DI-pääsykoekurssi

- Voit harjoitella matematiikkaa, fysiikkaa ja kemiaa pääsykoetta varten.
- 10 täysimittaista harjoituspääsykoetta
- Arkiaamuisin **31.3.-23.5.2014** (92 oppituntia tai laaja kurssi 136 oppituntia)

Lääkiskurssi

- 5 täysimittaista harjoituspääsykoetta. Kotona voit tehdä lisää kokeita, yhteensä 18 kpl!
- Yksilöllinen opetus mahdollistaa etenemisen omassa tahdissa. Kaikissa ryhmissä on korkeintaan 15 oppilasta yhtä opettajaa kohden.
- **27.3.-23.5.2014** (153 oppituntia)

Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä.

Lyhyt matematiikka, kevät 2014

Mallivastaukset, 19.3.2014

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden.

1. a) Ratkaise yhtälö $2x^2 = x$.

b) Laske lausekkeen $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \dfrac{1}{2}$.

c) Ratkaise yhtälö $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{4}$.

Ratkaisu.

a)

$$
\begin{aligned}
2x^2 &= x \\
2x^2 - x &= 0 \qquad \text{1 p} \\
x(2x-1) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 &= 0 \\
2x &= 1 \quad \| :2 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 0 \text{ tai } x = \frac{1}{2}}}$ 1 p (2 p)

b) $\boxed{\text{TAPA 1}}$

1 p (3 p)

$$\frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$ 1 p (4 p)

$\boxed{\text{TAPA 2}}$

1 p (3 p)

$$\frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{\cancel{(a-b)}^{1}(a+b)}{\cancel{a-b}_{1}} = a + b = 1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$ 1 p (4 p)

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{3} &= \frac{x-1}{4} \\
4x &= 3x - 3 \qquad \text{1 p (5 p)} \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -3}} \qquad \text{1 p (6 p)}
\end{aligned}
$$

2. a) Missä pisteissä suora $x - 5y = 4$ leikkaa y-akselin?
   b) Ratkaise yhtälö $4x^3 = 48$. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.
   c) Ratkaise yhtälö $2 \cdot 3^x = 162$.

Ratkaisu.

a) Suora $x - 5y = 4$ leikkaa y-akselin, kun $x = 0$. Siten

$$\begin{aligned} 0 - 5y &= 4 \quad \| : (-5) \\ y &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

1 p

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Pisteessä } (0, -\tfrac{4}{5})}}$.

1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned} 4x^3 &= 48 \quad \| : 4 \\ x^3 &= 12 \quad \| \sqrt[3]{\ } \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= \sqrt[3]{12} \approx 2{,}289}} \end{aligned}$$

1 p (3 p)

1 p (4 p)

c) $\boxed{\text{Tapa 1}}$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^x &= 162 \quad \| : 2 \\ 3^x &= 81 \\ 3^x &= 3^4 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 4}} \end{aligned}$$

1 p (5 p)

1 p (6 p)

$\boxed{\text{Tapa 2}}$

$$\begin{aligned} 3^x &= 81 \quad \| \lg(\ ) \\ \lg(3^x) &= \lg 81 \\ x \cdot \lg 3 &= \lg 81 \quad \| : \lg 3 \\ x &= \frac{\lg 81}{\lg 3} \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 4}} \end{aligned}$$

1 p (5 p)

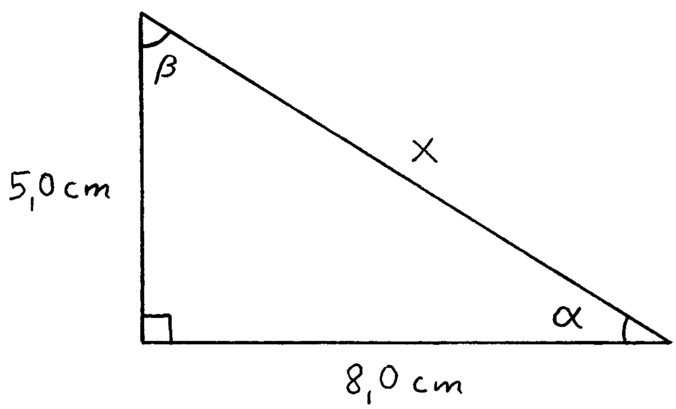
1 p (6 p)

3. a) Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 5,0 cm ja 8,0 cm. Määritä hypotenuusan pituus millimetrin tarkkuudella ja terävien kulmien suuruus asteen tarkkuudella.

b) Positiiviset luvut x ja y toteuttavat yhtälön $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2}$. Määritä lausekkeen $\frac{x}{y}$ tarkka arvo.

Ratkaisu.

a)



Hypotenuusan x pituus pythagoraan lauseella

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 5{,}0^2 + 8{,}0^2 \\
x^2 &= 89 \\
x &= (\pm)\sqrt{89} \\
x &= 9{,}43398\ldots \approx 9{,}4\,(\text{cm}) && \text{1 p}
\end{aligned}
$$

Terävät kulmat α ja β:

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{5{,}0\,\text{cm}}{8{,}0\,\text{cm}} \\
\tan\alpha &= 0{,}625 \\
\alpha &= 32{,}0053\ldots^\circ \approx 32^\circ && \text{1 p (2 p)} \\
\beta &= 180^\circ - 90^\circ - 32{,}0053\ldots^\circ \\
&= 57{,}994\ldots^\circ \approx 58^\circ
\end{aligned}
$$

Vastaus: <u>Hypotenuusa on 94 mm ja terävät kulmat 32° ja 58°.</u> 1 p (3 p)

b)

$$
\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2}, \quad \text{missä } x > 0 \text{ ja } y > 0.
$$

Määrittelyehto:

$$\begin{aligned} x - y &\neq 0 \\ x &\neq y \end{aligned}$$

Kerrotaan yhtälö ristiin:

$$\begin{aligned} 2(x+y) &= 5(x-y) && \text{1 p (4 p)} \\ 2x + 2y &= 5x - 5y \\ 7y &= 3x \\ 3x &= 7y \quad \| : 3 && \text{1 p (5 p)} \\ x &= \frac{7}{3}y \quad \| : y \\ \underline{\underline{\frac{x}{y} = \frac{7}{3}}} & && \text{1 p (6 p)} \end{aligned}$$

4. Kuution särmän pituus puolittuu. Kuinka monta prosenttia pienenee kuution
   a) tilavuus?
   b) sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala?

Ratkaisu. Kuution särmän pituus alussa on a. Särmän pituus lopussa on $\frac{a}{2}$.

a) Alkuperäinen tilavuus on
$$V_1 = a^3.$$
Tilavuus lopussa on
$$V_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{8}.$$
1 p

Tilavuus pienenee

1 p (2 p)

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{a^3 - \frac{a^3}{8}}{a^3} = \frac{(1-\frac{1}{8})\cancel{a^3}^{1}}{\cancel{a^3}_{1}} = 0{,}875 = 87{,}5\,\%.$$

Vastaus: Tilavuus pienenee 87,5 %. 1 p (3 p)

b) Alkuperäinen pinta-ala on
$$A_1 = 6a^2.$$
Pinta-ala lopussa on
$$A_2 = 6\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2.$$
1 p (4 p)

Pinta-ala pienenee

1 p (5 p)

$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{6a^2 - \frac{3}{2}a^2}{6a^2} = \frac{(6-\frac{3}{2})\cancel{a^2}^{1}}{6\cancel{a^2}_{1}} = 0{,}75 = 75\,\%.$$

Vastaus: Pinta-ala pienenee 75 %. 1 p (6 p)

5. Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %?

Ratkaisu.

	booli	kuohuviini	mehu
alkuperäinen	4,0	$0{,}7 \cdot 4{,}0 = 2{,}8$	$4{,}0 - 2{,}8 = 1{,}2$
lopullinen	$4{,}0 + x$	$2{,}8 + x$	1,2

3 p

Kuohuviiniä lisätty x (litraa), jolloin mehun osuus 20 %. Siis

1 p (4 p)

$$\frac{1{,}2}{4{,}0 + x} = 0{,}20 \quad \| \cdot (4{,}0 + x)$$

$$1{,}2 = 0{,}8 + 0{,}2x$$ 1 p (5 p)

$$0{,}2x = 0{,}4 \quad \| : 0{,}2$$

$$x = 2 \text{ (litraa)}$$

Vastaus: 2,0 litraa. 1 p (6 p)

6. Kiinalainen arvoitus 5 000 vuoden takaa: Häkissä on fasaaneja ja kaniineja. Niillä on yhteensä 35 päätä ja 94 jalkaa. Kuinka monta fasaania ja kuinka monta kaniinia häkissä on?

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Common_Pheasant_RWD2.jpg>. Luettu 12.3.2013.

<http://www.hdwallpapersarena.com/rabbit-wallpapers.html>. Luettu 12.3.2013.

Ratkaisu. Merkitään fasaanien määrää f:llä ja kanien määrää k:lla. Saadaan

3 p

$$\begin{cases} f + k = 35 & \| \cdot (-2) \\ 2f + 4k = 94 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -2f - 2k = -70 \\ 2f + 4k = 94 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2k &= 24 \quad \| : 2 \\ k &= 12 \end{aligned}$$

1 p (4 p)

Sijoitetaan yhtälöön (1):

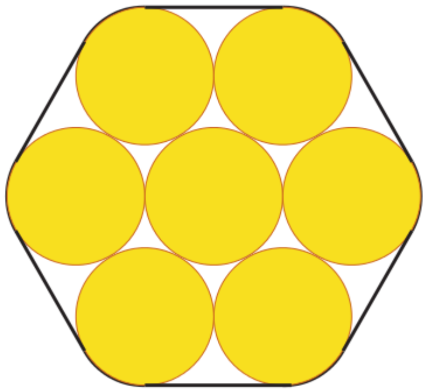
$$\begin{aligned} f + 12 &= 35 \\ f &= 23 \end{aligned}$$

1 p (5 p)

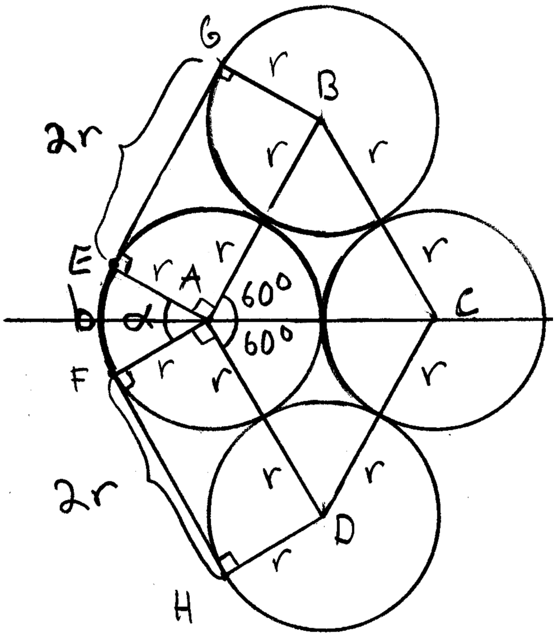
Vastaus: 23 fasaania ja 12 kaniinia.

1 p (6 p)

7. Seitsemän mäntytukkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkudella.



Piirretään kuva kohdasta, jossa vaijerin suunta muuttuu.



Kolmiot ABC ja ADC ovat tasasivuisia, joten kaikki niiden kulmat ovat 60°. Pisteessä E (ja G) vaijeri muuttuu suoraksi. Suora osuus on ympyrän tangentin suuntainen. Tällöin pisteeseen E (ja G) piirretyn säteen ja vaijerin välinen kulma on 90°. Koska

1 p

$$|AE| = |BG| = r \quad \text{ja} \quad \sphericalangle AEG = \sphericalangle BGE = 90°,$$

on

$$|EG| = |AB| = 2r.$$ 1 p (2 p)

Lasketaan kulman α suuruus.

Kaaren yhteispituus voidaan laskea myös pelkästään toteamalla, että ympyrän kaaret muodostavat täyden ympyrän.

$$\alpha = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$$

Symmetrian vuoksi sama α on viidessä muussakin ympyrässä. Vaijerin yhteispituus ympyröiden kehillä on siten

$$b_{\text{kok}} = 2\pi r \cdot \frac{6\alpha}{360^\circ} = 2\pi r \cdot \frac{6 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 2\pi r = \pi d.$$

1 p (3 p)

Vaijerin kokonaispituus on

$$\begin{aligned} l &= 6 \cdot 2r + \pi d && \text{1 p (4 p)} \\ &= 6d + \pi d \\ &= 6 \cdot 20 + \pi \cdot 20 && \text{1 p (5 p)} \\ &= 182{,}8 \\ &\approx 183\,(\text{cm}) \end{aligned}$$

Vastaus: Vaijerin pituus on 183 cm. 1 p (6 p)

8. Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa?

Ratkaisu.

Vaihe	Tilille rahaa (€)	
1	100	
2	$100 \cdot 3$	
3	$100 \cdot 3 \cdot 3 = 100 \cdot 3^2$	
4	$100 \cdot 3^2 \cdot 3 = 100 \cdot 3^3$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$100 \cdot 3^{n-1}$	1 p

Huijarin tilille vaiheittain tulevat rahamäärät muodostavat geometrisen jonon, jossa $q = 3$ ja $a_1 = 100$. Summan on oltava

1 p (2 p)

$$
\begin{aligned}
S_n &> 54{,}1 \cdot 10^9 \\
\frac{100(1-3^n)}{1-3} &> 54{,}1 \cdot 10^9 && \text{1 p (3 p)} \\
\frac{100 - 100 \cdot 3^n}{-2} &> 54{,}1 \cdot 10^9 \\
50 \cdot 3^n &> 54{,}1 \cdot 10^9 + 50 \quad \| :50 && \text{1 p (4 p)} \\
3^n &> \frac{54{,}1 \cdot 10^9}{50} + 1 \quad \| \lg(\quad) && \text{1 p (5 p)} \\
n \cdot \lg(3) &> \lg(1{,}082 \cdot 10^9 + 1) \quad \| :\lg(3) \quad (>0) \\
n &> \frac{\lg(1{,}082 \cdot 10^9 + 1)}{\lg(3)} \\
n &> 18{,}934\ldots
\end{aligned}
$$

Täten 54,1 miljardia ylittyy 19. vaiheen jälkeen.

Vastaus: 19:n vaiheen jälkeen. 1 p (6 p)

9. Sarjakuvanäyttelyn lipun hinta on 5 €, mutta lipunmyyjä on unohtanut ottaa mukaan vahtorahaa. Lippujonossa on neljä asiakasta, joista kullakin on vain yksi seteli. Kahdella on 5 €:n seteli ja kahdella muulla 10 €:n seteli. Kuinka suurella todennäköisyydellä asiakkaat ovat sellaisessa järjestyksessä, että lipunmyyjä voi antaa heti jokaiselle oikean vaihtorahan?

Ratkaisu.

Ratkaisuvaihtoehto 1

Merkitään henkilöä, jolla on 5 euron seteli V:llä ja henkilöä, jolla on 10 euron seteli K:lla. Jotta vaihtorahat löytyvät, henkilöiden järjestys jonossa täytyy olla VVKK tai VKVK. Ajatellaan, että jonon jäsenet valitaan yksi kerrallaan ensimmäisestä
2 p alkaen. Todennäköisyys sille, että 1. valittava jäsen on V on 2/4. Tämän jälkeen on jäljellä 3 henkeä, joista 1 on V, joten todennäköisyys sille, että myös seuraavaksi valitaan V on 1/3. Kaksi viimeistä jäsentä ovat nyt väistämättä tyyppiä K. Siten

$$P(\text{VVKK}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}$$ 1 p (3 p)

Vastaavasti todennäköisyys jonolle VKVK on

$$P(\text{VKVK}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$ 1 p (4 p)

Kysytty todennäköisyys on:

$$P(\text{VVKK tai VKVK}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\%$$ 2 p (6 p)

Vastaus: 33,3% todennäköisyydellä.

Ratkaisuvaihtoehto 2

Todennäköisyydet P(VVKK) ja P(VKVK) voidaan laskea myös näin:

Jono voidaan järjestää kaikkiaan 4! eri tavalla. Tapahtuman VVKK kannalta suotuisia järjestyksiä on $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, joten P(VVKK) $= 4/4! = 1/6$. Tapahtuman VKVK kannalta suotuisia järjestyksiä on $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$, joten P(VKVK) $= 4/4! = 1/6$.

Ratkaisuvaihtoehto 3

Merkitään henkilöä, jolla on 5 euron seteli V:llä ja henkilöä, jolla on 10 euron seteli K:lla. Jotta vaihtorahat löytyvät, henkilöiden järjestys jonossa täytyy olla VVKK tai VKVK. Alkeistapauksia ovat kaikki mahdolliset jonot, eli VVKK,
2 p VKVK, VKKV, KVVK, KVKV, KKVV. Kysytty todennäköisyys on $2/6 = 1/3$.

2 p (4 p) 2 p (6 p)

10. a) Millä vakion a arvolla funktion $f(x) = ax^2 - 4x + 8$ pienin arvo on 0?
b) Millä vakion b arvolla funktio $g(x) = bx^2 - 4x + 8$ saa positiivisia arvoja täsmälleen silloin, kun $-2 < x < 1$?

Ratkaisu.

a) Funktiolla

$$f(x) = ax^2 - 4x + 8$$

on olemassa pienin arvo, kun $a > 0$, jolloin f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Tällöin

1 p

$$f'(x) = 2ax - 4$$

Derivaatan nollakohta

$$\begin{aligned} 2ax - 4 &= 0 \\ 2ax &= 4 \quad \| : (2a) \\ x &= \frac{4}{2a} \\ x &= \frac{2}{a} \end{aligned}$$

1 p (2 p)

Pienin arvo on

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{a}\right) &= a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{a} + 8 \\ &= a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} + 8 \\ &= \frac{4}{a} - \frac{8}{a} + 8 \\ &= -\frac{4}{a} + 8 \end{aligned}$$

On siis oltava

$$\begin{aligned} -\frac{4}{a} + 8 &= 0 \\ 8 &= \frac{4}{a} \quad \| \cdot a \\ 8a &= 4 \quad \| : 8 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1 p (3 p)

b) Funktion $g(x) = bx^2 - 4x + 8$ kuvaajan on oltava alaspäin aukeava paraabeli, jotta $g(x) > 0$, kun $-2 < x < 1$. Siis on oltava $b < 0$. **1 p (4p)** Lisäksi g:llä on siten oltava nollakohdat $x = -2$ ja $x = 1$. **1 p (5p)** Symmetrian nojalla paraabelin huippu, eli derivaatan nollakohta, on nollakohtien $x = -2$ ja $x = 1$ puolivälissä, eli kohdassa

$$x = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Derivaatta

$$g'(x) = 2bx - 4.$$

Täten on oltava

$$\begin{aligned} g'\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ 2b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 &= 0 \\ -b &= 4 \\ \underline{\underline{b}} &\underline{\underline{= -4}} \end{aligned}$$

1 p (6 p)

11. Eräs menetelmä luvun $\sqrt[3]{a}$ likiarvojen laskemiseksi perustuu kaavaan

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{(x_n)^2}\right),$$

kun $n = 1, 2, \ldots$ ja $x_1 = 1$. Tarkastellaan kyseistä jonoa $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, kun $a = 9$. Millä indeksin n arvolla näin lasketut likiarvot toteuttavat ensimmäisen kerran seuraavan ehdon: lukujen x_n ja x_{n+1} seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat?

Ratkaisu. Lasketaan likiarvot kaavasta eri indekseille.

2 p

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= \frac{1}{3}\left(2 \cdot 1 + \frac{9}{1^2}\right) = \frac{11}{3} = 3{,}666666666\ldots && \text{1 p (3 p)} \\
x_3 &= 2{,}66758494\ldots \\
x_4 &= 2{,}19997456\ldots \\
x_5 &= 2{,}08649875\ldots \\
x_6 &= 2{,}08010352\ldots \\
x_7 &= 2{,}08008382\ldots \\
x_8 &= 2{,}08008382\ldots && \text{2 p (5 p)}
\end{aligned}$$

Vastaus: Ehto toteutuu arvolla $n = 7$. 1 p (6 p)

12. Tarkastellaan vahingollista tapahtumaa, jonka tilastollinen todennäköisyys on $0 < p \leq 1$. Sen turvallisuusluku T määritellään kaavalla $T = -\lg p$.

   a) Alkoholinkäytöstä johtuvan kuoleman turvallisuusluku on 3,8 ja tapaturmaisen kuoleman turvallisuusluku 3,4. Kumman kolinsyyn todennäköisyys on suurempi?

   b) Tieliikenteessä loukkaantumisen turvallisuusluku on 3,2. Kuinka monta suomalaista keskimäärin loukkaantuu vuosittain tieliikenteesä? Suomen väkiluku on noin 5,4 miljoonaa. Anna vastaus 100 henkilön tarkkuudella.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 0 < p &\leq 1 \\ T &= -\lg(p) \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} T &= -\lg(p) \quad \| \cdot (-1) \\ \lg(p) &= -T \\ p &= 10^{-T} \qquad \text{1 p} \end{aligned}$$

Kun $T = 3{,}8$,

$$p = 10^{-3{,}8} = 1{,}5848\ldots \cdot 10^{-4}. \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Kun $T = 3{,}4$,

$$p = 10^{-3{,}4} = 3{,}9810\ldots \cdot 10^{-4}.$$

Vastaus: Tapaturmaisen kuoleman todennäköisyys on suurempi. 1 p (3 p)

b) Lasketaan liikenteessä loukkaantumisen todennäköisyys, kun

$$\begin{aligned} T &= 3{,}2 \\ p &= 10^{-3{,}2} = 6{,}3095\ldots \cdot 10^{-4}. \qquad \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$

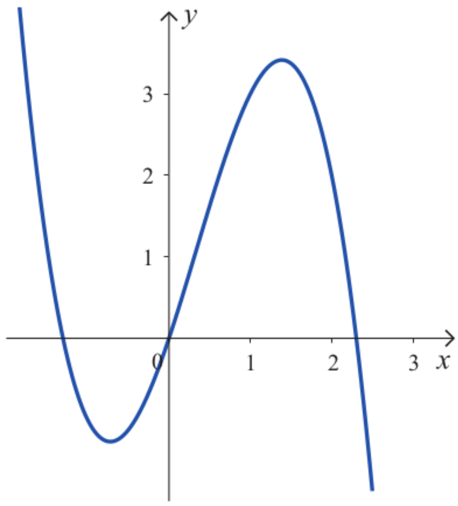
Liikenteessä loukkaantuvien lukumäärä on

$$\begin{aligned} N &= p \cdot 5{,}4 \cdot 10^6 \qquad \text{1 p (5 p)} \\ &= 6{,}3095\ldots \cdot 10^{-4} \cdot 5{,}4 \cdot 10^6 \\ &= 3407{,}1\ldots \\ &\approx 3400 \end{aligned}$$

Vastaus: Vuosittain loukkaantuu 3400 ihmistä. 1 p (6 p)

13. a) Mihin käyrän $y = -x^3 + x^2 + 3x$ pisteeseen asetetun tangentin kulmakerroin on suurin mahdollinen?

b) Määritä a-kohdan tangentin yhtälö.



Ratkaisu.

a)

$$y = -x^3 + x^2 + 3x$$

Tangentin kulmakertoimen arvo kohdassa $x = x_0$ saadaan derivaatan arvosta $y'(x_0)$.
Derivoidaan y.

$$y'(x) = -3x^2 + 2x + 3$$

Merkitään

$$k(x) = y'(x)$$
$$k(x) = -3x^2 + 2x + 3.$$

Etsitään $k(x)$:n suurin arvo derivaatan avulla. $y = k(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen suurin arvo on derivaatan nollakohdassa.

$$k'(x) = -6x + 2 \qquad \text{1 p}$$
$$k'(x) = 0$$
$$-6x + 2 = 0$$
$$-6x = -2 \quad \| : (-6)$$
$$x = \frac{1}{3} \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Lasketaan pisteen y-koordinaatti, kun $x = \frac{1}{3}$.

$$y = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{29}{27}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Piste on } (\tfrac{1}{3}, \tfrac{29}{27}).}}$ 1 p (3 p)

b) Lasketaan tangentin kulmakerroin.

$$k(\tfrac{1}{3}) = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{10}{3} \qquad \text{1 p (4 p)}$$

Määritetään suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - \frac{29}{27} &= \frac{10}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) && \text{1 p (5 p)} \\ y &= \frac{10}{3}x - \frac{10}{9} + \frac{29}{27} \\ y &= \frac{10}{3}x - \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Tangentin yhtälö on } y = \tfrac{10}{3}x - \tfrac{1}{27}.}}$ 1 p (6 p)

14. Helsingin kaupunki teetti ennusteen kaupungin väestönkasvusta vuodesta 2012 alkaen. Ennusteen mukaan asukasluku kasvaa lineaarisesti aikavälillä 2012–2030 niin, että kaupungissa on 607 417 asukasta vuoden 2014 alussa ja 629 894 asukasta vuoden 2018 alussa. Ennusteessa ei otettu huomioon mahdollisia kuntaliitoksia.

a) Ennusteen mukaan asukasluku y toteuttaa yhtälön

$$y = a(x - 2014) + b,$$

kun x on vuosiluku. Määritä vakioiden a ja b tarkat arvot käyttämällä yllä mainittuja tietoja.

b) Kuinka paljon asukasluku kasvaa ennusteen mukaan aikavälillä 2014–2030? Anna vastaus 1 000 asukkaan tarkkuudella.

c) Piirrä asukasluvun y kuvaaja välillä $2014 \leq x \leq 2030$.

Ratkaisu.

a) Tehtävänannon mukaan

$$\begin{aligned} y(2014) &= 607417 \\ a(2014 - 2014) + b &= 607417 \\ b &= 607417 \qquad (1) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} a(2018 - 2014) + b &= 629894 \\ 4a + b &= 629894 \end{aligned}$$ 1 p

Sijoitetaan (1), saadaan

$$\begin{aligned} 4a + 607417 &= 629894 \\ 4a &= 22477 \quad \| : 4 \\ a &= \frac{22477}{4} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{a = \frac{22\,477}{4} \text{ ja } b = 607\,417}}$ 1 p (2 p)

b) Asukasluku kasvaa välillä 2014–2030

$$\begin{aligned} y(2030) - y(2014) &= a(2030 - 2014) + b - a(2014 - 2014) - b \\ &= 16a \qquad \text{1 p (3 p)} \\ &= 16 \cdot \frac{22477}{4} \\ &= 89908 \\ &\approx 90000 \end{aligned}$$

Vastaus: Asukasluku kasvaa 90 000 asukkaalla. 1 p (4 p)

c)

$$\begin{aligned}
y &= \frac{22477}{4}(x-2014)+607417\\
y &= \frac{22477}{4}x-11317169{,}5+607417\\
y &= \frac{22477}{4}x-10709752{,}5
\end{aligned}$$

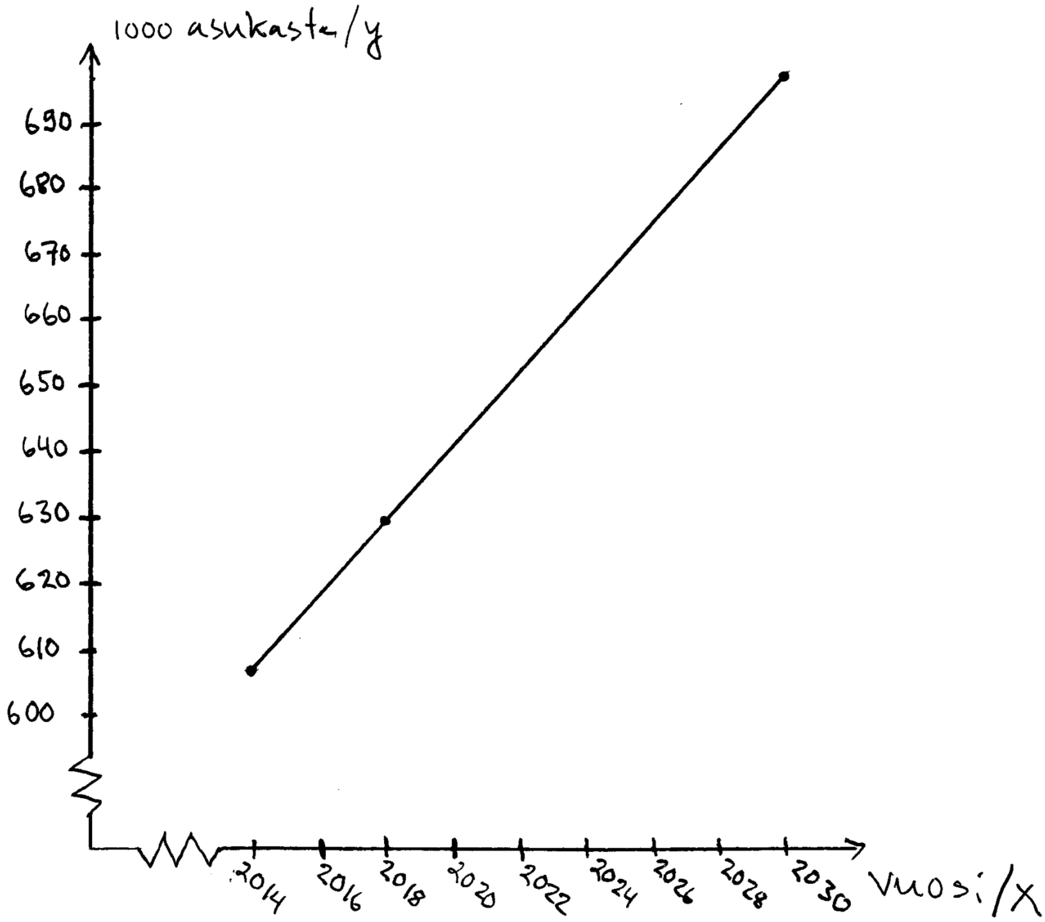
Saadaan

$$y(2030)=\frac{22477}{4}\cdot 2030-10709752{,}5=697325.$$

Kuvaaja on siis suora ja lisäksi tiedetään, että

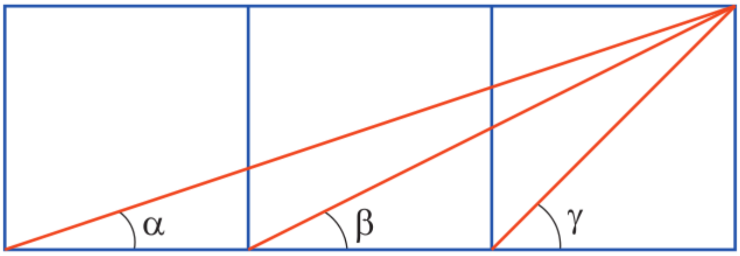
$$y(2014)=607417 \quad \text{ja} \quad y(2018)=629894.$$ 1 p (5 p)

Piirretään suora



1 p (6 p)

15. a) Ratkaise yhtälö $\tan\gamma = 1$, kun $0° \leq \gamma \leq 360°$.
b) Oheisessa kuvassa on vierekkäin kolme neliötä, joiden sivun pituus on 1. Lisäksi kuvioon on merkitty kulmat α, β ja γ. Laske $\tan(\alpha+\beta)$ käyttämällä tangentin yhteenläsku kaavaa
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
ja perustele yhtälö $\alpha + \beta = \gamma$.



Ratkaisu.

a)

$$\tan\gamma = 1; \quad 0° \leq \gamma \leq 360°$$
$$\gamma = 45° + n \cdot 180° \qquad 1 \text{ p}$$

Kaikki ratkaisut ovat

1 p (2 p)

$$\underline{\underline{\gamma = 45° \quad \text{tai} \quad \gamma = 225°}} \qquad 1 \text{ p } (3 \text{ p})$$

b)

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$
$$\tan\beta = \frac{1}{2} \qquad 1 \text{ p } (4 \text{ p})$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$
$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}$$
$$= 1 \qquad 1 \text{ p } (5 \text{ p})$$

Kuvassa

$$\tan\gamma = \frac{1}{1}$$
$$\tan\gamma = 1$$

Nyt

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \tan(\gamma) \\ \alpha+\beta &= \gamma + n\cdot 180° \end{aligned}$$

Lisäksi α, β, $\gamma \in [0°, 90°]$, joten ainoa ratkaisu on $\underline{\underline{\alpha+\beta=\gamma.}}$ 1 p (6 p)