YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA 24.03.2006 MATEMATIIKAN KOE LYHYT OPPIMÄÄRÄ

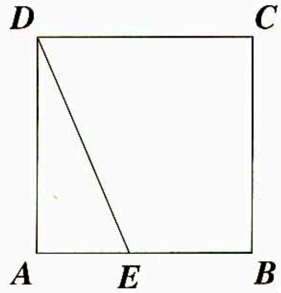
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. Ratkaise yhtälöt **a)** $20x^2 - 49x + 9 = 0$, **b)** $\frac{x}{3} + \frac{4}{6} = \frac{x}{2}$.

2. Sievennä lausekkeet

a) $\frac{x^2}{3x} + \frac{2(1-x)}{6}$, **b)** $\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}$, **c)** $\frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}$.

3. Neliön $ABCD$ sivulla AB on sellainen piste E, että $AE = 1$ ja $ED = 3$. Laske neliön **a)** sivun pituus, **b)** pinta-ala, **c)** lävistäjän pituus. Anna vastaukset tarkkoina arvoina.



4. Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6370 kilometriä.

5. Suomen viennin jakauma vuonna 2003 sekä viennin määrässä vuonna 2004 tapahtuneet muutokset käyvät ilmi seuraavasta taulukosta. (Lähde: Kaupan Keskusliitto.)

Vienti toimialoittain	Jakauma vuonna 2003 (%)	Muutos vuodesta 2003 vuoteen 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	25,4	+13,6
Kemianteollisuus	8,7	+4,4
Kone- ja metalliteollisuus	25,1	−4,4
Sähkötekninen teollisuus	24,3	+1,9
Muut	16,5	+14,6

a) Lisääntyikö vai vähenikö kokonaisvienti vuonna 2004? Kuinka monta prosenttia muutos oli? **b)** Esitä viennin prosentuaalinen jakauma vuonna 2004.

6. Autoilija ajoi 28 kilometriä pitkän tieosuuden nopeudella 80 km/h. Lopun matkasta hän ajoi moottoritietä pitkin. Millä keskinopeudella hän ajoi moottoritieosuuden, kun hän perille tultuaan totesi keskinopeuden koko 75 kilometrin ajomatkansa osalta olleen 100 km/h?

7. Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä.

KÄÄNNÄ!

8. Tehtaan on vähennettävä vesistöön joutuvia päästöjä yhteensä 20 prosenttia seuraavien neljän vuoden aikana. **a)** Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi tavoitteeksi, kun halutaan, että suhteellinen vähennys on sama kaikkina vuosina? **b)** Jos samaa vuotuista tavoitetta noudatetaan edelleen, kuinka monen vuoden kuluttua päästöt on saatu vähenemään alle puoleen alkuperäisestä määrästään?

9. Noppaa heitetään 5 kertaa. Millä todennäköisyydellä tuloksena on **a)** täsmälleen kaksi kuutosta, **b)** vähintään kaksi kuutosta?

10. Suunnikkaan $ABCD$ kärkipisteet ovat $A = (1, -2)$, $B = (6, -1)$, $C = (7, 2)$ ja $D = (2, 1)$. Laske suunnikkaan pinta-ala sekä kulmien suuruudet asteen kymmenesosan tarkkuudella.

11. Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen on 7 ja viimeinen 117. Laske jonon summa.

12. Kaava $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ on yleensä väärä. Osoita, että jos kaava pätee, niin joko $x = 0$ tai $y = 0$ (tai molemmat). Myös kaava $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ on yleensä väärä. Anna esimerkki luvuista x ja y, joille tämä kaava pätee, mutta edellinen kaava ei päde.

13. Pienien alumiinista valmistettavien suoran ympyräkartion muotoisten valaisinkupujen korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan summa on 18,6 cm. Määritä kartion pohjaympyrän säde siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä tämä tilavuus.

14. Henkilö ottaa 120 000 euron asuntolainan. Laina sovitaan hoidettavaksi tasaerä- eli annuiteettilainana puolivuosittain, ja vuotuiseksi koroksi sovitaan 3,70 %. Harkittavana on laina-ajan pituus. Laske lainan hoitomaksun eli annuiteetin suuruus, jos laina-aika on a) 22 vuotta, b) 60 vuotta. Kuinka paljon lainaa jälkimmäisessä tapauksessa olisi vielä jäljellä silloin, kun laina ensimmäisessä tapauksessa olisi tullut maksetuksi loppuun? Lainasta ei aiheudu muita kuluja.

15. Ilpo ja Antero säätivät vuorotellen alumiiniprofiilin leikkurin terää 2000 mm:n kohdalle. Hyväksyttävä profiilin pituus on 2000 mm $\pm$ 0,40 mm. Säädetyn terän leikkauskohdan oletetaan noudattavan normaalijakaumaa keskiarvona 2000 mm. Ilpon säädön keskihajonta on 0,19 mm ja Anteron 0,24 mm. Kun jokaisella säädöllä leikataan yhtä monta profiilia, niin kuinka monta prosenttia enemmän hukkakappaleita leikkuri keskimäärin tuottaa Anteron säätämänä kuin Ilpon säätämänä?

Lyhyt matematiikka 24.3.2006, ratkaisut:

1. a) $20x^2 - 49x + 9 = 0$, kun $x = \dfrac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 20 \cdot 9}}{40} = \dfrac{49 \pm 41}{40}$ eli $x = \frac{9}{4}$ tai $x = \frac{1}{5}$.

   b) Kertomalla kuudella saadaan yhtälö muotoon $2x+4 = 3x$, jonka ratkaisu on $x = 4$.

   Vastaus: **a)** Ratkaisut ovat $x = \frac{9}{4}$ ja $x = \frac{1}{5}$. **b)** Ratkaisu on $x = 4$.

2. a) $\dfrac{x^2}{3x} + \dfrac{2(1-x)}{6} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{x+1-x}{3} = \dfrac{1}{3}$.

   b) $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2-4} = \dfrac{x^2-4}{x^2-4} = 1$.

   c) $\dfrac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7} = x^{3+n+4+n-7} = x^{2n}$.

3. a) Kolmiosta ADE saadaan neliön sivun pituudelle x yhtälö $x^2 + 1 = 3^2$ eli $x^2 = 8$, jonka ratkaisu on $x = 2\sqrt{2}$.

   b) Neliön pinta-ala on $x^2 = 8$.

   c) Kolmiosta ABD saadaan neliön lävistäjän pituudelle d yhtälö $d^2 = 8 + 8$, jonka ratkaisu on $d = 4$.

   Vastaus: **a)** $2\sqrt{2}$, **b)** 8, **c)** 4.

4. Kappaleen painon lauseke on $m = \dfrac{a}{r^2}$, missä r on etäisyys maan keskipisteestä ja a verrannollisuuskerroin. Lentokoneen painosta maan pinnalla saadaan $56 = \dfrac{a}{6370^2}$, josta ratkeaa $a = 56 \cdot 6370^2$. Koneen painoksi 10 kilometrin korkeudessa saadaan siten $m_{10} = \dfrac{56 \cdot 6370^2}{(6370+10)^2} \approx 55{,}8246$.

   Vastaus: 55,8 tonnia.

5. Jos kokonaisvienti vuonna 2003 oli $100a$, oli puu- ja paperiteollisuuden vienti $25{,}4a$. Vuonna 2004 se oli $1{,}136 \cdot 25{,}4a = 28{,}854a$. Vastavasti saadaan vuoden 2004 muut vientimäärät oheiseen taulukkoon.

Toimiala	Määrä 2003	Kerroin	Määrä 2004	Jakauma 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	$25{,}4a$	1,136	$28{,}854a$	27,3
Kemianteollisuus	$8{,}7a$	1,044	$9{,}083a$	8,6
Kone- ja metalliteollisuus	$25{,}1a$	0,956	$23{,}996a$	22,7
Sähkötekninen teollisuus	$24{,}3a$	1,019	$24{,}762a$	23,4
Muut	$16{,}5a$	1,146	$18{,}909a$	17,9
Vienti yhteensä	$100a$		$105{,}604a$	100

   a) Yhteensä saadaan vuoden 2004 kokonaisvienniksi $105{,}603a$. Se on kasvanut edellisestä vuodesta 5,6 %.

   b) Käyttäen vuoden 2004 kokonaisvientiä kantalukuna saadaan viennin prosentuaalinen jakauma toimialoittain viimeiseen sarakkeeseen.

6. Moottoritien pituus on 75 km - 28 km = 47 km. Jos keskinopeus siellä oli x km/h, on $\frac{28}{80}+\frac{47}{x}=\frac{75}{100}$ eli $(\frac{75}{100}-\frac{28}{80})x=47$ eli $0{,}4x=47$, jonka ratkaisu on $x=117{,}5$.
Vastaus: 117,5 km/h.

7. Funktion $f(x)=x^3-27x+2$ derivaatta $f'(x)=3x^2-27$. $f'(x)=0$, kun $x=\pm 3$. Koska f':n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, on $f'(x)>0$, kun $x<-3$ tai $x>3$ ja $f'(x)<0$, kun $-3<x<3$.
Vastaus: Funktio $f(x)$ on kasvava, kun $x<-3$ tai $x>3$ ja vähenevä, kun $-3\leq x\leq 3$.

8. **a)** Olkoon a päästömäärä alussa ja p tavoiteltu vähennysprosentti sekä $q=1-\frac{1}{100}p$. Tällöin $q^4a=0{,}8a$, josta $q=\sqrt[4]{0{,}8}$ ja edelleen $p=100(1-\sqrt[4]{0{,}8})\approx 5{,}4258$.
b) Jos kysytty vuosimäärä on n, on oltava $(\sqrt[4]{0{,}8})^n a\leq 0{,}5a$. Ottamalla logaritmit saadaan $n\log\sqrt[4]{0{,}8}\leq\log 0{,}5$, josta $n\geq\dfrac{\log 0{,}5}{\log\sqrt[4]{0{,}8}}\approx 12{,}425$.
Vastaus: **a)** 5,4 %, **b)** 13 vuoden kuluttua.

9. **a)** Binomitodennäköisyyden kaavan mukaan täsmälleen kahden kuutosen todennäköisyys on $\binom{5}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3\approx 0{,}160751$.
b) Vastaavasti saadaan enintään yhden kuutosen todennäköisyydeksi $\binom{5}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^5+\binom{5}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^4\approx 0{,}803755$. Kysytty vähintään kahden kuutosen tapaus on tämän komplementtitapaus. Sen todennäköisyys on $1-0{,}803755=0{,}196245$.
Vastaus: **a)** 0,1608, **b)** 0,1962.

10. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\dfrac{-1+2}{6-1}=\dfrac{1}{5}$, joten suoran yhtälö on $y+2=\frac{1}{5}(x-1)$ eli $x-5y-11=0$. Pisteen D etäisyys A:n ja B:n kautta kulkevasta suorasta on $d=\dfrac{|2-5-11|}{\sqrt{1+25}}=\dfrac{14}{\sqrt{26}}$. Tämä on samalla suunnikkaan korkeusjanan DE pituus. Suunnikkaan kannan pituus $AB=\sqrt{(6-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{26}$. Suunnikkaan ala on $AB\cdot d=14$. Pisteessä A olevan kulman α suuruus saadaan kolmiosta ADE, jossa $AD=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$ ja $DE=d$. Näin ollen $\sin\alpha=\dfrac{14}{\sqrt{10}\sqrt{26}}\approx 0{,}8682431$, josta $\alpha\approx 60{,}2551°$. Tämä on samalla C:ssä olevan kulman suuruus. Muut kaksi kulmaa ovat suuruudeltaan $180^0-\alpha\approx 119{,}7449°$.
Vastaus: Pinta-ala on 14 sekä kulmat A ja C 60,3° sekä B ja D 119,7°.

11. Aritmeettisen jonon $a_1, a_2, ..., a_n$ termit ovat muotoa $a_2=a_1+d$, $a_3=a_1+2d, ..., a_n=a_1+(n-1)d$. Nyt $d=a_2-a_1=7-\frac{3}{2}=5{,}5$. Edelleen $117=a_n=\frac{3}{2}+(n-1)5{,}5$, josta saadaan, että $n=22$. Aritmeettisen jonon summa on siten $n\frac{1}{2}(a_1+a_n)=22\cdot\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+117)=1303{,}5$.
Vastaus: 1303,5.

12. $(x+y)^2 = x^2+y^2 \iff x^2+2xy+y^2 = x^2+y^2 \iff xy=0$. Viimeinen yhtälö toteutuu, jos $x=0$ tai $y=0$ (tai molemmat ovat nolla).
$(x-y)^2 = x^2-y^2 \iff x^2-2xy+y^2 = x^2-y^2 \iff 2y^2-2xy=0 \iff y(y-x)=0$. Tämä toteutuu, jos $y=0$ tai $y=x$. Näin ollen esimerkiksi lukupari $x=1$, $y=1$ toteuttaa jälkimmäisen kaavan, muttei edellistä, koska kumpikaan ei ole nolla.

13. Jos kartion korkeus on h cm ja pohjaympyrän säde r cm, on $h+2r=18{,}6$ eli $h=18{,}6-2r$. Kartion tilavuus on $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2(18{,}6-2r) = \frac{1}{3}\pi(18{,}6r^2-2r^3)$. Tilavuuden $V(r)$ derivaatta $V'(r)=\frac{1}{3}\pi(37{,}2r-6r^2)=0$, kun $r=0$ tai $37{,}2-6r=0$ eli $r=6{,}2$. Arvo $r=0$ ei tule kysymykseen. Koska $V'(r)$:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on $V'(r)>0$, kun $0<r<6{,}2$ ja $V'(r)<0$, kun $r>6{,}2$. Näin ollen $r=6{,}2$ antaa tilavuuden suurimman arvon, joka on $V(6{,}2)=\frac{1}{3}\pi 6{,}2^2(18{,}6-2\cdot 6{,}2)\approx 249{,}576$.
Vastaus: Kun säde on 6,2 cm, saadaan suurin tilavuus 249,6 cm^3.

14. Puolivuotislainan annuiteetin kaava on $A = Kq^n\dfrac{1-q}{1-q^n}$, missä $K = 120\,000$ euroa, $q = 1+\frac{1}{200}3{,}70 = 1{,}0185$ korkotekijä ja n hoitomaksujen määrä.
a) Nyt $n=44$ ja $A = 120\,000\cdot 1{,}0185^{44}\dfrac{0{,}0185}{1{,}0185^{44}-1}\approx 4010{,}044$.
b) Nyt $n=120$. Sijoittamalla se em. kaavaan arvon 44 tilalle saadaan $A\approx 2496{,}72$. Kun edellinen laina on maksettu loppuun 22 vuoden kuluttua, saadaan jälkimmäisen jäljellä oleva määrä kaavasta
$V = 120\,000\cdot 1{,}0185^{44} - 2496{,}72\dfrac{1-1{,}0185^{44}}{1-1{,}0185}\approx 101\,449{,}39$
Vastaus: Annuiteetti on **a)** 4010,04 euroa **b)** 2496,72 euroa. Edellisen loputtua on jälkimmäistä jäljellä 101 449,39 euroa.

15. Ilpon säädöllä leikkauskohta x noudattaa normaalijakaumaa $N(2000;0{,}19)$. Tällöin $z = \dfrac{x-2000}{0{,}19}$ noudattaa normitettua normaalijakaumaa $N(0,1)$. Hyväksyttävien profiilien todennäköisyys on
$P(1999{,}6<x<2000{,}4) = P(\dfrac{1999{,}6-2000}{0{,}19}<z<\dfrac{2000{,}4-2000}{0{,}19}) =$
$P(-2{,}105<z<2{,}105) = 2\Phi(2{,}105)-1 = 2\cdot 0{,}9824-1 = 0{,}9648$.
Hukkakappaleiden todennäköisyys on siten Ilpolla $1-0{,}9648 = 0{,}0352$.
Vastaavasti Anteron säädöllä leikkauskohta $x\sim N(2000;0{,}24)$ ja $z=\dfrac{x-2000}{0{,}24}\sim N(0,1)$. Hyväksyttävien profiilien todennäköisyys on
$P(1999{,}6<x<2000{,}4) = P(\dfrac{1999{,}6-2000}{0{,}24}<z<\dfrac{2000{,}4-2000}{0{,}24}) =$
$P(-1{,}667<z<1{,}667) = 2\Phi(1{,}667)-1 = 2\cdot 0{,}9522-1 = 0{,}9044$.
Hukkakappaleiden todennäköisyys on Anterolla $1-0{,}9044 = 0{,}0956$.
Anteron säädöillä hukkakappaleita tulee enemmän luvun ollessa prosenteissa
$100\cdot\dfrac{0{,}0956-0{,}0352}{0{,}0352}\approx 171{,}6$.
Vastaus: Anteron säädöillä tulee keskimäärin 172 % enemmän hukkakkappaleita.