

PITKÄ MATEMATIIKKA TENTTI

1. Osoita, että $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.
2. Muodosta
 - a) jokin kolmannen asteen yhtälö, jolla on juuret -3,-1 ja 2.
 - b) kolmannen asteen polynomifunktio $P(x)$, jolla on nollakohdat -3,-1 ja 2 ja jonka arvo kohdassa 1 on -72
3. Mikä ehto vakio k tulee täyttää, jotta funktion $f(x) = x^2 + kx + k$ kaikki arvot olisivat positiivisia?
4. Määritä funktion $\frac{9x^2-1}{12x-4}$ raja-arvo kohdassa $\frac{1}{3}$.
5. Millä vakion a arvoilla funktiolla $\frac{2x^2+5x-3}{x-a}$ on raja-arvo kohdassa a ? Mikä raja-arvo tällöin olisi?
6. Millä x :n arvoilla on määritelty lauseke $f(x) = \frac{x}{x-1} + \lg(2-x) + \sqrt{5x+3-2x^2}$?
7. Osoita, että $2 \log_2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \log_2(2 - \sqrt{3}) + 2$.
8. Määritä $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$, kun $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
9. Määritä funktion $1 + 3 \sin 2\alpha$ suurin arvo, pienin arvo ja arvojoukko.
10. Yhdenmuotoisten säilyketölkkiä korkeuden ovat 7,8 cm ja 11,7 cm. Kuinka monta prosenttia vähemmän peltiä tarvitaan pienempään tölkkiin?
11. Puoliympyrän sisään on piirretty neliö, jonka yksi sivu on puoliympyrän halkaisijalla ja kaksi kärkeä kehällä. Laske neliön pinta-alan suhde puoliympyrän pinta-alaan.
12. Tasasivuisen kolmion sivujen pituus on 5a. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.
13. Neljän r -säteisen ympyrän keskipisteet ovat $2r$ -sivuisen neliön kärjissä, ja R -säteinen ympyrä sivuaa kaikkia neljää ympyrää ($R > r$). Laske ensin mainittujen ympyröiden väliin jäävän alueen alan suhde R -säteisen ympyrän ala.
14. Puolipallo sivuaa suoran ympyräkartion vaippaa, ja puolipallon pohjaympyrä on kartion pohjalla. Kartion korkeus on yhtä suuri kuin puolipallon halkaisija d . Laske kartion pohjan halkaisijan pituus.
15. Ympyrä liikkuu koordinaatistossa kokoaan muuttaen niin, että se koko ajan kulkee pisteen $(0,1)$ kautta ja sivuaa x -akselia. Tutki, minkä käyrän ympyrän keskipiste piirtää?
16. Onko piste $C = (-9, -21, 26)$ pisteiden $A = (3, 3, 2)$ ja $B = (4, 5, 0)$ kautta kulkevalla suoralla?
17. Vektorin $\vec{OP} = (2\vec{i} + \vec{j}) + (t(-\vec{i} + 3\vec{j}))$ alkupiste on origossa. Millä t :n arvolla vektorin loppupiste P on pisteiden $A(-2, 2)$ ja $B(4, 4)$ kautta kulkevalla suoralla?
18. Osoita että funktiolla $f(x) = e^{-3x+1} - 2$ on käänteisfunktio. Määritä käänteisfunktion määrittelyjoukko ja lauseke.
19. Millä vakion p arvoilla polynomi $2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$ on koko \mathbb{R} :ssä aidosti kasvava?
20. Pallon sisään on mahdutettu tilavuudeltaan mahdollisimman suuri neliöpohjainen suorakulmainen särmiö. Pallon säde on 1. Mitkä särmiön mitat ovat?
21. Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, x -akselin sekä suorien $x = 3$ ja $y = 9$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri.
22. Ensimmäisen pallon sisään piirretään kuutio, kuution sisään toinen pallo ja taas pallon sisään kuutio ja kuution sisään kolmas pallo jne. Kuinka mones pallo n ensimmäinen, jonka tilavuus on vähemmän kuin miljardiosa ensimmäisen pallon tilavuudesta?
23. Kunnanvaltuustossa on 15 naista ja 10 miestä. Valtuustosta valitaan arvalla seitsemänjäseninen toimikunta. Millä todennäköisyydellä toimikuntaan tulee a) pelkkiä naisia b) neljä naista ja kolme miestä?
24. Määritä sellainen vakion a arvo, että funktio $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a, & \text{kun } x < 1 \\ x^2 - x - 2, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$ on kaikkialla jatkuva. Ratkaise edelleen näin saadun jatkuvan funktion nollakohdat.

25. Jonon (a_n) termit ovat muotoa $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Osoita, että kaikille termeille pätee $a_n < 2$ ja $a_{n+1} > a_n$. Määritä raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
26. Laske määrätyn integraalin $\int_3^4 \ln(\pi x) dx$ likiarvo puolisuunnikassäännöllä ja jakamalla integroimisväli neljään yhtä suureen osaväliin. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.
27. Ratkaise Newtonin menetelmällä funktion $f(x) = x^4 + x - 1$ välillä $[0, 1]$ oleva nollakohta 9 desimaalin tarkkuudella.
28. Ratkaise iteroimalla funktion $f(x) = x^4 + x - 1$ välillä $[0, 1]$ oleva nollakohta 9 desimaalin tarkkuudella.
29. Osoita, että luku $(n+1)^2 (n+2)^3 (3n^2 + 9n)$ on jaollinen luvulla kahdeksan kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .
30. Normaalisti 52 kortin pakasta on poimittu seuraavat kortit pois:
Hertta 10, hertta 9 sekä pata 9 ja pata 8. Nämä neljä korttia sekoitetaan hyvin ja asetetaan satunnaiseen järjestykseen kuvapuoli alaspäin pöydälle.
Näistä korteista valitaan umpimähkään kaksi.
Satunnaismuuttuja X ilmoittaa valittujen korttien arvon summan.
- a) Esitä pylvädiagrammina tämän satunnaismuuttujan jakauma.
b) Määritä satunnaismuuttujan X keskihajonta.
31. a) Määritä viereisen polynomifunktion kuvaajan perusteella

- 1) funktion derivaatan nollakohdat
2) graafisesti derivaatan arvo kohdassa $x = -3$.
- b) Määritä funktion $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ määrittelyjoukko.
- c) Ratkaise yhtälö $2^{2x} = \frac{4}{4^x}$.

