RATKAISUT

1.

On osoitettava, että luku $\sqrt{3}-1$ on luvun $4-2\sqrt{3}$ neliöjuuri.
Luvun $\sqrt{3}-1$ on oltava epänegatiivinen, ja luvun $\sqrt{3}-1$ neliön tulee olla $4-2\sqrt{3}$.

1° $\sqrt{3}-1\approx 0{,}7>0$. Siis luku $\sqrt{3}-1$ on epänegatiivinen.

2° $(\sqrt{3}-1)^2$ $\qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$= (\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2$$

$$= 3-2\sqrt{3}+1=4-2\sqrt{3}$$

Siis $(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$.

Kohtien 1° ja 2° nojalla luku $\sqrt{3}-1$ on luvun $4-2\sqrt{3}$ neliöjuuri. □

2.

a) Yhtälö on $P(x)=0$, missä polynomi P on muotoa

$$P(x)=a(x-(-3))(x-(-1))(x-2)=a(x+3)(x+1)(x-2),$$

missä a on vakio ja $a\neq 0$.
Siis esimerkiksi kelpaa yhtälö $(x+3)(x+1)(x-2)=0$.

b) $P(1)=-72$:

$$a(1+3)(1+1)(1-2)=-72$$

$$a\cdot(-8)=-72 \quad \big| :(-8)$$

$$a=9$$

Siis $P(x)=9(x+3)(x+1)(x-2)$.

3.

$0<k<4$ (Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktion kaikki arvot ovat positiivisia, kun funktiolla ei ole nollakohtia. Siis yhtälön $x^2+kx+k=0$ diskriminantin k^2-4k tulee olla negatiivinen.)

4.

$$\frac{9x^2-1}{12x-4}=\frac{(3x+1)(3x-1)}{4(3x-1)}=\frac{3x+1}{4}\to\frac{3\cdot\frac{1}{3}+1}{4}=\frac{1}{2},\ \text{kun}\ x\to\frac{1}{3}$$

5.

Arvoilla $a=-3$ ja $a=\frac{1}{2}$.
Kun $a=-3$, raja-arvo on -7;
kun $a=\frac{1}{2}$, raja-arvo on 7.
(Lausekkeen tulee olla kohdassa a "muotoa $\frac{0}{0}$", eli luvun a tulee olla jompikumpi osoittajan nollakohdista -3 ja $\frac{1}{2}$.

Kun $a=-3$, lauseke on $\dfrac{2(x+3)(x-\frac{1}{2})}{x+3}$.

Kun $a=\frac{1}{2}$, lauseke on $\dfrac{2(x+3)(x-\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}$.)

6.

kun $-\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ tai $1 < x < 2$

($\frac{x}{x-1}$ on määritelty, kun $x \neq 1$, $\lg(2-x)$ on määritelty, kun $x < 2$, ja $\sqrt{5x+3-2x^2}$ on määritelty, kun $5x + 3 - 2x^2 \geqslant 0$ eli kun $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$.)

7.

$$2\log_2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \log_2(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$$
$$= \log_2(8 - 4\sqrt{3}) = \log_2 4(2 - \sqrt{3})$$
$$= \log_2(2 - \sqrt{3}) + \log_2 4 = \log_2(2 - \sqrt{3}) + 2$$

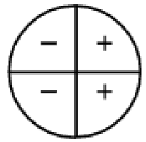
8.

Tapa 1. Ratkaistaan ensin $\cos\alpha$ trigonometristen funktioiden Pythagoraan lauseella.

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} \quad \text{tai} \quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}}$$

Koska $90° < \alpha < 180°$ eli α on koordinaatiston II neljänneksessä, $\cos\alpha$ on negatiivinen.



cos α

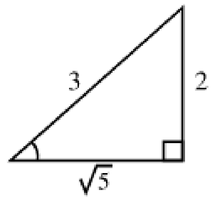
Siis

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{ja}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Tapa 2. Lasketaan ensin sinin, kosinin ja tangentin itseisarvoilla.

Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka toisen terävän kulman sini on $\frac{2}{3}$. Vastaisen kateetin pituudeksi voidaan valita 2 ja hypotenuusan pituudeksi 3.



Toisen kateetin pituus on $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, ja saman terävän kulman kosini on $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ja tangentti $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Kulman α kosinin itseisarvo on $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ja tangentin itseisarvo $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

9.

Sinifunktion suurin arvo on 1 ja pienin arvo -1, joten funktion $1 + 3\sin 2\alpha$ suurin arvo on $1 + 3 \cdot 1 = 4$ ja pienin arvo $1 + 3 \cdot (-1) = 1 - 3 = -2$.

Koska sinin arvojoukko on väli $[-1, 1]$, funktio $1 + 3\sin 2\alpha$ saa myös kaikki suurimman ja pienimmän arvonsa välissä olevat arvot. Siis arvojoukko on $[-2, 4]$.

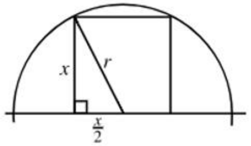
10.

Tölkkien pinta-alojen suhde on $\left(\frac{7{,}8}{11{,}7}\right)^2 \approx 0{,}44$.

Siis pienempään tölkkiin tarvitaan $44\ \%$ isomman tölkin peltimäärästä, joten tarve on $56\ \%$ pienempi.

11.

Merkitään ympyrän sädettä r. Ratkaistaan neliön sivu x.



$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2$ Pythagoraan lause

$x^2 + \frac{1}{4}x^2 = r^2$

$\frac{5}{4}x^2 = r^2 \quad | \cdot \frac{4}{5}$

$x^2 = \frac{4}{5}r^2$

$x = (\pm)\frac{2}{\sqrt{5}}r$

Neliön pinta-ala on $A_N = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}r\right)^2 = \frac{4}{5}r^2$, ja puoliympyrän pinta-ala on

$A_P = \frac{1}{2}\pi r^2$.

Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_N}{A_P} = \frac{4}{5}r^2 : \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4r^2}{5} \cdot \frac{2}{\pi r^2} = \frac{8}{5\pi}.$$

$\frac{8}{5\pi} \approx 0{,}51$

12.

Tasasivuisen kolmion korkeusjanan pituus on $\frac{\sqrt{3}}{2}b$, missä b on kolmion sivunpituus.

Tasasivuisen kolmion sisään ja ulos piirrettyjen ympyröiden keskipiste on korkeusjanojen leikkauspiste, joka on korkeusjanan kolmasosan päässä kannasta.

a) Korkeusjanan pituus on $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5a = \frac{5\sqrt{3}}{2}a$.

Sisään piirretyn ympyrän säde on $\frac{1}{3}h = \frac{5\sqrt{3}}{6}a$.

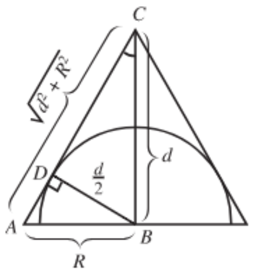
13.

$\frac{4 - \pi}{(3 + 2\sqrt{2})\pi} \approx 0{,}047$ (Väliin jäävän alueen pinta-ala on $4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$.
Ulkopuolelle piirretyn ympyrän säde on
$r\sqrt{2} + r = (\sqrt{2} + 1)r$ ja pinta-ala
$\pi(\sqrt{2} + 1)^2 r^2 = \pi(3 + 2\sqrt{2})r^2$.)

14.

Leikataan kappaleet tasolla, joka sisältää kartion akselin.

Merkitään kartion pohjan sädettä R.



Kuvion kolmiot ABC ja BDC ovat yhdenmuotoiset (kk), sillä niillä on yhteinen kulma ja molemmissa on suora kulma.

Pythagoraan lauseella saadaan janan AC pituus $\sqrt{d^2+R^2}$.

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö.

$$\frac{d}{2} : R = \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}$$

$$\frac{d}{2R} = \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} \qquad | : d$$

$$\frac{1}{2R} = \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$2R = \sqrt{d^2+R^2}$$

Koska $2R \geqslant 0$, yhtälö on yhtäpitävä neliöön korottamalla saadun yhtälön kanssa.

$$4R^2 = d^2 + R^2$$

$$3R^2 = d^2$$

$$R^2 = \frac{1}{3}d^2$$

$$R = (\pm)\frac{1}{\sqrt{3}}d$$

Kartion pohjaympyrän halkaisija on $2R = \frac{2}{\sqrt{3}}d$.

15.

a) paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (Olkoon (x, y) ympyrän keskipiste. Keskipiste on yhtä etäällä x-akselista ja pisteestä $(0, 1)$ eli $|y| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.)

b) paraabelin $y = \frac{1}{4}x^2$ (Olkoon (x, y) halkaisijan toinen päätepiste. Pisteitä (x, y) ja $(0, 1)$ yhdistävän janan keskipiste $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}(y+1))$ on a-kohdan käyrällä, joten $\frac{1}{2}(y+1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x)^2 + \frac{1}{2}$.)

16.

Suoralla on suuntavektori

$\overline{v} = \overline{AB} = (4-3)\overline{i} + (5-3)\overline{j} + (0-2)\overline{k} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$.

Piste $P = (x, y, z)$ on suoralla, joka kulkee pisteen $A(3, 3, 2)$ kautta ja jonka suuntavektori on $\overline{v}$, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{v}$$ Sijoitetaan pisteiden $P(x, y, z)$ ja $A(3, 3, 2)$ paikkavektorit ja suuntavektori $\overline{v}$.

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = 3\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k} + t(\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}) \qquad \text{Poistetaan sulkeet.}$$

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = 3\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k} + t\overline{i} + 2t\overline{j} - 2t\overline{k} \qquad \text{Yhdistetään kantavektorien kertoimet.}$$

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = (3+t)\overline{i} + (3+2t)\overline{j} + (2-2t)\overline{k}.$$

Komponenttiesityksen yksikäsitteisyyden nojalla piste $P = (x, y, z)$ on suoralla, jos ja vain jos*

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 - 2t. \end{cases}$$

Piste $C = (-9, -21, 26)$ on suoralla, jos ja vain jos on olemassa sellainen luku t, että

$$\begin{cases} -9 = 3 + t \\ -21 = 3 + 2t \\ 26 = 2 - 2t. \end{cases}$$

Tutkitaan, onko yhtälöryhmällä ratkaisu t. Ensimmäisestä yhtälö toteutuu, kun $t = -12$. Sijoitetaan $t = -12$ toiseen ja kolmanteen yhtälöön.

$$\begin{array}{ll} -21 = 3 + 2 \cdot (-12) & 26 = 2 - 2 \cdot (-12) \\ -21 = 3 - 24 & 26 = 2 + 24 \\ -21 = -21 & 26 = 26 \\ \text{tosi} & \text{tosi} \end{array}$$

Luku $t = -12$ toteuttaa kaikki kolme yhtälöä. Siis piste C on pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla.

On.

17.

. $t = \frac{7}{10}$ (Piste $P = (2 - t, 1 + 3t)$. Suoran yhtälö on $x - 3y + 8 = 0$. Piste P on suoralla, kun $2 - t - 3(1 + 3t) + 8 = 0$.)

18.

Funktion f määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Derivoidaan.

$f'(x) = -3e^{-3x+1}$

Koska kaikilla x on $e^x > 0$, niin $f'(x) < 0$ kaikilla x. Funktio f on kaikkialla aidosti vähenevä, joten sillä on käänteisfunktio.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko.

Kun $x \to \infty$, niin $-3x + 1 \to -\infty$ ja siis $f(x) = e^{-3x+1} - 2 \to 0 - 2 = -2$.

Kun $x \to -\infty$, niin $-3x + 1 \to \infty$ ja siis $f(x) = e^{-3x+1} - 2 \to \infty$.

Koska funktio f on jatkuva, se saa jokaisen arvon kahden saamansa arvon väliltä. Funktion f arvojoukko ja siis käänteisfunktion määrittelyjoukko on väli $]-2, \infty[$.

Määritetään käänteisfunktion lauseke ratkaisemalla x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$\begin{array}{ll} e^{-3x+1} - 2 = y & f(x) = y \\ e^{-3x+1} = y + 2 & \\ -3x + 1 = \ln(y + 2) & \\ -3x = \ln(y + 2) - 1 & \mid : (-3) \\ x = -\frac{1}{3}\ln(y + 2) + \frac{1}{3} & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Siis $f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}\ln(y + 2) + \frac{1}{3}$. Voidaan myös merkitä muuttujaa x:llä, jolloin $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}\ln(x + 2) + \frac{1}{3}$.

käänteisfunktion määrittelyjoukko $]-2, \infty[$, $f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}\ln(y + 2) + \frac{1}{3}$

19.

$p \geqslant \frac{1}{4}$ (Jos $p = 0$, niin funktio on $3x^2 + 6x + 1$. Funktion kuvaaja on paraabeli, joten funktio ei ole kaikkialla aidosti kasvava. Oletetaan, että $p \neq 0$. Funktion $f(x) = 2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$ derivaattafunktion $f'(x) = 6px^2 + 6x + 6$ kuvaaja on paraabeli. Jotta f olisi kaikkialla aidosti kasvava, paraabelin tulee aueta ylöspäin ja sen tulee olla x-akselin yläpuolella tai sivuta x-akselia. Siis tulee olla $p > 0$ ja $D = 36 - 144p \leqslant 0$.)

20.

Särmiö on kuutio, jonka särmien pituus on $\frac{2}{\sqrt{3}}$. (Jos särmiön pohjasärmä on a ja korkeus h, niin särmiön tilavuus on $V = a^2h$. Leikataan kappaleet tasolla, joka kulkee särmiön kahden vastakkaisen pystysärmän kautta. Kuviossa on 1-säteisen ympyrän sisällä suorakulmio, jonka sivut ovat $a\sqrt{2}$ ja h. Saadaan $(a\sqrt{2})^2 + h^2 = 2^2$ eli $2a^2 + h^2 = 4$. Valitaan muuttujaksi h (jos muuttuja olisi a, niin V:n lausekkeeseen jäisi neliöjuuri), jolloin

$a^2 = \frac{1}{2}(4 - h^2)$ ja

$V(h) = \frac{1}{2}(4 - h^2)h = \frac{1}{2}(4h - h^3)$, missä

$0 \leqslant h \leqslant 2$. Välillä $]0, 2[$ on derivaattafunktion $V'(h) = \frac{1}{2}(4 - 3h^2)$ nollakohta $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Suurin arvo perustellaan laskemalla funktion V arvo derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä tai laatimalla kulkukaavio (derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli). Edelleen saadaan särmiön pohjasärmän pituudeksi myös $\frac{2}{\sqrt{3}}$.)

21.

$\frac{333\pi}{10} \approx 105$ (Yhtälöstä $y = x^3 + 1$ saadaan $x = \sqrt[3]{y-1}$. Alueen y-akselia vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat ympyröitä, joiden säde on $3 - \sqrt[3]{y-1}$. Kappaleen tilavuus

$$V = \pi \int_0^9 (3 - \sqrt[3]{y-1})^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^9 \left(9 - 6(y-1)^{\frac{1}{3}} + (y-1)^{\frac{2}{3}}\right) dy$$

$$= \pi \Big/_0^9 \left(9y - 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot (y-1)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}(y-1)^{\frac{5}{3}}\right)$$

$$= \pi \Big/_0^9 \left(9y - \frac{9}{2}(\sqrt[3]{y-1})^4 + \frac{3}{5}(\sqrt[3]{y-1})^5\right).)$$

22.

14. pallo (Peräkkäiset pallot ovat saman kuution ympäri ja sisään piirretyt pallot. Jos kuution särmän pituus on a, niin kuution sisään piirretyn pallon halkaisija on a ja kuution ympäri piirretyn pallon halkaisija on kuution avaruuslävistäjä $a\sqrt{3}$. Kuution sisään ja ympäri piirrettyjen pallojen tilavuuksien suhde on halkaisijoiden suhteen kuutio

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Pallojen tilavuudet muodostavat siis geometrisen jonon $V_1, V_2, V_3, \ldots$, jossa $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Epäyhtälö $q^{n-1} V_1 < 10^{-9} \cdot V_1$

toteutuu, kun $n > \frac{\lg 10^{-9}}{\lg q} + 1 \approx 13{,}6$.)

23.

Valitaan alkeistapauksiksi 25 valtuutetun joukon seitsemän valtuutetun osajoukot."

Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{25}{7}$.

a) Tapahtumalle "pelkkiä naisia" suotuisia alkeistapauksia ovat 15 naisvaltuutetun joukosta valitut 7 valtuutetun osajoukot. Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{15}{7}$.

$$\text{P(pelkkiä naisia)} = \frac{\binom{15}{7}}{\binom{25}{7}} = \frac{6\,435}{480\,700} \approx 0{,}013$$

b) Tapahtumalle "neljä naista ja kolme miestä" suotuisia ovat seitsemän valtuutetun osajoukot, joissa on neljä naista ja kolme miestä.

Valitaan osajoukkoon ensin naisjäsenet ja sitten miesjäsenet.

Valitaan 4 naista 15 naisen joukosta: $\binom{15}{4}$ vaihtoehtoa.

Valitaan 3 miestä 10 miehen joukosta: $\binom{10}{3}$ vaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen nojalla suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $\binom{15}{4} \cdot \binom{10}{3}$,

joten

$$\text{P(4 naista ja 3 miestä)} = \frac{\binom{15}{4}\binom{10}{3}}{\binom{25}{7}} = \frac{1\,365 \cdot 120}{480\,700} \approx 0{,}34.$$

a) 0,013 b) 0,34

24.

$$\text{Funktio } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a & \text{, kun } x < 1 \\ x^2 - x - 2, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

on jatkuva kaikkialla, jos se on jatkuva kohdassa 1.

Funktio f on oikealta jatkuva kohdassa 1.

Siis f on jatkuva, jos $\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$ eli jos

$$2 \cdot 1^2 + a = 1^2 - 1 - 2$$
$$a = -4.$$

Siis jatkuva funktio on

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & , \text{ kun } x < 1 \\ x^2 - x - 2, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Nollakohdat:

$$2x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -1 \text{ tai } x = 2$$

Funktion määrittelyn ehdot toteuttavat juuret $-\sqrt{2}$ ja 2.

25.

1. $f(x+y) = f(x)f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$
2. $f(0) = 1$
3. f on derivoituva kohdassa $x = 0$ eli $f'(0)$ on olemassa.

Väite: f on derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä ja $f'(x) = f'(0)f(x)$.

Todistus:

Derivaatan määritelmän mukaan

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)[f(h)-1]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)[f(h)-f(0)]}{h}$$
$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} f(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}}_{f'(0)} = f(x)\cdot f'(0)$$

joten f on derivoituva kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja $f'(x) = f'(0)\cdot f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. □

Esimerkkifunktioksi kelpaa $f(x) = e^x$, koska

1. $f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x)\cdot f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$
2. $f(0) = e^0 = 1$
3. $f(x) = e^x$, joten $f'(x) = e^x$. Tällöin $f'(0) = e^0 = 1$.

   Siis $f'(0)$ on olemassa.

26.

$$\int_3^4 \ln(\pi x)dx \approx 0{,}25\cdot(\frac{1}{2}\cdot f(3) + f(3{,}25) + f(3{,}5) + f(3{,}75) + \frac{1}{2}\cdot f(4)) =$$

$$0{,}25\cdot(\frac{1}{2}\cdot\ln(\pi\cdot 3) + \ln(\pi\cdot 3{,}25) + \ln(\pi\cdot 3{,}5) + \ln(\pi\cdot 3{,}75) + \frac{1}{2}\cdot\ln(\pi\cdot 4))$$

$$= 2{,}3936\ldots \approx 2{,}394.$$

/astaus: 2,394. **(4p.)**

27.

Derivoidaan: $f'(x) = 4x^3 + 1$

Alkuarvaus: $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = \frac{1393}{1905}$$

$x_3 = 0{,}72454848001147$

$x_4 = 0{,}72449196299104$

$x_5 = 0{,}7244919590005$

$x_6 = 0{,}72449195900052$

Näyttäisi siltä että nollakohta 9 desimaalin tarkkuudella on $x \approx 0{,}724491959$.

Tarkistetaan tulos laskemalla funktion arvot

$f(0{,}7244919595) > 0$

$f(0{,}7244919585) < 0$

Nyt, koska kyseessä on jatkuva funktio, voidaan Bolzanon lauseen nojalla todeta että nollakohta on välillä $]0{,}7244919585;0{,}7244919595[$. Koska kaikki välin arvot pyöristyvät samaan 9-desimaalin tarkkuuteen, on vastaus: $x \approx 0{,}724491959$ **(4p.)**

28.

Ratkaistaan x yhtälöstä $f(x) = 0$:

$x = 1 - x^4$

Iteroitavana funktiona toimii siis $g(x) = 1 - x^4$

Alkuarvaus: $x_0 = \frac{1}{2}$

$x_1 = g(x_0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}9375$

$x_2 = g(x_1) = 1 - 0^4 = 1$

Huomataan, että iterointi ei suppene (riippumatta alkuarvauksesta). **Yritetään vielä toista muotoa** iteroitavalle funktiolle:

Ratkaistaan x yhtälöstä $f(x) = 0$:

$x^4 = 1 - x$

$x = \pm\sqrt[4]{1-x}$

Koska haettu nollakohta x on positiivinen, hylätään negatiivinen juuri. $g(x) = \sqrt[4]{1-x}$

Alkuarvaus: $x_0 = \frac{1}{2}$

$x_1 = g(x_0) = \sqrt[4]{1-\frac{1}{2}} \approx 0{,}84089641525$

$x_2 = g(x_1) \approx 0{,}63156781668097$

$x_3 \approx 0{,}77909315717133$ (laskimella....)

$\vdots$

$x_{35} \approx 0{,}72449204424094$

$x_{36} \approx 0{,}72449190296222$

$\vdots$

$x_{67} \approx 0{,}72449195900065$

$x_{68} \approx 0{,}72449195900043$

vastaus: $x \approx 0{,}724491959$ (oikea tarkkuus perusteltiin jo tehtävässä 2) **(4p.)**

29.

Oletus: Olkoon n on positiivinen kokonaisluku.

Väite: Luku $(n+1)^2(n+2)^3(3n^2+9n)$ on jaollinen luvulla 8.

Todistus: Muokataan lukua $(n+1)^2(n+2)^3(3n^2+9n)$. Nyt

$$(n+1)^2(n+2)^3(3n^2+9n)=(n+1)(n+1)(n+2)(n+2)(n+2)3n(n+3)$$
$$=3n(n+1)(n+2)(n+3)(n+1)(n+2)(n+2) \quad (1p)$$

Koska n, $n+1$, $n+2$ ja $n+3$ ovat peräkkäiset kokonaisluvut, niin jokin niistä on jaollinen luvulla 4. (+2p)
Koska $n+1$ ja $n+2$ ovat peräkkäiset kokonaisluvut, niin toinen niistä on jaollinen luvulla 2. (+2p)
Luku $3(n+1)(n+2)^2$ on triviaalisti kokonaisluku.

Täten luku $3n(n+1)(n+2)(n+3)(n+1)(n+2)(n+2)$ on jaollinen luvulla $4\cdot 2=8$. (+1p)
Täten väite on todistettu.

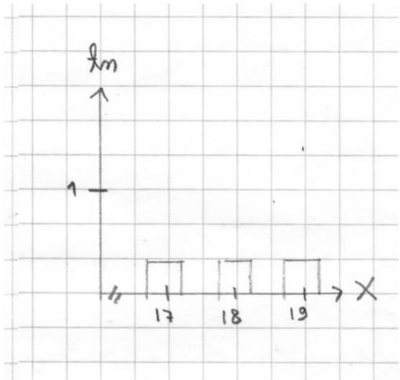
30.

a) Mahdolliset summat ovat 19, 18 ja 17.

Saadaan jakauma

Summa	Todennäköisyys
19	P("9+10 tai 10+9")= $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
18	P("10+8 tai 8+10 tai 9+9")= $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$
17	P("9+8 tai 8+9")= $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
Yhteensä	1 eli OK

Oikea ic



b) Odotusarvo $\mu=\frac{1}{3}\cdot 19+\frac{1}{3}\cdot 18+\frac{1}{3}\cdot 17=18$

(Voidaan päätellä myös symmetrian avulla)

Keskihajonta $\sigma=\sqrt{\frac{1}{3}[(19-18)^2+(18-18)^2+(17-18)^2]}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0{,}82$

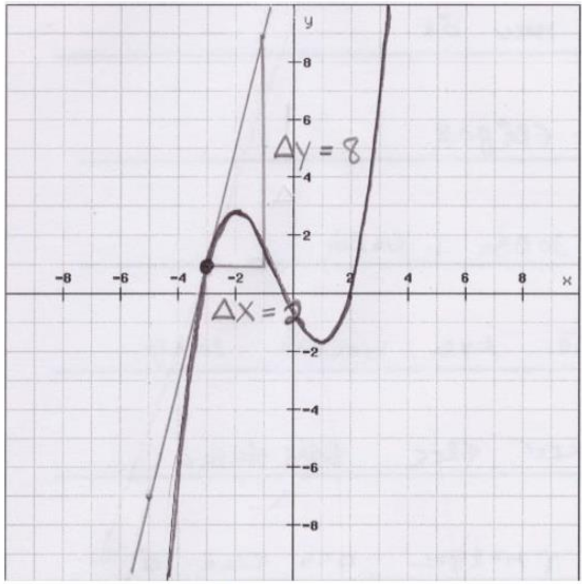
Idea

Vastaus (kelpaa myös $\sqrt{\frac{2}{3}}$)

31.

Ratkaisu: a) 1) Derivaatan nollakohdat ovat ne kohdat, missä tangentti on vaakasuora eli tangentin kulmakerroin on nolla. Nollakohdat ovat $x\approx -2$ tai $x\approx 1$.

2) Piirretään kohtaan $x=-3$ tangentti ja luetaan kuvasta tangentin kulmakerroin. Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo annetussa kohdassa.

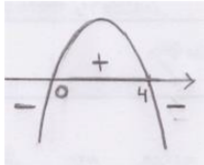


Siis $f'(-3)\approx\frac{8}{2}=4$

b) Funktio $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ on määritelty, kun juurrettava on po
$4x - x^2 \geq 0$.

Nollakohdat:

$$4x - x^2 = 0$$
$$x(4 - x) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } 4 - x = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$



Kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli, joten $4x - x^2 \geq 0$, kun 0
$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ määrittelyjoukko on siis $0 \leq x \leq 4$.

c)

$$2^{2x} = \frac{4}{4^x} \Leftrightarrow 4^x = 4^{1-x}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vastaus: a) 1) $x = -2$ tai $x = 1$ 2) $f'(-3) \approx 4$ b) $0 \leq x \leq 4$ c) :