

Mab8 Koe 20.11.2012 Kuopion Lyseon lukio KK

Ratkaise max kuusi tehtävää. 1 nro/tehtävä.

- Ratkaise yhtälö (asteina) $2 \cos \alpha = 0,5$
 - Ratkaise yhtälö (radiaaneina) $2 \sin x = -0,5$
 - Ratkaise yhtälö (radiaaneina) $\cos 2x = 0,5$
- Suunnikkaan kolme kärkipistettä ovat $(1,1)$, $(4,3)$ ja $(-1,2)$. Määritä missä kaikissa pisteissä neljäs kärkipiste voisi olla. Käytä hyväksesi pisteiden avulla saatavia sivuvektoreita.
- Lammen pinnalla olevan ongenkohon etäisyys lammen pohjasta vaihtelee funktion $h(t) = 0.02 \cos(\pi \cdot t) + 1,25$ mukaisesti, kun t on onkimiseen kulunut aika minuutteina ja $h(t)$ on etäisyys metreinä. Määritä mikä on kohon pienin ja suurin etäisyys lammen pohjasta ja kuinka nopeasti kohon etäisyys muuttuu pienimmästä suurimpaan.
- Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = \vec{i} + 8\vec{j}$ virittävät kolmion. Määritä kolmion pinta-ala.
- Lentokentältä nouseva lentokone nousee pisteestä $(0,0,0)$ alkaen vektorin $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ suuntaisesti. Millä korkeudella lentokone on ylittäessään pisteitä $A(10,0,0)$ ja $B(0,40,0)$ yhdistävän xy -tasossa kulkevan tien? Yksi pituusyksikkö vastaa 100 m.
- Ratkaise yhtälö $4 \tan(2\alpha + 30^\circ) = -5$ asteina, kun $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.
- Ratkaise yhtälö $2 \sin^2 2x - 1 = 0$. Anna vastaus radiaaneina tarkkana arvona.
- Kolmion kantasivun pituus on 3,5 cm ja kantakulmat ovat 23° ja 36° . Laske kolmion pinta-ala.

Mab8 Koe ratkaisut 20.11.2012 Kuopion Lyseon lukio KK

1. a) Ratkaise yhtälö (asteina) $2 \cos \alpha = 0,5$

Ratkaisu:

$$2 \cos \alpha = 0,5 \mid :2$$

$$\cos \alpha = 0,25$$

$$\alpha = \pm 75,522\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx \pm 75,5^\circ + n \cdot 360^\circ \quad n \text{ on kokonaisluku}$$

$$\text{Vastaus: } \alpha \approx \pm 75,5^\circ + n \cdot 360^\circ \quad n \text{ on kokonaisluku}$$

- b) Ratkaise yhtälö (radiaaneina) $2 \sin x = -0,5$

Ratkaisu:

$$2 \sin x = -0,5 \mid :2$$

$$\sin x = -0,25$$

$$x = -0,2526\dots + n \cdot 2\pi \vee x = \pi - (-0,2526\dots) + n \cdot 2\pi$$

$$x \approx -0,25 + n \cdot 2\pi \vee x = 3,39 + n \cdot 2\pi \quad n \text{ on kokonaisluku}$$

$$\text{Vastaus: } x \approx -0,25 + n \cdot 2\pi \vee x = 3,39 + n \cdot 2\pi \quad n \text{ on kokonaisluku}$$

- c) Ratkaise yhtälö (radiaaneina) $\cos 2x = 0,5$

Ratkaisu:

$$\cos 2x = 0,5$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \mid :2$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad n \text{ on kokonaisluku}$$

$$\text{Vastaus: } x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad n \text{ on kokonaisluku}$$

2. Suunnikkaan kolme kärkipistettä ovat $(1,1)$, $(4,3)$ ja $(-1,2)$. Määritä missä kaikissa pisteissä neljäs kärkipiste voisi olla. Käytä hyväksesi pisteiden avulla saatavia sivuvektoreita.

Ratkaisu:

Merkitään kärkipisteitä $A(1,1)$, $B(4,3)$ ja $C(-1,2)$

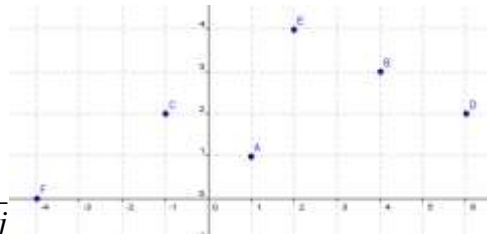
Mahdollisia nurkkapisteitä ovat E , D ja F , jotka

saadaan pisteiden välisistä vektoreista:

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{CB} = \vec{i} + \vec{j} + (4 - (-1))\vec{i} + (3 - 2)\vec{j} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overline{OE} = \overline{OC} + \overline{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} + (4 - 1)\vec{i} + (3 - 1)\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\overline{OF} = \overline{OA} + \overline{BC} = \vec{i} + \vec{j} + (-1 - 4)\vec{i} + (2 - 3)\vec{j} = -4\vec{i}$$



Mab8 Koe ratkaisut 20.11.2012 Kuopion Lyseon lukio KK

Vastaus: Neljäs piste voi olla pisteissä $(6, 2)$, $(2, 4)$ tai $(-4, 0)$

3. Lammen pinnalla olevan ongenkohon etäisyys lammen pohjasta vaihtelee funktion

$h(t) = 0,02 \cos(\pi \cdot t) + 1,25$ mukaisesti, kun t on onkimiseen kulunut aika minuutteina ja $h(t)$ on etäisyys metreinä. Määritä mikä on kohon pienin ja suurin etäisyys lammen pohjasta ja kuinka nopeasti kohon etäisyys muuttuu pienimmästä suurimpaan.

Ratkaisu:

Funktion $h(t)$ suurin ja pienin arvo voidaan selvittää tarkastelemalla funktiota osissa.

$$-1 \leq \cos(\pi t) \leq 1$$

$$-0,02 \leq 0,02 \cos(\pi t) \leq 0,02$$

$$1,23 \leq 0,02 \cos(\pi t) + 1,25 \leq 1,27$$

Suurimman ja pienimmän arvon funktio saa kun $\cos(\pi t) = 1$ ja $\cos(\pi t) = -1$

$$\cos(\pi t) = 1$$

$$\cos(\pi t) = -1$$

$$\pi t = n \cdot 2\pi \mid : \pi$$

$$\pi t = \pi + n \cdot 2\pi \mid : \pi$$

$$t = 2n$$

$$t = 1 + 2n$$

Vastaus: Kohon etäisyys pohjasta vaihtelee välillä $[1,23; 1,27]$ ja koho saavuttaa pienimmän ja suurimman etäisyyden minuutin välein.

4. Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = \vec{i} + 8\vec{j}$ virittävät kolmion. Määritä kolmion pinta-ala.

Ratkaisu:

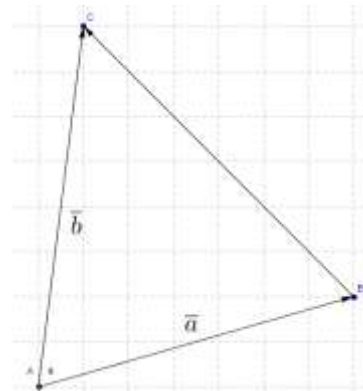
$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 8\vec{j}) = 7 + 16 = 23$$

$$\cos \alpha = \frac{23}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = 66,929...^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{53} \cdot \sqrt{65} \cdot \sin 66,929...^\circ = 27$$

Vastaus: Kolmion pinta-ala on 27 (pinta-alayksikköä).



5. Suunnistaja suunnistaa reitin vektoreiden $\vec{a} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 8\vec{j}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{d} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ mukaisesti siten, että jokaisen vektorin päätepisteessä on yksi rasti. Määritä vektori viimeiseltä rastilta maaliin, kun sekä lähtö, että maali ovat koordinaatiston pisteessä $(1,3)$. Määritä suunnistajan kulkeman matkan pituus, kun yksi yksikkö koordinaatistossa vastaa 200 metriä.

Ratkaisu:

Merkitään viimeistä vektoria $\vec{e} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Koska lähtö ja maali ovat samassa pisteessä, niin kaikkien vektoreiden summa on nollavektori:

Mab8 Koe ratkaisut 20.11.2012 Kuopion Lyseon lukio KK

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{0}$$

$$-4\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{i} - 4\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$$

$$(4+x)\vec{i} + (12+y)\vec{j} = \vec{0}$$

$$4+x=0 \text{ ja } 12+y=0$$

$$x=-4 \text{ ja } y=-12$$

Vektoreiden yhteispituus:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| + |\vec{e}| &= \sqrt{(-4)^2 + 6^2} + \sqrt{(-1)^2 + 8^2} + \sqrt{7^2 + 2^2} + \sqrt{2^2 + (-4)^2} + \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{52} + \sqrt{65} + \sqrt{53} + \sqrt{20} + \sqrt{160} = 34,699\dots \end{aligned}$$

Kuljettu matka: $34,699\dots \cdot 0,2 \text{ km} = 6,9398\dots \text{ km} \approx 6,94 \text{ km}$.

Vastaus: Viimeinen vektori on $\vec{e} = -4\vec{i} - 12\vec{j}$ ja kuljettu matka 6,94 km.

6. Ratkaise yhtälö $4 \tan(2\alpha + 30^\circ) = -5$ asteina, kun $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu:

$$4 \tan(2\alpha + 30^\circ) = -5 \quad | :4$$

$$\tan(2\alpha + 30^\circ) = -1,25$$

$$2\alpha + 30^\circ = -51,340\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$2\alpha = -81,340\dots^\circ + n \cdot 180^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = -40,6700\dots^\circ + n \cdot 90^\circ, \text{ } n \text{ on kokonaisluku}$$

$$\text{Vastaus: } \alpha = 49,3^\circ \text{ tai } \alpha = 139,3^\circ \text{ tai } \alpha = 229,3^\circ \text{ tai } \alpha = 319,3^\circ$$

7. Ratkaise yhtälö $2 \sin^2 2x - 1 = 0$. Anna vastaus radiaaneina tarkkana arvona.

Ratkaisu:

$$2 \sin^2 2x - 1 = 0$$

$$2 \sin^2 2x = 1 \quad | :2$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{tai} \quad \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad | :2 \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad | :2 \quad \text{tai} \quad 2x = \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad | :2 \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad | :2$$

$$x = \frac{\pi}{8} + n\pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{3\pi}{8} + n\pi \quad \text{tai} \quad x = \frac{5\pi}{8} + n\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{\pi}{8} + n\pi$$

$$\text{Vastaus: } x = \frac{\pi}{8} + n\pi \text{ tai } x = \frac{3\pi}{8} + n\pi \text{ tai } x = \frac{5\pi}{8} + n\pi \text{ tai } x = -\frac{\pi}{8} + n\pi, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

$$(\text{ tai } x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4}, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku})$$

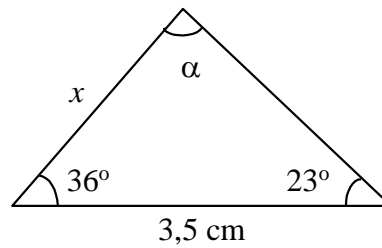
8. Kolmion kantasivun pituus on 3,5 cm ja kantakulmat ovat 23° ja 36° . Laske kolmion pinta-ala.

Ratkaisu:

$$\alpha = 180^\circ - 23^\circ - 36^\circ = 121^\circ$$

Sivun x pituus saadaan sinilauseella:

$$\frac{x}{\sin 23^\circ} = \frac{3,5}{\sin 121^\circ} \cdot \sin 23^\circ$$
$$x = \frac{3,5 \cdot \sin 23^\circ}{\sin 121^\circ} = 1,595\dots$$



Pinta-ala:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sin 36^\circ \cdot 3,5 \text{ cm} \cdot 1,595\dots \text{ cm} = 1,6411\dots \text{ cm}^2$$

Vastaus: Kolmion ala on $1,6 \text{ cm}^2$.