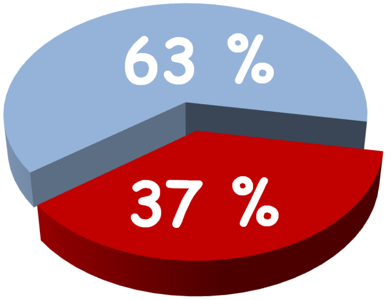
Tiesitkö tätä?

MAFY:n lääkiskurssi 2,2-kertaistaa mahdollisuutesi päästä sisään yhdellä yrityksellä. Poikkeuksellisen kovista tuloksista johtuen lääkikset alkavatkin täyttyä MAFY:n kurssilaisista.



MAFY:n asiakkaat veivät 37 % Helsingin suomenkielisen yleislääkiksen paikoista vuonna 2017.

Lääkiskurssi

- 4–8 täysimittaista harjoituspääsykoetta oikeassa koesalissa.
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa kemian ja biologian ryhmissä korkeintaan 16 oppilasta yhtä opettajaa kohden ja fysiikassa korkeintaan 11 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- Voit aloittaa valintasi mukaan 30.10., 8.1., 19.2. tai 27.3. Oppitunnin ajankohdaksi voi yleensä valita aamun, iltapäivän tai illan.
- **Helsinki – Tampere – Jyväskylä**

DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 4 täysimittaista harjoituskoetta kustakin aineesta ja pitkällä kurssilla lisäksi 2 yo-harjoituskoetta kustakin aineesta.
- Pitkä kurssi 19.2. - 25.5. ja kevätkurssi 27.3. - 25.5.
- **Helsinki – Jyväskylä**

Lyhyt matematiikka, syksy 2017

Mallivastaukset, 25.9.2017

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen, jota ennen Teemu opetti 5 vuotta lukiossa ja Antti toimi tuntiopettajana TKK:lla. Nykyään Teemu vastaa MAFY:n Jyväskylän kursseista ja Antti vastaa Mafynetti-ohjelman kehityksestä. Muut mallivastaustiimin jäsenet ovat Sakke Suomalainen, Matti Virolainen, Viljami Suominen, Olli Hirviniemi, Katja Niemistö.

1.

a) Kumpi on suurempi, $\frac{2}{3}$ vai $\frac{3}{5}$? Perustele.

b) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 4y = 12 - x \end{cases}$$

c) Ratkaise yhtälö $2^{3x+1} = 8$.

Ratkaisu.

a)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1:

Tarkastellaan murtolukujen erotusta:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{3}{5} &= {}^{5)}\frac{2}{3} - {}^{3)}\frac{3}{5} \\ &= \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} - \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} \\ &= \frac{10}{15} - \frac{9}{15} \\ &= \frac{10 - 9}{15} \\ &= \frac{1}{15} \\ &> 0. \end{aligned}$$

1p

Nyt siis

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{3}{5} > 0 \\ \underline{\underline{\frac{2}{3} > \frac{3}{5}}}. \end{aligned}$$

1p(2p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Lavennetaan murtoluvut samannimisiksi:

$$\frac{2}{3} = {}^{5)}\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15}.$$

$$\frac{3}{5} = {}^{3)}\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15}.$$ 1p

Luvun $\frac{10}{15}$ osoittaja on suurempi kuin luvun $\frac{9}{15}$ osoittaja, joten $\underline{\underline{\frac{2}{3} > \frac{3}{5}}}$. 1p(2p)

b)

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 & (1) \\ 4y = 12 - x & (2) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ratkaisuvaihtoehto 1: Sijoitusmenetelmä}}$

Ratkaistaan x yhtälöstä (1):

$$\begin{aligned} y - x + 1 &= 0 \\ x &= y + 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Sijoitetaan (3) yhtälöön (2):

$$\begin{aligned} 4y &= 12 - (y + 1) \quad \text{saatu yhden muuttujan yhtälö} \\ 4y &= 12 - y - 1 \\ 5y &= 11 \quad \| : 5 \\ y &= \frac{11}{5}. \end{aligned}$$ 1p(3p)

Sijoitetaan tämä yhtälöön (3):

$$\begin{aligned} x &= y + 1 \\ x &= \frac{11}{5} + 1 \\ x &= \frac{11}{5} + \frac{5}{5} \\ x &= \frac{11 + 5}{5} \\ x &= \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = \frac{16}{5} \text{ ja } y = \frac{11}{5}}}$. 1p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2: YHTEENLASKUMENETELMÄ

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 & \| + x \\ 4y = 12 - x & \| - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 1 = x & (4) \\ 4y - 12 = -x & (5) \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt (4) ja (5) yhteen puolittain:

$$\begin{aligned} (y+1) + (4y-12) &= x + (-x) \\ y + 1 + 4y - 12 &= 0 \quad \text{saatu yhden muuttujan yhtälö} \\ 5y - 11 &= 0 \\ 5y &= 11 \quad \| : 5 \\ y &= \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

1p(3p)

Sijoitetaan tämä yhtälöön (4):

$$\begin{aligned} y + 1 &= x \\ x &= y + 1 \\ x &= \frac{11}{5} + 1 \\ x &= \frac{11}{5} + \frac{5}{5} \\ x &= \frac{11+5}{5} \\ x &= \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = \frac{16}{5} \text{ ja } y = \frac{11}{5}}}$. 1p(4p)

c) Lisähuomautus: Huomataan, että $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.

$$\begin{aligned}
2^{3x+1} &= 8 \\
2^{3x+1} &= 2^3 \\
3x + 1 &= 3 \\
3x &= 3 - 1 \\
3x &= 2 \quad \| : 3 \\
x &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

1p(5p)

Vastaus: $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$.

1p(6p)

2. Kasvihuoneen pituus on 40 m ja sen poikkileikkaus on puoliympyrän muotoinen. Puoliympyrän säde on 5 m.

   a) Lassella ei ollut käytössään laskinta, joten hän arvioi kasvihuoneen katon, eli kaarevan osan pinta-alaa käyttämällä likiarvoa $\pi \approx 3$. Mikä on pinta-ala näin laskettuna?
   b) Palattuaan kotiin Lasse laski laskimella pinta-alaksi $630\,\mathrm{m}^2$ kymmenen neliömetrin tarkkuudella. Kuinka monta prosenttia suurempi tai pienempi tämä tulos on Lassen alkuperäiseen arvioon verrattuna?

Lähde: <http://akglandscape.in>. Luettu: 10.3.2016.

Ratkaisu.

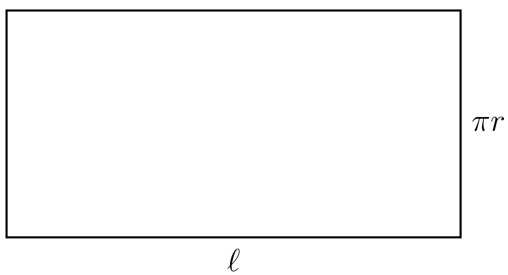
a)

$$\ell = 40\,\mathrm{m}$$
$$r = 5\,\mathrm{m}$$
$$\pi \approx 3.$$

Ympyrän kehän pituus on $2\pi r$, joten puoliympyrän kehän pituus on

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r.$$

Tasoon levitettynä katto on suorakulmio, jonka pituus on ℓ ja leveys on siis πr: 1p



Näin ollen katon pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \ell \cdot \pi r \\ &\approx 40\,\mathrm{m} \cdot 3 \cdot 5\,\mathrm{m} \\ &= 600\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

1p(2p)

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Katon pinta-ala on } 600\,\mathrm{m}^2.}}$ 1p(3p)

b)

$$\begin{aligned} A_a &= 600\,\mathrm{m}^2 \\ A_b &= 630\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Lasketaan kysytty prosenttiosuus:

$$\begin{aligned} &\frac{630 - 600}{600} \\ &= \frac{30}{600}^{(6} \\ &= \frac{5}{100} = 5\%. \end{aligned}$$

1p(4p)

1p(5p)

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Tulos on } 5\% \text{ suurempi kuin alkuperäinen arvio.}}}$ 1p(6p)

3.

a) Hannele on ratkaissut yhtälön

$$2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2,$$

mutta välivaiheet ovat menneet sekaisin.

Merkitse välivaiheet (B)–(F) alla olevaan taulukkoon niin, että ne muodostavat yhtälön loogisesti etenevän ratkaisun. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A) $2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2$

(B) $\boxed{-3x = 1}$

(C) $\boxed{x + 3 = 4(x + 1)}$

(D) $\boxed{x + 3 - 4 - x = 4x + 4 - 4 - x}$

(E) $\boxed{x + 3 = 4x + 4}$

(F) $\boxed{x^2 + x + 3 = 4(x + 1) + x^2}$

(G) $x = -\dfrac{1}{3}$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A						G

b) Myös Pauliinan laskun välivaiheet ovat menneet sekaisin, ja lisäksi mukaan on tullut yksi johonkin muuhun laskuun kuuluva välivaihe.

Tehtävänä on valita alla olevista kohdista (B)–(F) neljä ja järjestää ne niin, että niistä muodostuu yhtälön

$$20 + 4x = x^2 + 8$$

ratkaisu. Vastausta ei tarvitse perustella.

$$
\begin{array}{ll}
\text{(A)} & 20+4x=x^2+8 \\
\text{(B)} & \boxed{x^2-4x=12} \\
\text{(C)} & \boxed{x^2+4x+16=0} \\
\text{(D)} & \boxed{x-2=\pm 4} \\
\text{(E)} & \boxed{x^2-4x+4=16} \\
\text{(F)} & \boxed{(x-2)^2=4^2} \\
\text{(G)} & x=-2 \quad \text{tai} \quad x=6
\end{array}
$$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A					G

Ratkaisu.

a) Lisäselitys: Alla on kirjoitettu yhtälön ratkaisu loogisessa järjestyksessä:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(A)} & 2(x^2+x+3)=8(x+1)+2x^2 \quad \| :2 \\
\text{(F)} & \boxed{x^2+x+3=4(x+1)+x^2} \quad \| -x^2 \\
\text{(C)} & \boxed{x+3=4(x+1)} \\
\text{(E)} & \boxed{x+3=4x+4} \quad \| -4-x \\
\text{(D)} & \boxed{x+3-4-x=4x+4-4-x} \\
 & -1=3x \\
\text{(B)} & \boxed{-3x=1} \quad \| :(-3) \\
\text{(G)} & x=-\dfrac{1}{3}
\end{array}
$$

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A	F	C	E	D	B	G

3p

Osapisteitä:

Jos oikein ensimmäiset kolme, eli A, F, C, saa 1p.

Jos oikein ensimmäiset viisi, eli A, F, C, E, D, saa 2p.

b) Lisäselitys: Alla on kirjoitettu yhtälön ratkaisu loogisessa järjestyksessä:

(A) $20 + 4x = x^2 + 8$

$x^2 - 4x = 20 - 8$

(B) $\boxed{x^2 - 4x = 12} \quad \| + 4$

(E) $\boxed{x^2 - 4x + 4 = 16}$

(F) $\boxed{(x-2)^2 = 4^2}$

(D) $\boxed{x - 2 = \pm 4}$

(G) $x = -2$ tai $x = 6$

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A	B	E	F	D	G

3p(6p)

Osapisteitä:

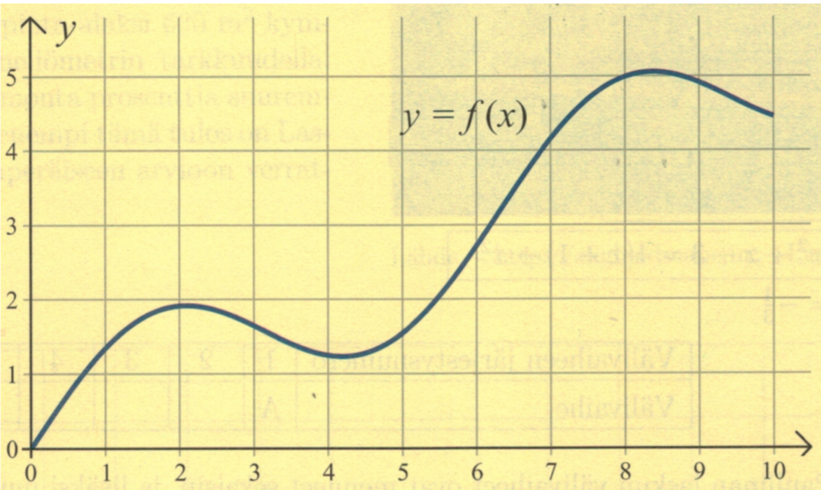
Jos oikein ensimmäiset kolme, eli A, B, E, saa 1p.

Jos oikein ensimmäiset neljä, eli A, B, E, F, saa 2p.

4. Oheisessa kuvassa on funktion $f(x)$ kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$. Arvioi kuvaajan perusteella yhden desimaalin tarkkuudella

a) missä kohdissa $f(x) = 1{,}5$
b) millä väleillä funktio $f(x)$ on vähenevä
c) mikä on funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $2 \leq x \leq 7$.

Kuvioon tehdyt merkinnät eivät riitä vastaukseksi. Vastauksia ei tarvitse perustella.

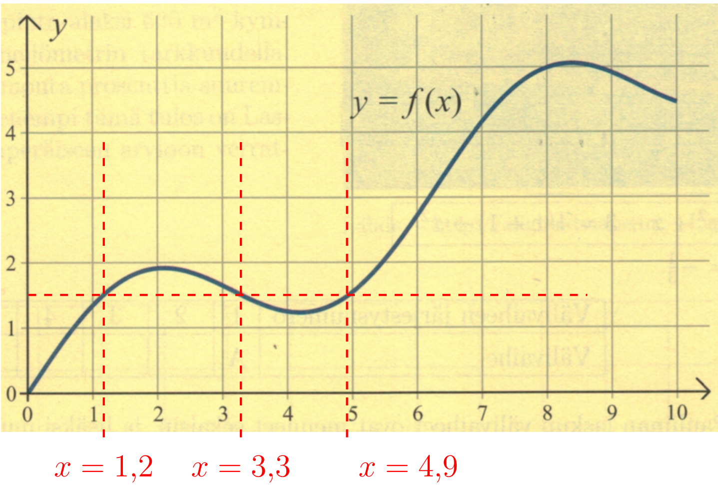


Ratkaisu.

a) Funktion arvo on 1,5 kohdissa $x = 1{,}2$; $x = 3{,}3$ ja $x = 4{,}9$. 2p

Pisteytyksestä: Yksi kohta oikein = 1p, kaikki kohdat oikein = 2p.

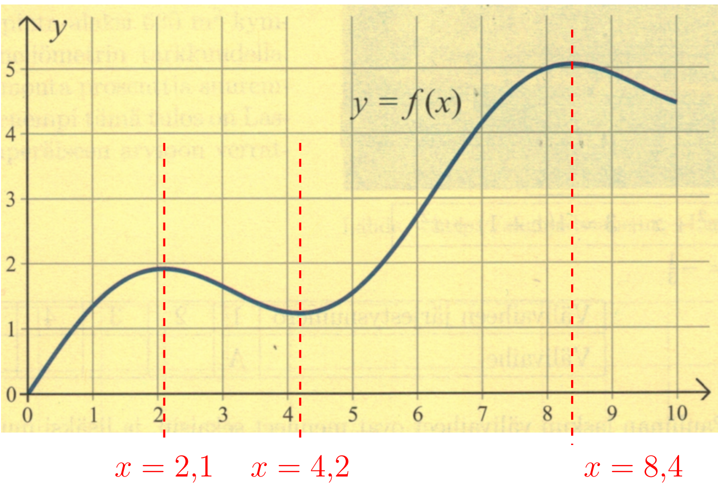
Lisäselitys: Viivaimella saadaan mitattua, että koordinaatistossa yksi ruudunväli on 10 mm. Geokolmion avulla voidaan piirtää varsin tarkasti tehtävänannon kuvaan suora $y = 1{,}5$. Kun nyt piirretään pystysuorat viivat suoran $y = 1{,}5$ ja kuvaajan $y = f(x)$ leikkauspisteista, voidaan viivaimelle mitata noin 1 mm tarkkuudella näiden kohtien x:n arvot.



b) Funktio on vähenevä väleillä $2{,}1 \leq x \leq 4{,}2$ ja $8{,}4 \leq x \leq 10$. 2p(4p)

Pisteytyksestä: Yksi väli oikein = 1p, molemmat välit oikein = 2p.

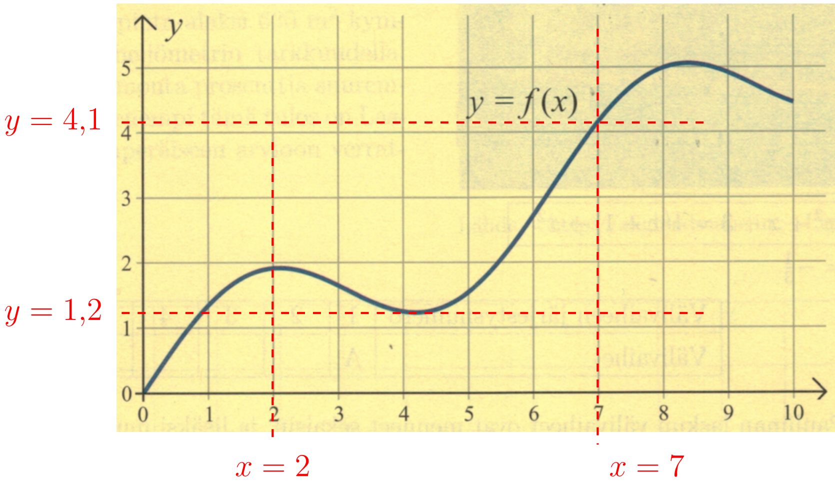
Lisäselitys: Viivaimella saadaan mitattua, että koordinaatistossa yksi ruudunväli on 10 mm. Funktio on vähenevä, kun sen arvot pienenevät x:n kasvaessa. Kun nyt piirretään pystysuorat viivat kohdista, joissa kuvaajan arvot alkavat pienentyä ja kohdista, joissa kuvaajan arvot alkavat kasvaa, voidaan viivaimelle mitata noin 1 mm tarkkuudella näiden kohtien x:n arvot.



c) Pienin arvo on $f(4{,}2) = 1{,}2$ ja suurin arvo on $f(7) = 4{,}2$. 2p(6p)

Pisteytyksestä: Toinen arvo oikein = 1p, molemmat arvot oikein = 2p.

Lisäselitys: Viivaimella saadaan mitattua, että koordinaatistossa yksi ruudunväli on 10 mm. Merkitään ensin c-kohdan tarkasteluvälin rajat, eli $x = 2$ ja $x = 7$ koordinaatistoon. Huomataan, että $f(x)$ saa pienimmän arvonsa b-kohdassa mitatussa kohdassa $x = 4{,}2$ ja suurimman arvonsa päätepisteessä $x = 7$. Kun näistä pisteistä piirretään viivaimella vaakasuorat viivat, voidaan viivaimella mittaamalla lukea näiden pisteiden y:n arvot.



Huom! Jos mittaat tarkkaan, huomaat, että $f(4{,}2)$ on lukujen 1,2 ja 1,3 välissä, mutta kuitenkin lähempänä lukua 1,2. Samoin $f(7)$ on lukujen 4,1 ja 4,2 välissä, mutta lähempänä lukua 4,2. Vastaukset pyydettiin yhden desimaalin tarkkuudella, joten $f(4{,}2) = 1{,}25$ ja $f(7) = 4{,}15$ eivät ole hyväksyttäviä vastauksia.

Huomautus alkuperäisestä tehtävänannonsta:

Alkuperäisessä tehtävänannossa yo-kokeessa oli kuvaajaan merkitty $y = f'(x)$, vaikka tehtävänannon tekstissä sanottiin, että kuvaaja on funktion $f(x)$ kuvaaja. Tämä on ristiriitaista, joten jompi kumpi on väärin. Tällaisessa tilanteessa kannattaa pohtia, kumpi merkintä on virheellinen. Esimerkiksi tämän tehtävän tapauksessa pystyi päätellä, että a-kohtaan ei pysty vastaamaan yksikäsitteisesti siinä tapauksessa, että kuvaaja olisi $y = f'(x)$, joten kannattaa arvata, että tehtävän laatija on tarkoittanut kuvaajan olevan $y = f(x)$ ja vastata sen mukaisesti. Tulkinta kannattaa myös mainita ratkaisussa.

5. Tavaratalossa jokainen kanta-asiakas saa alennuskupongin, jonka voi käyttää yhden ostoksen yhteydessä. Ostos voi sisältää useamman tuotteen. Alennus määräytyy ostoksen kokonaissumman perusteella alla olevan taulukon mukaisesti.

Ostos (€)	Alennus (€)
50,00– 99,99	5
100,00– 239,99	15
240,00– 499,99	40
500,00–	100

a) Tee taulukko alennusprosenteista, kun ostoksen kokonaissumma on 50, 100, 300 ja 600 euroa.
b) Risto ostaa vaatteita 80 eurolla ja hänen isänsä Mauri 200 eurolla. Kuinka monta prosenttiyksikköä suurempi on Maurin alennusprosentti verrattuna Riston alennusprosenttiin?
c) Mikä olisi ollut Riston ja Maurin yhteinen alennusprosentti, jos he olisivat yhdistäneet ostoksensa?

Ratkaisu.

a) Luetaan alennukset tehtävänannon taulukosta ja lasketaan alennusprosentit.

Ostos (€)	Alennusprosentti
50	$\frac{5\,€}{50\,€} = 0{,}10 = 10\,\%$
100	$\frac{15\,€}{100\,€} = 0{,}15 = 15\,\%$
300	$\frac{40\,€}{300\,€} = 0{,}1333\ldots \approx 13\,\%$
600	$\frac{100\,€}{600\,€} = 0{,}1666\ldots \approx 17\,\%$

2p

Pisteytyksestä: 2 oikein = 1p, 4 oikein = 2p.

b) Lasketaan alennusprosentit.

$$\text{Risto:} \quad \frac{5\,€}{80\,€} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$
$$\text{Mauri:} \quad \frac{15\,€}{200\,€} = 0{,}075 = 7{,}5\%.$$

1p(3p)

Alennusprosenttien erotus on

$$7{,}5\% - 6{,}25\% = 1{,}25\%.$$

Vastaus: Maurin alennusprosentti on 1,25 prosenttiyksikköä suurempi kuin Riston.

1p(4p)

c) Ostokset ovat yhteensä

$$80\,€ + 200\,€ = 280\,€,$$

joten tehtävänannon taulukon perusteella niistä saadaan alennus 40 €. 1p(5p)

Lasketaan alennusprosentti.

$$\frac{40\,€}{280\,€} = 0{,}14285\ldots = 14{,}285\ldots\% \approx 14{,}3\%.$$

Vastaus: Alennusprosentti olisi ollut 14,3%.

1p(6p)

6. Suomalaisen liigajoukkueen johto pohtii vuotuisen päätapahtumansa lippujen hinnoittelua. Aikaisempien vuosien perusteella he arvioivat, että katsojia tulee 3000, jos lipun hinta on 15 euroa. Jokaista yhden euron hinnankorotusta kohti katsojien määrä vähenee sadalla, ja vastaavasti yhden euron hinnanalennuksesta katsojamäärä kasvaa sadalla. Millä lipun hinnalla saadaan suurimmat lipputulot? Kuinka paljon lipputuloja tällöin saadaan? Anna vastaukset yhden sentin tarkkuudella.

Ratkaisu.
Päätellään lauseke lipputuloille $T(x)$ lipun hinnan x funktiona. Kutakin katsojaa kohden lipputuloja tulee yhden lipun hinnan verran, joten

$$T(x) = K(x) \cdot x,$$

missä $K(x)$ on katsojien määrä ja lipun hinta $x \geq 0$. Tehtävänannon mukaan katsojamäärä vähenee sadalla yhden euron hinnankorotusta kohti, ja vastaavasti kasvaa sadalla yhden euron hinnanalennusta kohti. Lisäselitys: Luku $x - 15$ kuvaa sitä, kuinka suuri hinnanmuutos on tehty. Tutkitaan hinnan vaikutusta katsojien määrään:

Katsojien määrä $K(x)$	Lipun hinta x	Hinnan muutos $x - 15$
$3000 - 2 \cdot 100 = 2800$	17	$+2$
$3000 - 1 \cdot 100 = 2900$	16	$+1$
3000	15	0
$3000 + 1 \cdot 100 = 3100$	14	-1
$3000 + 2 \cdot 100 = 3200$	13	-2

Huomataan, että katsojien määrä saadaan, kun alkuperäisestä 3000:sta vähennetään hinnan muutos $(x - 15)$ kertaa 100 katsojaa.

$$K(x) = 3000 - (x - 15) \cdot 100$$ 1p
$$K(x) = 3000 - 100x + 1500$$
$$K(x) = 4500 - 100x.$$

Lipputulot ovat siten

$$T(x) = (4500 - 100x)x$$ 1p(2p)
$$T(x) = -100x^2 + 4500x.$$

Vaihtoehto 1: derivaatan avulla

Funktion $T(x)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivoidaan $T(x)$.

$$T'(x) = -200x + 4500.$$ 1p(3p)

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} T'(x) &= 0 \\ -200x + 4500 &= 0 \\ 200x &= 4500 \quad \| : 200 \\ x &= \frac{4500}{200} \\ x &= 22{,}5 \quad (€). \end{aligned}$$

1p(4p)

1p(5p)

Vaihtoehto 2: ei derivointia

Funktion $T(x)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Paraabeli on symmetrinen huippukohtansa suhteen, joten sen suurin arvo löytyy nollakohtien puolivälistä, eli niiden keskiarvon kohdalta. 1p(3p)

Ratkaistaan funktion $T(x)$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 \\ -100x^2 + 4500x &= 0 \\ x(-100x + 4500) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännöllä $x = 0$ tai

$$\begin{aligned} -100x + 4500 &= 0 \\ 100x &= 4500 \quad \| : 100 \\ x &= 45. \end{aligned}$$

1p(4p)

Nollakohtien keskiarvo on

$$\frac{0 + 45}{2} = 22{,}5\,€.$$ 1p(5p)

Lasku jatkuu molemmissa vaihtoehdoissa samanlaisena:

Tuloja saadaan tällöin

$$T(22{,}5) = -100 \cdot 22{,}5^2 + 4500 \cdot 22{,}5 = 50625 \quad (€).$$

Vastaus: Suurimmat lipputulot saadaan 22,50 € hintaisella lipulla.
Tällöin lipputulot ovat 50625,00 €. 1p(6p)

7. Pienestä lukiosta valmistui 22 ylioppilasta vuonna 2007. Kymmenen vuoden kuluttua valmistumisesta kaksi heistä päättää järjestää luokkakokouksen ja valitsee itselleen sopivan päivämäärän. Oletetaan, että jokaiselle muulle luokkakaverille tämä päivä sopii kuitenkin vain 85% todennäköisyydellä.

a) Kuinka suurella todennäköisyydellä kaikki pääsevät paikalle?
b) Kuinka suurella todennäköisyydellä täsmälleen yksi ei pääse paikalle?

Ratkaisu.
Kukin luokkakavereista pääsee tai on pääsemättä paikalle toisistaan riippumatta.

a) Todennäköisyys, että yksi pääsee paikalle on $p = 0{,}85$. Kaksi järjestäjää pääsevät varmasti paikalle, joten epävarmoja ovat loput $n = 20$. 1p

Näin ollen kertolaskusäännön nojalla todennäköisyys, että kaikki pääsevät paikalle on

$$\begin{aligned} P(\text{kaikki pääsevät}) &= p^n \\ &= 0{,}85^{20} \quad \text{1p(2p)} \\ &= 0{,}038759\ldots \\ &= 3{,}8759\ldots\,\% \\ &\approx 3{,}9\%. \end{aligned}$$

Vastaus: Kaikki pääsevät paikalle 3,9%:n todennäköisyydellä. 1p(3p)

b)

RATKAISUVAIHTOEHTO 1: KERTOLASKUSÄÄNTÖ

Todennäköisyys, että yksi pääsee paikalle on $p = 0{,}85$. Kaksi järjestäjää pääsevät varmasti paikalle, joten epävarmoja ovat loput $n = 20$. Merkitään loppuja 20 ylioppilasta järjestysnumeroin $1, 2, 3, \ldots, 20$. Todennäköisyys, että numero 1 ei pääse paikalle, mutta kaikki loput pääsevät, on kertolaskusäännöllä

$$P(\text{numero 1 ei pääse ja loput pääsevät}) = (1 - p) \cdot p^{19} \quad \text{1p(4p)}$$

Vastaavasti todennäköisyys, että kuka tahansa tietty ylioppilas ei pääse paikalle ja muut pääsevät, on tämä sama. Näin ollen, koska ylioppilaita on yhteensä 20, todennäköisyys että kuka tahansa yksi ei pääse paikalle, mutta loput pääsevät, on

$$\begin{aligned}
&P(\text{kuka vain 1 ei pääse ja loput pääsevät})\\
&= P(\text{numero 1 ei pääse ja loput pääsevät})+\\
&\quad P(\text{numero 2 ei pääse ja loput pääsevät})+\\
&\quad \vdots\\
&\quad + P(\text{numero 20 ei pääse ja loput pääsevät})\\
&= 20 \cdot P(\text{numero 1 ei pääse ja loput pääsevät}) \qquad \text{1p(5p)}\\
&= 20 \cdot (1-p)p^{19}\\
&= 20 \cdot (1-0{,}85) \cdot 0{,}85^{19}\\
&= 0{,}13679\ldots\\
&= 13{,}679\ldots\%\\
&\approx 14\%.
\end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että täsmälleen yksi ei pääse paikalle, on 14% 1p(6p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2: TOISTOKOE

Toistokoetta ei käsitellä kaikissa kirjasarjoissa, mutta jos se on käsitelty tunnilla, tehtävän voi ratkaista näin.

Jos täsmälleen yksi ei pääse paikalle, suotuisia tapahtumia on $k = 19$ (paikalle pääsevät) ja kaikkiaan tapahtumia on $n = 20$. Näin ollen toistokokeen kaavalla saadaan todennäköisyys, että 19 kahdestakymmenestä pääsee paikalle:

$$\begin{aligned}
P(19) &= \binom{20}{19} 0{,}85^{19}(1-0{,}85)^{20-19} \qquad \text{2p(5p)}\\
&= 0{,}136798\ldots\\
&= 13{,}6798\ldots\%\\
&\approx 14\%.
\end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys, että täsmälleen yksi ei pääse paikalle, on 14% 1p(6p)

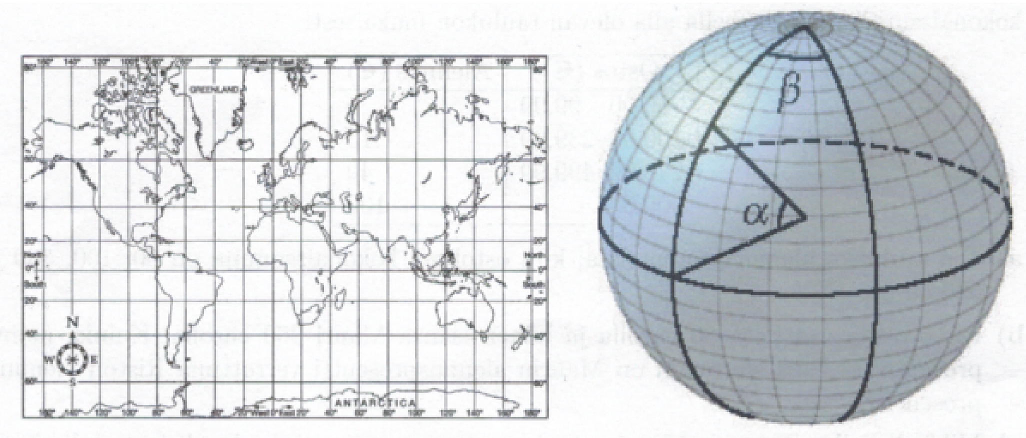
8. Monet hallinnolliset rajat seuraavat luonnollisia maaston piirteitä, kuten jokia ja vuoristoja. Sen sijaan Yhdysvalloissa Coloradon osavaltion rajat määräytyvät Maapallon leveys- ja pituusasteiden avulla seuraavista ehdoista:

$$\begin{aligned} 37^\circ\,\mathrm{N} \leq{} & \text{ leveysaste } && \leq 41^\circ\,\mathrm{N}, \\ 102^\circ\,\mathrm{W} \leq{} & \text{ pituusaste } && \leq 109^\circ\,\mathrm{W}. \end{aligned}$$

a) Laske Coloradon osavaltion länsirajan pituus.
b) Kumpi on pidempi, Coloradon osavaltion eteläraja vai pohjoisraja? Perustele.

Tässä tehtävässä Maa oletetaan palloksi, jonka säde on $R = 6371\,\mathrm{km}$.

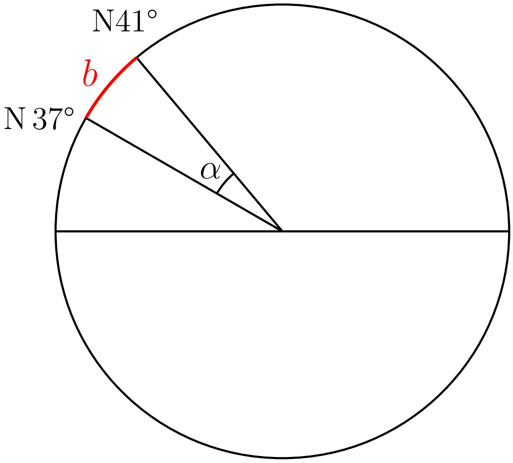
Tilanteen hahmottamisen helpottamiseksi on oikean puolen kuvaan merkitty päiväntasaajan suhteen mitattava leveysaste α ja Greenwichin meridiaanin suhteen mitattava pituusaste β.



Lähde: (vasen) <https://cnx.org>. Luettu 10.3.2016. (oikea) YTL.

Ratkaisu.

a)



Osavaltion länsirajan pituus on kaaren pituus b. Kaarta vastaava keskuskulma on

$$\alpha = 41° - 37° = 4°.$$ 1p

Lasketaan kysytty pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{4°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6371 \\ &= 444{,}77\ldots \\ &\approx 440 \quad (\,\text{km}). \end{aligned}$$ 1p(2p)

Vastaus: Länsirajan pituus on 440 km. 1p(3p)

b) Pohjoiset leveyspiirit 37° N ja 41° N ovat maapallon pikkuympyröitä ja niistä eteläisempi eli 37° N leveyspiiri on ympärysmitaltaan suurempi. 1p(4p)

Länsi- ja itärajan kautta kulkevat pituuspiirit 109° W ja 102° W erottavat näistä pikkuympyröistä keskuskulmaltaan $109° - 102° = 7°$ suuruiset ympyränkaaret, jotka ovat Coloradon etelä- ja pohjoisraja. 1p(5p)

Koska eteläisempi leveyspiiri on suurempi ympärysmitaltaan, on myös samaa keskuskulmaa 7° vastaava kaari pidempi kuin pohjoisemmalla leveyspiirillä. Siten Coloradon eteläraja on pidempi kuin pohjoisraja. 1p(6p)

9. Säätiö haluaa tukea internetturvallisuutta seitsemän vuoden aikana yhteensä 800 000 eurolla. Rahat jaetaan niin, että jaettava summa kasvaa edellisestä vuodesta aina yhtä monta prosenttia.

   a) Oletetaan, että jaettavan summan vuotuinen kasvuprosentti on 10. Mikä pitää ensimmäisenä vuonna jaettavan summan olla, jotta koko 800 000 euroa tulee seitsemässä vuodessa jaetuksi?
   b) Oletetaan, että ensimmäisenä vuonna jaetaan 70 000 euroa. Mikä pitää vuotuisen kasvuprosentin olla, jotta koko 800 000 euroa tulee seitsemässä vuodessa jaetuksi? Muodosta kysymykseen liittyvä yhtälö ja ratkaise se esimerkiksi kokeilemalla. Anna vastaus yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.

Ratkaisu.

a) Merkitään ensimmäisen vuoden summaa x:llä.

Lisäselitys: Kasvuprosentti on 10, joten prosenttikerroin, jolla kertomalla saadaan edellisen vuoden summasta seuraavan vuoden summa, on

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$$

Seuraavan vuoden summa on $1{,}1x$, 1p

sitä seuraavan vuoden summa on $1{,}1 \cdot 1{,}1x = 1{,}1^2x$ ja niin edelleen, kunnes seitsemäntenä vuonna jaettava summa on siis $1{,}1^6x$.

VAIHTOEHTO 1: SUORAAN LASKIMELLA

Kaikki lahjoitukset ovat yhteenlaskettuna

$$x + 1{,}1x + 1{,}1^2x + \ldots + 1{,}1^6x = 800000$$
$$\left(1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + 1{,}1^3 + \ldots + 1{,}1^6\right)x = 800000$$

Sijoitetaan suluissa oleva summa laskimeen

$$9{,}487171x = 800000 \quad \| : 9{,}487171$$ 1p(2p)
$$x = \frac{800000}{9{,}487171}$$
$$x = 84324{,}399\ldots$$
$$x \approx 84324{,}40 \quad (€)$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Ensimmäisenä vuonna jaettavan summan pitää olla } 84324{,}40\,€}}$ 1p(3p)

VAIHTOEHTO 2: GEOMETRISEN SUMMAN AVULLA

Kaikki lahjoitukset ovat yhteenlaskettuna

$$\begin{aligned} x + 1{,}1x + 1{,}1^2x + \ldots + 1{,}1^6x &= 800000 \\ \left(1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + 1{,}1^3 + \ldots + 1{,}1^6\right) x &= 800000 \end{aligned}$$

Suluissa oleva summa on geometrinen summa, (lisäselitys) jossa $a_1 = 1$, $q = 1{,}1$ ja $n = 7$. Geometrisen summan kaava on

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

$$\begin{aligned} \left(1 \cdot \frac{1-1{,}1^7}{1-1{,}1}\right) \cdot x &= 800000 \\ 9{,}487171x &= 800000 \quad \| : 9{,}487171 \\ x &= \frac{800000}{9{,}487171} \\ x &= 84324{,}399\ldots \\ x &\approx 84324{,}40 \quad (€) \end{aligned}$$

1p(2p)

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Ensimmäisenä vuonna jaettavan summan pitää olla } 84324{,}40\,€}}$ 1p(3p)

b) Nyt siis ensimmäisenä vuonna jaettava summa on $x = 70000\,€$. Seuraavana vuonna jaetaan qx, sitä seuraavana q^2x ja niin edelleen, kunnes seitsemäntenä vuonna jaetaan q^6x.

VAIHTOEHTO 1: ILMAN GEOMETRISTA SUMMAA:

Kaikki lahjoitukset ovat yhteenlaskettuna

$$x + qx + q^2x + \ldots q^6x = 800000$$ 1p(4p)

$$\left(1 + q + q^2 + \ldots q^6\right) x = 800000 \quad \| : x$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^6 = \frac{800000}{x}$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^6 = \frac{800000}{70000}$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^6 = \frac{80}{7}$$

$$q + q^2 + \ldots + q^6 - \frac{73}{7} = 0.$$ 1p(5p)

Kokeillaan erilaisia mahdollisia q:n arvoja. Lisäselitys: Kohdassa a jaettiin ensimmäisenä vuotena suurempi summa, ja kasvuprosentti oli 10, joten kohdassa b kasvuprosentti on jonkin verran suurempi kuin 10.

Kokeillaan $q = 1{,}15$:

$$1{,}15 + 1{,}15^2 + \ldots + 1{,}15^6 - \frac{73}{7} = -0{,}36177\ldots$$

Kokeillaan $q = 1{,}16$:

$$1{,}16 + 1{,}16^2 + \ldots + 1{,}16^6 - \frac{73}{7} = -0{,}01469\ldots$$

Kokeillaan $q = 1{,}165$:

$$1{,}165 + 1{,}165^2 + \ldots + 1{,}165^6 - \frac{73}{7} = +0{,}1629\ldots$$

Vaihtoehto 2: Geometrisen summan avulla

Kaikki lahjoitukset ovat yhteenlaskettuna

$$x + qx + q^2x + \ldots q^6x = 800000$$ 1p(4p)

$$\left(1 + q + q^2 + \ldots q^6\right) x = 800000 \quad \| : x$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^6 = \frac{800000}{x}$$

Yhtälön vasen puoli on geometrinen summa, jossa $a_1 = 1$ ja $n = 7$. Sijoitetaan $x = 70000$.

$$\begin{aligned}
\frac{1-q^7}{1-q} &= \frac{800000}{70000} \\
\frac{1-q^7}{1-q} &= \frac{80}{7} \\
\frac{1-q^7}{1-q} - \frac{80}{7} &= 0
\end{aligned}$$

1p(5p)

Kokeillaan erilaisia mahdollisia q:n arvoja. Lisäselitys: Kohdassa a jaettiin ensimmäisenä vuotena suurempi summa, ja kasvuprosentti oli 10, joten kohdassa b kasvuprosentti on jonkin verran suurempi kuin 10.

Kokeillaan $q = 1{,}15$:

$$\frac{1-1{,}15^7}{1-1{,}15} - \frac{80}{7} = -0{,}36177\ldots$$

Kokeillaan $q = 1{,}16$:

$$\frac{1-1{,}16^7}{1-1{,}16} - \frac{80}{7} = -0{,}01469\ldots$$

Kokeillaan $q = 1{,}165$:

$$\frac{1-1{,}165^7}{1-1{,}165} - \frac{80}{7} = +0{,}1629\ldots$$

LASKU JATKUU SAMALLA TAVALLA MOLEMMISSA VAIHTOEHDOISSA:

Yhtälön vasemman puolen merkki vaihtuu välillä $[1{,}16; 1{,}165]$, joten kysytyllä tarkkuudella $q = 1{,}16$.

Vastaus: Vuotuisen kasvuprosentin pitää olla 16 %.

1p(6p)

10. Katariina ostaa vaelluskäyttöön vedensuodattimen, joka poistaa 96 % suodatettavassa vedessä olevista bakteereista.

a) Katariina suodattaa veden kaksi kertaa. Kuinka monta prosenttia bakteereista saadaan tällä tavalla pois?
b) Katariinan vaelluskaveri Nikke haluaa, että bakteereista saadaan pois 99,9995%. Kuinka monta kertaa vesi pitää tällöin suodattaa?
c) Aikaa säästääkseen Katariina ajattelee ostavansa paremman suodattimen. Kuinka monta prosenttia bakteereista vedensuodattimen pitäisi poistaa yhdellä suodatuskerralla, jotta kahdella suodatuskerralla saataisiin poistettua 99,9995% bakteereista?

Ratkaisu.

Yhden suodatuskerran jälkeen bakteereja on jäljellä $100\% - 96\% = 4\%$. Kun suodatuksia on tehty n kappaletta, bakteereja on jäljellä yhteensä

$$B(n) = 0{,}04^n \cdot a,$$ 1p

missä a on bakteerien alkuperäinen määrä.

a) Suodatusten määrä on $n = 2$, joten bakteerien määrä suodatusten jälkeen on

$$B(2) = 0{,}04^2\,\mathrm{a} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{a}.$$

Lasketaan poistettujen bakteerien prosenttiosuus.

$$\frac{\cancel{a} - 1{,}6 \cdot 10^{-3}\cancel{a}}{\cancel{a}} = \frac{1 - 1{,}6 \cdot 10^{-3}}{1} = 0{,}9984 = 99{,}84\%$$

Vastaus: Bakteereista saadaan pois 99,84%. 1p(2p)

Lisäselitys: Myös pyöristys 99,8% hyväksytään.

b)

Ratkaisuvaihtoehto 1:

Muodostetaan yhtälö:

$$\begin{aligned} B(n) &= a - 0{,}999995a \\ 0{,}04^n a &= 5 \cdot 10^{-6} a \quad \| : a \\ 0{,}04^n &= 5 \cdot 10^{-6} \quad \| \lg(\quad) \\ \lg(0{,}04^n) &= \lg\left(5 \cdot 10^{-6}\right) \end{aligned}$$ 1p(3p)

Käytetään logaritmikaavaa $\lg(a^n) = n \cdot \lg(a)$.

$$\begin{aligned} n \cdot \lg(0{,}04) &= \lg\left(5 \cdot 10^{-6}\right) \quad \| : \lg(0{,}04) \\ n &= \frac{\lg\left(5 \cdot 10^{-6}\right)}{\lg(0{,}04)} \\ n &= 3{,}79\ldots \\ n &\approx 4. \end{aligned}$$

Vastaus: Vesi pitää suodattaa 4 kertaa. 1p(4p)

RATKAISUVAIHTOEHTO 2:

Muodostetaan yhtälö:

$$\begin{aligned} B(n) &= a - 0{,}999995a \\ 0{,}04^n a &= 5 \cdot 10^{-6} a \quad \| : a \\ 0{,}04^n &= 5 \cdot 10^{-6} \\ n &= \log_{0{,}04}\left(5 \cdot 10^{-6}\right) \\ n &= 3{,}79\ldots \\ n &\approx 4. \end{aligned}$$

1p(3p)

Vastaus: Vesi pitää suodattaa 4 kertaa. 1p(4p)

c) Merkitään q:llä yhden suodatuskerran jälkeen jäljelle jäävää osuutta bakteereista. Tällöin kahden suodatuksen jälkeen bakteereja on jäljellä q^2a, missä a on bakteerien alkuperäinen määrä. Täytyy siis olla

$$\begin{aligned} q^2 a &= a - 0{,}999995a \\ q^2 a &= 5 \cdot 10^{-6} a \quad \| : a \\ q^2 &= 5 \cdot 10^{-6} \\ q &= \underset{(-)}{+} \sqrt{5 \cdot 10^{-6}} \\ &= 2{,}23606\ldots \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

1p(5p)

Tällöin yhdellä kerralla pitää siis poistaa bakteereista osuus

$$\begin{aligned} 1 - q &= 1 - 2{,}23606 \cdot 10^{-3} \\ &= 0{,}99776393\ldots \\ &= 99{,}776393\ldots\,\% \\ &\approx 99{,}78\,\% \end{aligned}$$

Vastaus: Yhdellä suodatuskerralla pitäisi poistee 99,78 % bakteereista. 1p(6p)

Varminta on antaa vastaus 2–4 desimaalilla, mutta tässä saatetaan hyväksyä myös pyöristys yhden tai jopa viiden desimaalin tarkkuudella, sillä lähtöarvon 99,9995% tarkkuus voidaan tulkita usealla eri tavalla..

11.

a) Selitä omin sanoin mitä tarkoitetaan todennäköisyyslaskennassa vastatapahtumalla eli komplementtitapahtumalla. (2 p.)

b) Kuuluisassa 1970-luvulla tehdyssä psykologian koesarjassa Tversky ja Kahneman osoittivat, ettei ihmisten intuitio todennäköisyysarvioinnista ole erityisen luotettava. Eräässä näistä kokeista he esittivät koehenkilöille seuraavan kertomuksen:

> Linda on 31-vuotias, naimaton, sanavalmis ja hyvin fiksu. Hän valmistui yliopistosta pääaineenaan filosofia. Opiskelijana hän oli hyvin kiinnostunut syrjintäkysymyksistä ja sosiaalisesta oikeudenmukaisuudesta, ja hän osallistui myös ydinvoimaa vastustaviin mielenosoituksiin.

Koehenkilöitä pyydettiin tämän perusteella arvioimaan, kumpi seuraavista väitteistä on todennäköisempi:

(A) Linda on pankkivirkailija.
(B) Linda on pankkivirkailija ja hän on aktiivinen feministiliikkeessä.

Kokeessa 85% vastaajista oli sitä mieltä, että väittämä (B) on todennäköisempi. Perustele todennäköisyyslaskennan keinoin ja merkinnöin, että nämä vastaajat ovat väärässä. (4 p.)

Ratkaisu.

a) Todennäköisyyslaskennassa annetun tapahtuman A vastatapahtumalla $\overline{A}$ tarkoitetaan tapahtumaa, joka sisältää kaikki muut kuin annetun tapahtuman alkeistapaukset. Joko tapahtuma tai sen vastatapahtuma tapahtuu siis varmasti. 2p

Tässä voisi myös varmuuden vuoksi perustella, että tapahtuman ja sen vastatapahtuman todennäköisyyksien summa on yksi, joten vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A),$$

missä $P(A)$ on annetun tapahtuman todennäköisyys. Tätä ei kuitenkaan varsinaisesti kysytty tehtävänannossa, joten jos tehtävään on vastannut täsmällisesti, pitäisi saada täydet pisteet.

b)

Vaihtoehto 1: täsmällinen perustelu

Kirjataan ylös seuraavat tapahtumat:

V: ”Linda on pankkivirkailija”.
F: ”Linda on aktiivinen feministiliikkeessä”. 1p(3p)

Pankkivirkailijat voidaan jakaa kahteen ryhmään: niihin, jotka ovat aktiivisia feministiliikkeessä ja niihin, jotka eivät ole. Tällöin todennäköisyys, että Linda on pankkivirkailija, voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$P(V) = P(V \text{ ja } F) + P(V \text{ ja ei } F)$$ 1p(4p)

Nyt koska todennäköisyys $P(V \text{ ja ei } F)$, eli todennäköisyys, että Linda on pankkivirkailija ja ei ole aktiivinen feministiliikkeessä, on nollan ja ykkösen välissä, eli

$$0 \leq P(V \text{ ja ei } F) \leq 1,$$

todennäköisyys $P(V)$, eli todennäköisyys, että Linda on pankkivirkailija, on vähintään

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \text{ ja } F) + P(V \text{ ja ei } F) \\ &\geq P(V \text{ ja } F) + 0 \\ &= P(V \text{ ja } F). \end{aligned}$$ 1p(5p)

Näin ollen $P(V \text{ ja } F)$ ei voi olla suurempi kuin $P(V)$, joten vastaajat ovat väärässä. 1p(6p)

Vaihtoehto 2: hyväksyttävä perustelu

Jos tehtävänannon väite B on tosi, eli Linda on sekä pankkivirkailija että aktiivinen feministiliikkeessä, myös välttämättä A on tosi. 1p(3p)

Väite A on siis tosi vähintään silloin, kun B on tosi, mutta saattaa olla mahdollista, että Linda olisi pankkivirkailija, mutta ei aktiivinen feministiliikkeessä. Väite B ei siis välttämättä ole tosi aina, kun väite A on tosi. 1p(4p)

Tästä voidaan päätellä, että tapahtuman A suostuisten alkeistapausten joukko on vähintään yhtä suuri kuin tapahtuman B. 1p(5p)

Näin ollen väittämän A todennäköisyys $P(A)$ on vähintään yhtä suuri kuin väittämän B todennäköisyys $P(B)$, eli vastaajat ovat väärässä. 1p(6p)

Lisäselitys: Jos b-kohdan perustelee käyttämällä kaavaa

$$P(V \text{ ja } F) = P(V) \cdot P(F),$$

joutuu tekemään tarpeettoman (luultavasti väärän) oletuksen, että tapahtumat V ja F olisivat toisistaan riippumattomia. Tätä oletusta ratkaisussa ei kuitenkaan tarvitse tehdä.

12. Rahtilaiva lähtee Hangon satamasta Saksan Rostockiin. Laivan navigointijärjestelmä kertoo reitin vektorimuodossa. Laiva kulkee ensin vektorin $\bar{a} = 3{,}5\bar{i} - 3{,}5\bar{j}$ verran, sitten vektorin $\bar{b} = -5{,}0\bar{i}$ verran ja lopuksi vektorin $\bar{c} = -4{,}1\bar{j}$ verran. Yksikkönä on kilometri. Kuinka kaukana laiva on tällöin lähtöpisteestä? Anna vastaus sadan metrin tarkkuudella. Maan pinnan kaareutumista ei tarvitse tässä tehtävässä ottaa huomioon.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\bar{a} &= 3{,}5\bar{i} - 3{,}5\bar{j}\\ \bar{b} &= -5{,}0\bar{i}\\ \bar{c} &= -4{,}1\bar{j}.\end{aligned}$$

Summavektori on

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} &= 3{,}5\bar{i} - 3{,}5\bar{j} - 5{,}0\bar{i} - 4{,}1\bar{j} && \text{1p}\\ &= (3{,}5 - 5{,}0)\bar{i} - (3{,}5 + 4{,}1)\bar{j} && \text{1p(2p)}\\ &= -1{,}5\bar{i} - 7{,}6\bar{j}. && \text{1p(3p)}\end{aligned}$$

Lasketaan summavektorin pituus

$$\begin{aligned}|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| &= \sqrt{(-1{,}5)^2 + (-7{,}6)^2} && \text{2p(5p)}\\ &= 7{,}74661\ldots\\ &\approx 7{,}7 \quad (\,\text{km})\end{aligned}$$

Vastaus: Laiva on 7,7 km etäisyydellä lähtöpisteestä. 1p(6p)

13. Tarkastellaan kahden muuttujan x ja y ensimmäisen asteen yhtälöitä ja niistä muodostettuja yhtälöryhmiä.

a) Anna esimerkki yhtälöryhmästä, joka koostuu kolmesta eri yhtälöstä ja jolla on täsmälleen yksi ratkaisu.
b) Anna esimerkki yhtälöryhmästä, joka koostuu kolmesta eri yhtälöstä ja jolla ei ole yhtään ratkaisua.
c) Tulkitse a- ja b-kohdissa antamasi esimerkit graafisesti.

Ratkaisu.
Lisäselitys: Kahden muuttujan x ja y ensimmäisen asteen yhtälöt ovat muotoa

$$ax + by = c,$$

missä a, b ja c ovat jotakin reaalilukuja. Huomaa, että luku c voi olla nolla.

a)

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

1p

Perustelu c-kohdassa. Perustelusta 1p

Lisäselitys: Tämän yhtälön ainoa ratkaisu on $x = 0$ ja $y = 0$. Tähän kävisi ratkaisuksi mitkä hyvänsä kolme yhtälöä, joilla on täsmälleen yksi ratkaisu.

b)

VAIHTOEHTOINEN ESIMERKKI 1:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

1p(3p)

Perustelu c-kohdassa. Perustelusta 1p(4p)

Vaihtoehtoinen esimerkki 2:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

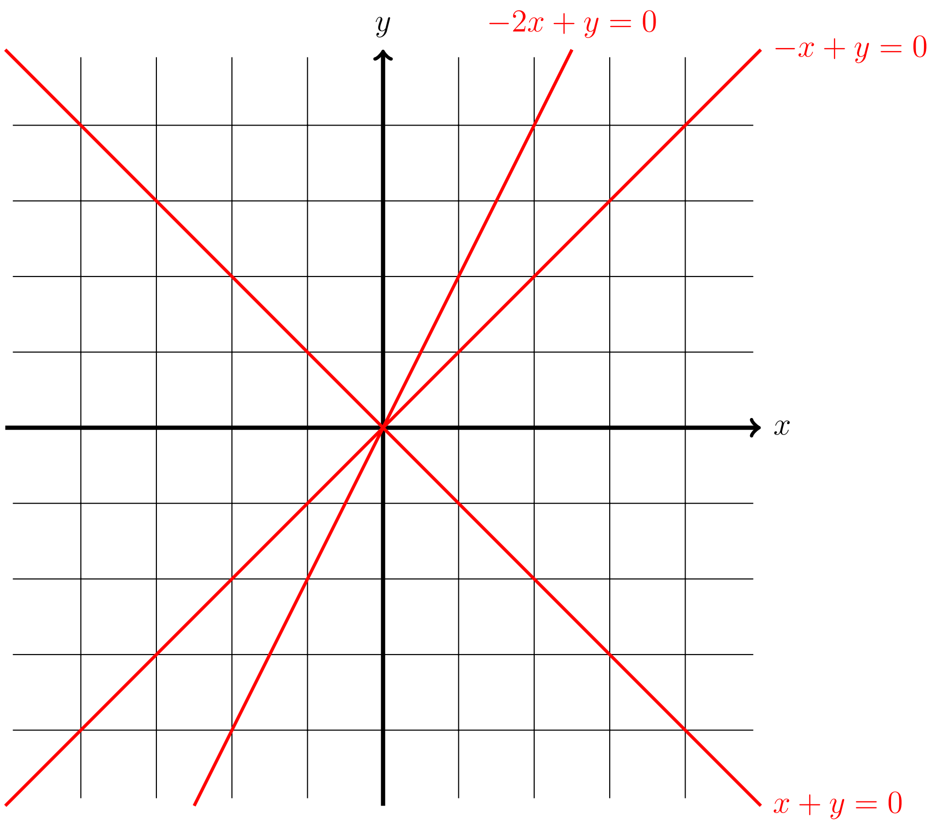
1p(3p)

Perustelu c-kohdassa.Perustelusta

1p(4p)

Lisäselitys: Tähän kävisi ratkaisuksi mitkä hyvänsä kolme yhtälöä, joilla ei ole ratkaisua.

c) Kohdassa a yhtälöt määrittävät (x, y)-tasossa kolme suoraa. Piirretään a-kohdan esimerkin suorat.



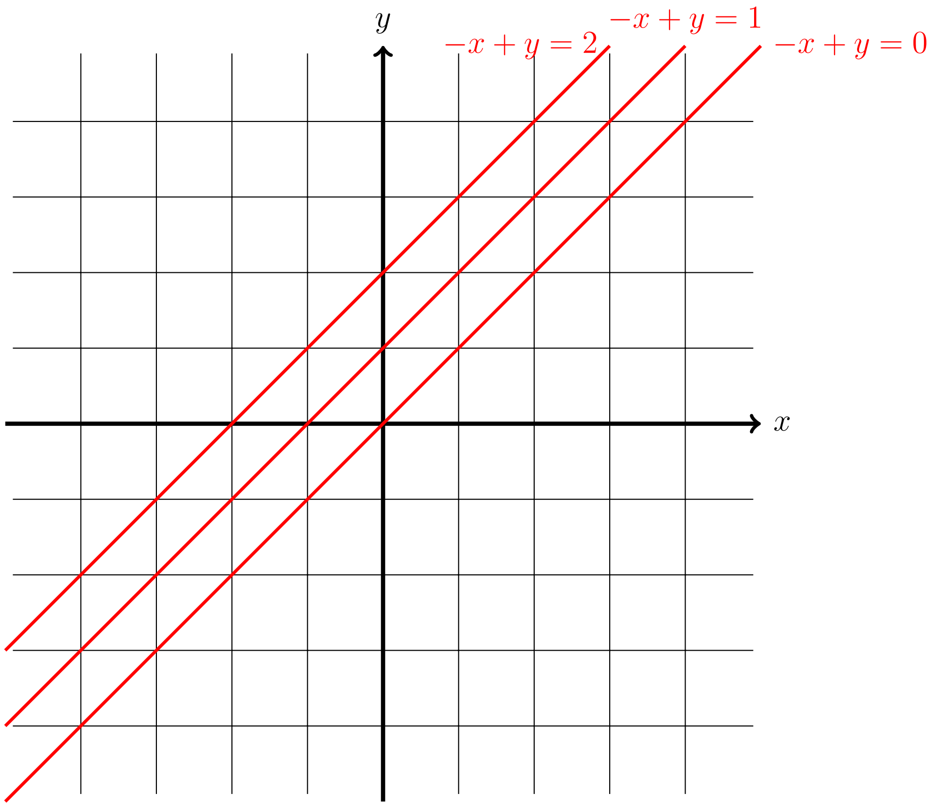
Suorat leikkaavat täsmälleen yhdessä pisteessä. Leikkauspisteen koordinaatit $x = 0$ ja $y = 0$ toteuttavat jokaisen yhtälöistä, eli ne ovat yhtälöryhmän ratkaisu. Muita leikkauspisteitä ei ole, joten ne ovat yhtälöryhmän ainoa ratkaisu. 1p(5p)

Lisähuomautus: Ratkaisun a-kohtaan pystyi keksimään seuraavasti: Kahden muuttujan x ja y ensimmäisen asteen yhtälö määrittää (x, y)-tasossa suoran, ja näistä yhtälöistä muodostuvan yhtälöryhmän ratkaisut löytyvät kyseisten suorien leikkauspisteistä. Valitaan yksi piste (tässä tapauksessa piste $(0, 0)$) ja muodostetaan kolmen sellaisen suoran yhtälöt, jotka kulkevat tämän pisteen kautta, mutta joiden kulmakertoimet ovat keskenään erisuuret, jolloin tiedetään, että ne leikkaavat vain tässä yhdessä pisteessä.

Kohdassa b yhtälöt määrittävät myös (x, y)-tasossa kolme suoraa.

VAIHTOEHTOINEN ESIMERKKI 1:

Piirretään b-kohdan esimerkin suorat.

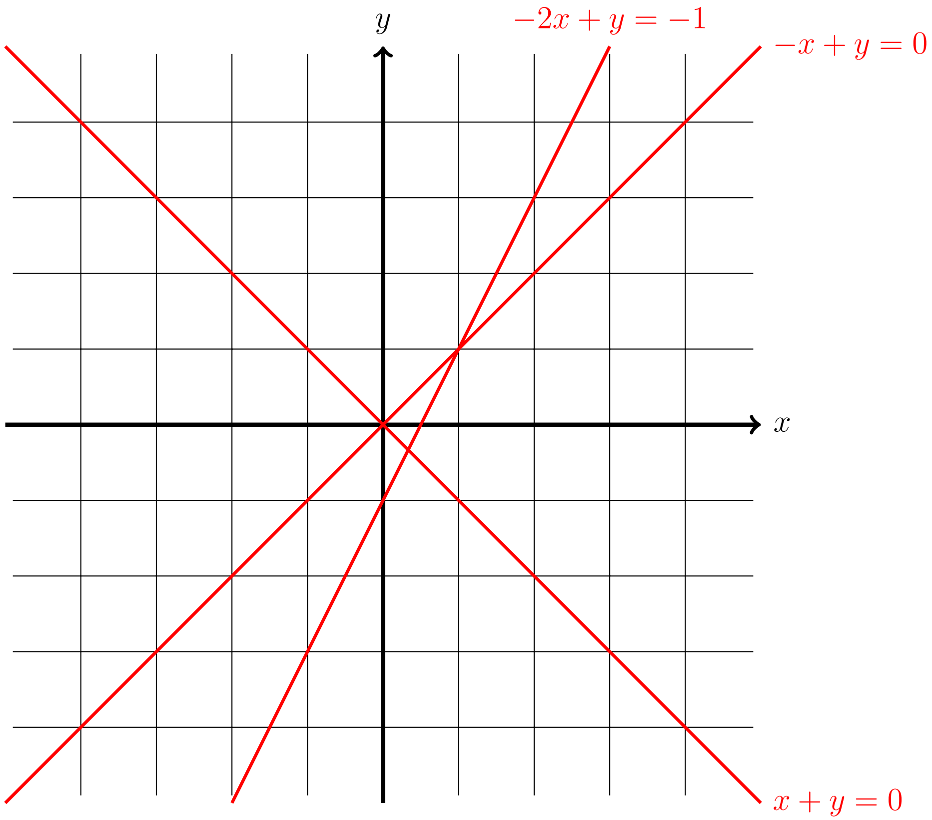


Suorat eivät leikkaa missään pisteessä, joten ei ole yhtäkään pistettä, jonka koordinaatit x ja y toteuttavat jokaisen kolmesta yhtälöstä. Näin ollen yhtälöryhmällä ei ole yhtäkään ratkaisua. 1p(6p)

Lisähuomautus: Esimerkin 1 mukaisen ratkaisun pystyi keksimään b-kohtaan seuraavasti: Kahden muuttujan x ja y ensimmäisen asteen yhtälö määrittää (x, y)-tasossa suoran, ja näistä yhtälöistä muodostuvan yhtälöryhmän ratkaisut löytyvät kyseisten suorien leikkauspisteistä. Valitaan ensin yksi suora ja muodostetaan sitten kaksi muuta suoraa, joilla on alkuperäisen kanssa sama kulmakerroin, mutta jotka leikkaavat y-akselin keskenään eri pisteissä, jolloin tiedetään, että yhtälöt kuvaavat keskenään yhdensuuntaisia suoria, joilla ei ole yhteisiä pisteitä.

Vaihtoehtoinen esimerkki 2:

Piirretään esimerkin suorat:



Ei ole yhtäkään pistettä, jossa kaikki kolme suoraa leikkaisivat, joten ei ole yhtäkään pistettä, jonka koordinaatit x ja y toteuttavat jokaisen kolmesta yhtälöstä. Näin ollen yhtälöryhmällä ei ole yhtäkään ratkaisua. 1p(6p)

Lisähuomautus: Esimerkin 2 mukaisen ratkaisun pystyi keksimään b-kohtaan seuraavasti: Kahden muuttujan x ja y ensimmäisen asteen yhtälö määrittää (x, y)-tasossa suoran, ja näistä yhtälöistä muodostuvan yhtälöryhmän ratkaisut löytyvät kyseisten suorien leikkauspisteistä. Tarkastellaan a-kohdan esimerkkiä, jolle löytyi täsmälleen yksi ratkaisu. Tämän jälkeen valitaan yksi a-kohdan yhtälöistä (suorista), ja lisätään yhtälön oikealle puolelle vakio, jolloin suora pysyy samansuuntaisena, mutta siirtyy y-akselin suunnassa, ja näin ollen ei enää kulje saman leikkauspisteen kautta, joten tiedetään, että yhtälöillä ei ole ratkaisua, koska kaikki kolme suoraa eivät enää leikkaa samassa pisteessä.