YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA 16.3.2007 MATEMATIIKAN KOE LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $\frac{3}{4}(x-\frac{1}{12})=\frac{1}{3}(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5})$.
b) Ratkaise yhtälö $7x(3+7x)-4=0$.
c) Mikä on lausekkeen $\dfrac{a(a-1)}{x}+ax$ arvo, kun $x=a-1$?

2. **a)** Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 1 ja 3. Määritä kolmion terävien kulmien suuruudet 0,01 asteen tarkkuudella.
b) Määritä funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{7}{3}$ derivaatta.
c) Määritä geometrisen lukujonon $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$ kolmas termi.

3. Suorakulmion yksi sivu on 4,42 m ja suorakulmion pinta-ala on 32,20 m^2. Määritä suorakulmion **a)** sivujen pituudet, **b)** lävistäjän pituus.

4. Tuotteen myyntitulot kasvoivat edelliseen vuoteen verrattuna 5,0 % vuonna 2004 ja 3,0 % vuonna 2005. Vuonna 2003 tuotteen valmistuskustannukset olivat 91 % tavaran myyntituloista. Vuonna 2004 valmistuskustannukset olivat 7,1 % suuremmat kuin vuonna 2003, ja seuraavana vuonna ne nousivat edelleen 1,2 %. Kuinka monta prosenttia myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat vuonna 2005?

5. **a)** Määritä pisteiden $(1,2)$ ja $(4,3)$ kautta kulkevan suoran yhtälö muodossa $y=kx+b$. **b)** Onko piste $(120,40)$ tällä suoralla?

6. **a)** Millä x:n arvolla on $2^x=1$? **b)** Ratkaise yhtälö $2^{x^2-2}=1$.

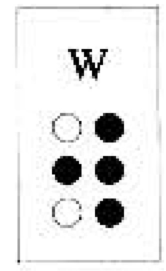
7. Lentokone lähestyy Oulunsalon kenttää kolmen asteen kulmassa maahan nähden. Kiitoradan pituus on 2,5 km, ja kone koskettaa kiitorataa 300 metrin päässä sen alkupäästä. Kuinka kaukana kiitoradan alkupäästä (vaakasuoraan ajateltuna) kone oli 500 jalan korkeudessa (1 jalka = 0,3048 m)? Kuinka kauan tästä kului maakosketukseen, jos lentokoneen lähestymisnopeus ilman suhteen oli 270 km/h? Oletetaan, että sää oli tyyni.

8. Määritä funktion $f(x)=x(3-4x-x^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1,3]$.

9. Täyttäessään 20 vuotta Laura oli 25 prosenttia vanhempi kuin sisarensa Veera. Kuinka monta prosenttia sisartaan vanhempi Laura on täyttäessään 30 vuotta?

KÄÄNNÄ!

10. Ranskalaisen Louis Braillen vuonna 1825 kehittämä pistekirjoitus on kohokirjoitusta, jota luetaan sormin. Pistekirjoitusjärjestelmässä kutakin merkkiä kohti on käytettävissä kuusi kiinteää paikkaa, joihin voidaan asettaa yhdestä kuuteen pistettä. (Esimerkkinä kuviossa on kirjain W.) Kuinka monta erilaista merkkiä järjestelmässä voidaan esittää?

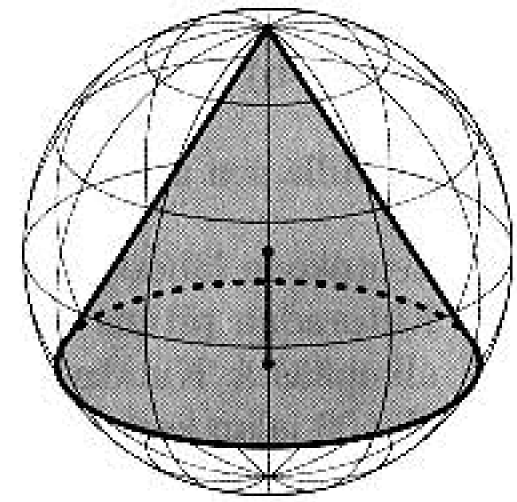


11. Verenpainelääkettä otetaan aamuisin kerta-annoksena 60 mg. Vuorokaudessa lääkettä häviää elimistöstä 35 prosenttia. **a)** Laske, paljonko lääkettä on elimistössä välittömästi toisen ja viidennen lääkkeenottokerran jälkeen. **b)** Laske, paljonko lääkettä on elimistössä välittömästi n:nnen lääkkeenottokerran jälkeen. **c)** Tutki (esimerkiksi laskinta käyttäen), mitä arvoa tämä lääkkeen määrä näyttää lähestyvän lääkkeenottokertojen määrän n kasvaessa.

12. Paraabelin $y = ax^2 + bx - 3$ huippu on pisteessä $(\frac{3}{2}, 1)$. Määritä kertoimet a ja b.

13. Polkupyörän digitaalinen mittari näyttää kuljetun matkan ja ajonopeuden, kun siihen on syötetty etupyörän ulkokehän pituus. Mittari määrittää matkan kertomalla ulkokehän pituuden etupyörän pyörähdysten lukumäärällä ja nopeuden jakamalla ulkokehän pituuden pyörähdysajalla. Anteron pyörässä renkaan ulkokehän halkaisija on 26,0 tuumaa (1 tuuma = 25,40 mm). **a)** Laske renkaan kehän pituus millimetrin tarkkuudella. **b)** Antero mittaa renkaan ulkokehän pituuden mittanauhalla ja saa pituudeksi 209,5 cm. Kun tämä virheellinen arvo syötetään mittariin, kuinka pitkäksi mittari mittaa 20,0 kilometrin matkan? Jos nopeusmittari näyttää tasan 30 km/h, mikä on polkupyörän todellinen nopeus?

14. Pallon säde on 3. Määritä pallon sisään mahtuvan tilavuudeltaan mahdollisimman suuren suoran ympyräkartion tilavuus. Ympyräkartion kärki ja pohjaympyrän kehä ovat pallon pinnalla. Valitse muuttujaksi pohjan etäisyys pallon keskipisteestä. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



15. Piensijoittaja osti yhtiön osakkeita 1 200 eurolla. Ensimmäisenä vuonna osakkeiden kurssi laski 15,6 prosenttia, mutta seuraavana vuonna se nousi 8,1 prosenttia. **a)** Kuinka monta prosenttia osakkeiden kurssin tulisi nousta kolmantena vuonna, jotta osakkeiden arvo olisi alkuperäisen suuruinen? **b)** Sijoittaja arvioi, että kurssinousu kolmantena vuonna on normaalisti jakautunut keskiarvona 7,0 prosenttia ja keskihajontana 5,0 prosenttia. Mikä on todennäköisyys, että kolmannen vuoden lopussa osakkeiden arvo on vähintään alkuperäisen suuruinen?

Lyhyt matematiikka 16.3.2007, ratkaisut:

1. a) $\frac{3}{4}(x-\frac{1}{12})=\frac{1}{3}(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}) \iff \frac{3}{4}x-\frac{1}{16}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{15} \iff \frac{1}{2}x=\frac{1}{16}-\frac{1}{15}=-\frac{1}{15\cdot 16} \iff x=-\frac{1}{120}$.

   b) Poistamalla sulut yhtälö tulee muotoon $49x^2+21x-4=0$. Tämän ratkaisu on $x=\dfrac{-21\pm\sqrt{21^2+16\cdot 49}}{98}=\dfrac{-21\pm 35}{98}$. Siis $x=\frac{1}{7}$ tai $x=-\frac{4}{7}$.

   c) Kun $x=a-1$, on lausekkeen arvo $\dfrac{a(a-1)}{a-1}+a(a-1)=a+a^2-a=a^2$.

   Vastaus: a) $x=-\frac{1}{120}$, b) $x=-\frac{4}{7}$ tai $x=\frac{1}{7}$, c) a^2.

2. a) Jos lyhyempää kateettia vastaava kulma on α, on $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, josta $\alpha\approx 18{,}4349^\circ\approx 18{,}43^\circ$. Toinen terävä kulma on $90^\circ-\alpha\approx 71{,}57^\circ$.

   b) Funktion derivaatta on $f'(x)=3\cdot\frac{1}{3}x^2+2\cdot\frac{3}{2}x-4=x^2+3x-4$.

   c) Geometrinen lukujono on muotoa $a,\ aq,\ aq^2,\ldots$. Nyt $a=\frac{2}{3}$ ja $aq=\frac{4}{9}$, joten $q=\dfrac{4/9}{2/3}=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{3}$. Siten $aq^2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{27}$.

   Vastaus: a) $18{,}43^\circ$ ja $71{,}57^\circ$, b) x^2+3x-4, c) $\frac{8}{27}$.

3. a) Jos suorakulmion toisen sivun pituus on x m, on $4{,}42\cdot x=32{,}2$, josta $x\approx 7{,}2851$.

   b) Suorakulmion lävistäjän pituus $d=\sqrt{x^2+4{,}42^2}\approx\sqrt{72{,}6086}\approx 8{,}5211$.

   Vastaus: a) 7,29 m ja 4,42 m, b) 8,52 m.

4. Jos tuotteen myyntitulot vuonna 2003 olivat a, niin vuonna 2004 ne olivat $1{,}05a$. Vuonna 2005 ne olivat $1{,}03\cdot 1{,}05a=1{,}0815a$. Valmistuskustannukset vuonna 2003 olivat $0{,}91a$, vuonna 2004 vastaavasti $1{,}071\cdot 0{,}91a$. Vuonna 2005 valmistuskustannukset olivat $1{,}012\cdot 1{,}071\cdot 0{,}91a=0{,}98630532a$. Siten myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat $100\cdot(\dfrac{1{,}0815a}{0{,}98630532a}-1)\approx 9{,}65164$ prosenttia.

   Vastaus: 9,65 %.

5. a) Suoran kulmakerroin on $\dfrac{3-2}{4-1}=\dfrac{1}{3}$. Näin ollen suoran yhtälö on $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$ eli $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

   b) Sijoitetaan pisteen x-koordinaatti yhtälöön: $y=\frac{1}{3}\cdot 120+\frac{5}{3}=40+\frac{5}{3}\neq 40$, mikä on pisteen y-koordinaatti. Näin ollen piste ei ole suoralla.

6. a) $2^x=1=2^0$, kun $x=0$.

   b) Edellisen mukaan $2^{x^2-2}=1$, kun $x^2-2=0$ eli kun $x=\pm\sqrt{2}$.

   Vastaus: a) $x=0$, b) $x=\pm\sqrt{2}$.

7. Olkoon A piste, missä lentokone koskettaa kiitorataa, B piste, jossa lentokone oli 500 jalan korkeudessa ja C pisteen B kohtisuora projektio kiitoradan tasoon. Nyt $BC = 0{,}3048 \cdot 500 = 152{,}4$ (m). Jos $AC = x$ m ja $AB = y$ m, on $\tan 3^\circ = \dfrac{152{,}4}{x}$, josta $x = \dfrac{152{,}4}{\tan 3^\circ} \approx 2907{,}965$ ja $\sin 3^\circ = \dfrac{152{,}4}{y}$, josta $y = \dfrac{152{,}4}{\sin 3^\circ} \approx 2911{,}956$. Kysytty etäisyys kiitoradan alkupäästä oli $x - 300 \approx 2607{,}965$ (m). Maakosketukseen kuluva aika oli sekunneissa $\dfrac{3{,}6y}{270} \approx 38{,}83$.

Vastaus: Etäisyys oli 2600 m ja aika 39 s.

8. Funktion $f(x) = 3x - 4x^2 - x^3$ derivaatta on $f'(x) = 3 - 8x - 3x^2$. Derivaatta häviää, kun $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{-6} = \dfrac{8 \pm 10}{-6}$ eli kun $x = -3$ tai $x = \frac{1}{3}$. Näistä vain jälkimmäinen kuuluu tarkasteluvälille [-1,3]. Koska $f(-1) = -6$, $f(3) = -54$ ja $f(\frac{1}{3}) = \frac{14}{27}$, on välillä [-1,3] funktion suurin arvo $\frac{14}{27}$ ja pienin -54.

Vastaus: Suurin arvo on $\frac{14}{27}$ ja pienin -54.

9. Jos Veeran ikä Lauran 20-vuotispäivänä on x vuotta, on $1{,}25x = 20$, josta $x = \dfrac{20}{1{,}25} = 16$. Kun Laura täyttää 30 vuotta, on Veeran ikä $16+10 = 26$ vuotta. Laura on tällöin $100(\dfrac{30}{26} - 1) \approx 15{,}38$ prosenttia Veeraa vanhempi.

Vastaus: 15,4 %.

10. Kussakin kiinteässä paikassa on kaksi mahdollisuutta, piste tai ei mitään. Koska paikkoja on kuusi, on mahdollisuuksia 2^6. Vaihtoehto, jossa kaikki ovat tyhjiä, ei kuitenkaan kelpaa, joten esitettävien merkkien määrä on $2^6 - 1 = 63$.

Vastaus: 63 erilaista merkkiä.

11. a) Jos vuorokaudessa lääkkeestä häviää 35 %, niin jäljelle jää 65 %. Lääkettä on elimistössä milligrammoina välittömästi ensimmäisen oton jälkeen 60, toisen oton jälkeen $0{,}65 \cdot 60 + 60 = 60(0{,}65 + 1) = 99$, kolmannen oton jälkeen $60(0{,}65^2 + 0{,}65 + 1)$, neljännen oton jälkeen $60(0{,}65^3 + 0{,}65^2 + 0{,}65 + 1)$ ja lopulta viidennen oton jälkeen $60(0{,}65^4 + 0{,}65^3 + 0{,}65^2 + 0{,}65 + 1) = 60 \cdot \dfrac{1 - 0{,}65^5}{1 - 0{,}65} \approx 151{,}5379$.

b) Edellisen perusteella voidaan päätellä, että välittömästi n:nnen ottokerran jälkeen lääkettä on elimistössä $60 \cdot \dfrac{1 - 0{,}65^n}{1 - 0{,}65} = \dfrac{60}{0{,}35}(1 - 0{,}65^n) = \dfrac{1200}{7}(1 - 0{,}65^n)$ (mg).

c) Mitä korkeampaan potenssiin n korottaa ykköstä pienempää suuretta 0,65, sitä pienemmäksi se tulee. Esimerkiksi $0{,}65^{10} \approx 0{,}013$, $0{,}65^{20} \approx 0{,}00018$ ja $0{,}65^{40} \approx 0{,}00000003$. Näin ollen lääkkeen määrä näyttää ottokertojen määrän n kasvaessa lähestyvän arvoa $\dfrac{1200}{7} \approx 171{,}429$ (mg).

Vastaus: **a)** Lääkettä on toisen oton jälkeen 99 mg ja viidennen jälkeen 151,5 mg, **b)** $\dfrac{1200}{7}(1 - 0{,}65^n)$ mg, **c)** 171,4 mg.

12. Paraabelin $y = ax^2 + bx - 3$ derivaatta $y' = 2ax + b$ häviää huipussa. Siis $2a\frac{3}{2} + b = 0$, josta saadaan $b = -3a$. Paraabeli kulkee pisteen $(\frac{3}{2}, 1)$ kautta, joten $a(\frac{3}{2})^2 - 3a\frac{3}{2} - 3 = 1$ eli $-\frac{9}{4}a = 4$, josta saadaan $a = -\frac{16}{9}$. Siis $b = -3 \cdot (-\frac{16}{9}) = \frac{16}{3}$.

Vastaus: $a = -\frac{16}{9}$ ja $b = \frac{16}{3}$.

13. **a)** Kehän halkaisijan pituus millimetreissä on $d = 25{,}40 \cdot 26{,}0 = 660{,}4$. Kehän pituus on $\pi d \approx 2074{,}708$ (mm) $\approx 2{,}0747$ (m).

b) Matkan pituudeksi mittari saa $\dfrac{20000}{2{,}0747} \cdot 2{,}095 \approx 20195{,}6$ (m) $\approx 20{,}196$ (km). Polkupyörän todellinen nopeus on $\dfrac{2{,}0747}{2{,}095} \cdot 30 \approx 29{,}71$ (km/h).

Vastaus: **a)** 2075 mm, **b)** Matka 20,196 km ja nopeus 29,71 km/h.

14. Leikataan pallo kartion akselin kautta kulkevalla tasolla. Olkoon O kartion akselilla oleva pallon keskipiste, A kartion pohjaympyrän keskipiste ja B pohjan ja pallon leikkauspiste tasolla. Jos pallon säde on 3 ja $OA = x$, on kartion korkeus $h = x + 3$. Kolmiosta OAB saadaan pohjaympyrän säteeksi $r = \sqrt{9 - x^2}$. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Lausuttuna x:n avulla kartion tilavuus on $V(x) = \frac{1}{3}\pi(9 - x^2)(x + 3) = \frac{1}{3}\pi(27 + 9x - 3x^2 - x^3)$. Sen derivaatta on $V'(x) = \frac{1}{3}\pi(9 - 6x - 3x^2) = \pi(3 - 2x - x^2)$. Derivaatta on nolla, kun $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = -1 \pm (-2)$ eli kun $x = -3$ tai $x = 1$. Näistä vain jälkimmäinen kelpaa pituudeksi. Koska $V'(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, on $V'(x) > 0$, kun $0 < x < 1$ ja $V'(x) < 0$, kun $1 < x < 3$. Näin ollen kartion tilavuuden suurin arvo saavutetaan arvolla $x = 1$ ja se on $V(1) = \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot 4 = \frac{32}{3}\pi \approx 33{,}5103$.

Vastaus: $\frac{32}{3}\pi \approx 33{,}51$.

15. **a)** Osakkeiden arvo oli ensimmäisen vuoden jälkeen $(1 - 0{,}156) \cdot 1200 = 0{,}844 \cdot 1200$ (euroa) ja toisen vuoden jälkeen $1{,}081 \cdot 0{,}844 \cdot 1200$ (euroa). Jos tarvittava kurssinousuprosentti on x, saadaan yhtälö $(1 + 0{,}01x) \cdot 1{,}081 \cdot 0{,}844 \cdot 1200 = 1200$, josta saadaan $1 + 0{,}01x = \dfrac{1}{1{,}081 \cdot 0{,}844}$ ja lopulta $x = 100(\dfrac{1}{1{,}081 \cdot 0{,}844} - 1) \approx 9{,}60537$.

b) Lasketaan ensin todennäköisyys sille, että osakkeiden arvo on korkeintaan alkuperäisen suuruinen eli $P(x \leq 9{,}605)$. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan muunnoksella $z = \dfrac{x - 7}{5}$, $z_0 = \dfrac{9{,}605 - 7}{5} = 0{,}521$. Tällöin saadaan taulukosta $P(x \leq 9{,}605) = P(z \leq 0{,}521) = \Phi(0{,}521) \approx 0{,}6988$. Kysytty todennäköisyys on nyt $1 - P(x \leq 9{,}605) \approx 0{,}3012$.

Vastaus: **a)** 9,6 %, **b)** 30 %.