 2 \quad \text{Vastaus: } x=2$$

Varoituksen sana: Kohta b on hankalampi, vaatii kaksi neliöönkorotusta, kuten kappaleen 23 esimerkissä 3.