

MATIKAN TENTI 13.3. A-OSA RATKAISUT

2.

a)

i) $x^3 + 10x^2 + 25x = x(x^2 + 10x + 25) = x(x+5)(x+5)$

ii) $x^3 + 10x^2 + 25x = 0$ Tekijämuoto i)-kohdasta.

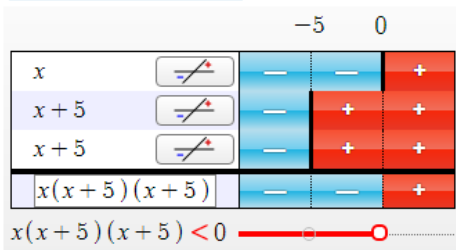
$x(x+5)(x+5) = 0$ Tulon nollasääntö:

$x = 0$ tai $x + 5 = 0$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = -5$

iii) $x^3 + 10x^2 + 25x > 0$ Tekijämuoto i)-kohdasta.

$x(x+5)(x+5) > 0$ Tarkastellaan etumerkkiä merkkikaavion avulla:



Vastaus: $x < 0$

b) $(x - 3)$ on yksi tekijä. Koska $P(-2) = 0$, niin $(x + 2)$ on toinen tekijä.

Vastaus: $P(x) = (x - 3)(x + 2)$

c)

$P(x) = (x + 2)^2$ $Q(x) = 3x^2 - 4x + 2$

$P(x) + Q(x) = (x + 2)^2 + 3x^2 - 4x + 2$

$= x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 4x + 2$

$= 4x^2 + 6$

d)

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(0) = 5$, joten $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5$, josta saadaan $c = 5$

$P(x) = ax^2 + bx + 5$

$P(1) = 5$, joten $a + b + 5 = 5$, josta saadaan $a = -b$

Luvut a ja b ovat toistensa vastalukuja.

7.

a)

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(2\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + n\pi$$

c)

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{4}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm \sqrt{\frac{15}{16}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Kolmannessa neljänneksessä kosini on negatiivinen joten

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

d)

$$D(5 \cos x - 3 \sin 2x + \sin^3 x) = -5 \sin x - 6 \cos(2x) + 3 \sin^2 x \cos x$$

e)

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cos 2x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cos 2x + 1 \leq \frac{3}{2}$$

Pienin arvo

$$\frac{1}{2}$$

Suurin arvo

$$\frac{3}{2}$$

a)

$$\int (2x^3 + 3) dx = \frac{2}{4}x^4 + 3x + C = \frac{1}{2}x^4 + 3x + C$$

Sijoittamalla ylä- ja alarajat saadaan

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 1^4 + 3 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{2}(-2)^4 + 3 \cdot (-2)\right) =$$

$$3\frac{1}{2} - 8 + 6 =$$

$$1\frac{1}{2}$$

b)

$$V = \pi \int_1^3 \frac{1}{(2x+4)^2} dx =$$

$$\pi \int_1^3 (2x+4)^{-2} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^3 2(2x+4)^{-2} dx$$

$$\int 2(2x+4)^{-2} dx = -(2x+4)^{-1} + C$$

Sijoittamalla ylä- ja alarajat saadaan

$$\frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{3}{30} + \frac{5}{30} \right) = \frac{\pi}{30}$$