MATIKAN TENTI 13.3. A-OSA RATKAISUT

2.

a)

i) $x^3+10x^2+25x=x(x^2+10x+25)=x(x+5)(x+5)$

ii) $x^3+10x^2+25x=0$ Tekijämuoto i)-kohdasta.

$x\,(x+5)\,(x+5)=0$ Tulon nollasääntö:

$x=0$ tai $x+5=0$

Vastaus: $x=0$ tai $x=-5$

iii) $x^3+10x^2+25x>0$ Tekijämuoto i)-kohdasta.

$x\,(x+5)\,(x+5)>0$ Tarkastellaan etumerkkiä merkkikaavion avulla:

		-5	0	
x	–	–	+
$x+5$	–	+	+
$x+5$	–	+	+
$x(x+5)(x+5)$	–	–	+

$x(x+5)(x+5)<0$

Vastaus: $x<0$

b) $(x-3)$ on yksi tekijä. Koska $P\,(-2)=0$, niin $(x+2)$ on toinen tekijä.

Vastaus: $P\,(x)=(x-3)\,(x+2)$

c)

$P\,(x)=(x+2)^2$ $Q\,(x)=3x^2-4x+2$

$P\,(x)+Q\,(x)=(x+2)^2+3x^2-4x+2$

$=x^2+4x+4+3x^2-4x+2$

$=4x^2+6$

d)

$P\,(x)=ax^2+bx+c$

$P\,(0)=5$, joten $a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=5$, josta saadaan $c=5$

$P\,(x)=ax^2+bx+5$

$P\,(1)=5$, joten $a+b+5=5$, josta saadaan $a=-b$

Luvut a ja b ovat toistensa vastalukuja.

7.

a)

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(2\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)

$$\cos(2x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$2x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi$$

c)

$$\cos x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{-1}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\pm\sqrt{\frac{15}{16}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Kolmannessa neljänneksessä kosini on negatiivinen joten

$$\cos(x)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

d)

$$D\left(5\cos x-3\sin 2x+\sin^3 x\right)=-5\sin x-6\cos(2x)+3\sin^2 x\cos x$$

e)

$$-1\leq\cos 2x\leq 1$$

$$-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\cos 2x\leq\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\cos 2x+1\leq\frac{3}{2}$$

Pienin arvo

$$\frac{1}{2}$$

Suurin arvo

$$\frac{3}{2}$$

9.

a)

$$\int \left(2x^3 + 3\right) dx = \frac{2}{4}x^4 + 3x + C = \frac{1}{2}x^4 + 3x + C$$

Sijoittamalla ylä-ja alarajat saadaan

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 1^4 + 3 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{2}(-2)^4 + 3 \cdot (-2)\right) =$$

$$3\frac{1}{2} - 8 + 6 =$$

$$1\frac{1}{2}$$

b)

$$V = \pi \int_1^3 \frac{1}{(2x+4)^2} dx =$$

$$\pi \int_1^3 (2x+4)^{-2} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^3 2(2x+4)^{-2} dx$$

$$\int 2(2x+4)^{-2} dx = -(2x+4)^{-1} + C$$

Sijoittamalla ylä- ja alarajat saadaan

$$\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{3}{30} + \frac{5}{30}\right) = \frac{\pi}{30}$$