

MAFYNETTI



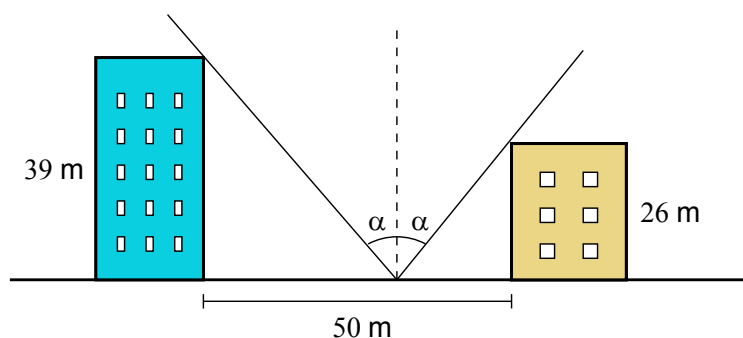
Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoitukseen ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

- Ratkaise yhtälö $2(x+4) - 3(x-3) = 0$.
 - Laske lukujen $\frac{3}{4}$ ja $\frac{6}{5}$ käänteislukujen keskiarvo.
 - Sievennä lauseke $\frac{3a-6a^2}{3a}$.
- Millä muuttujan x arvoilla $4x+17$ on suurempi kuin $2-x$?
 - Ratkaise yhtälö $x^2 + 14x = -49$.
 - Suora kulkee origon ja pisteen $(2,3)$ kautta. Kulkeeko se myös pisteen $(48,75)$ kautta?
- Laske derivaatta $f'(1)$, kun $f(x) = x(x+2) - 5$.
 - Ratkaise yhtälö $5^{3x-1} = 25^{\frac{x}{2}}$.
- Alpo, Sanna ja Pauli palaavat samalla taksilla ylioppilasjuhlista. Alpon jäädessä pois mittari näyttää 21,90 €, Sannan jäädessä 28,20 € ja matkan loppusumma on 33,50 €. Matkan hinta päätetään jakaa seuraavalla tavalla: Alpo maksaa kolmasosan matkan alkuosuuden hinnasta. Sanna maksaa kolmasosan alkuosuudesta ja puolet keskiosuuden hinnasta. Laskun loppuosa jää Paulille. Kuinka paljon kukin joutuu maksamaan?
- Tähtiharrastaja katselee yöllisiä tähdenlentoja pihalla, joka sijaitsee kahden kerrostalon välissä kuvan mukaisesti. Talojen korkeudet ovat 39 m ja 26 m. Kuinka kaukana korkeammasta talosta molempiin suuntiin avautuu yhtä suuri kulma α maanpinnan tasosta katsottuna?

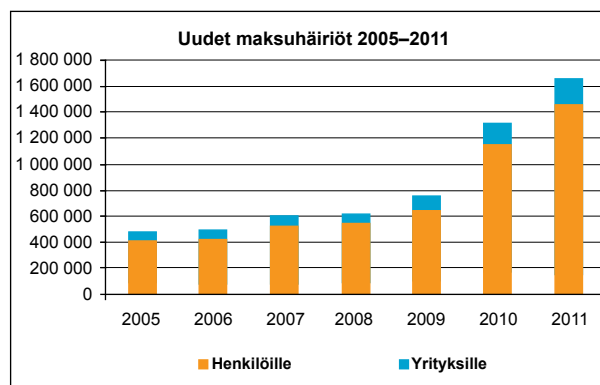


6. Tennispalloja myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa, johon mahtuu neljä palloa tiiviisti päällekkäin pakattuna. Tennispallon halkaisija on 6,68 cm. Kuinka monta prosenttia pakkauksen tilavuudesta pallot täyttävät? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.



<<http://www.fruugo.fi/wilson-tour-davis-cup-official-tennis-balls-12-dozen/p-1431131>>. Luettu 5.3.2012.

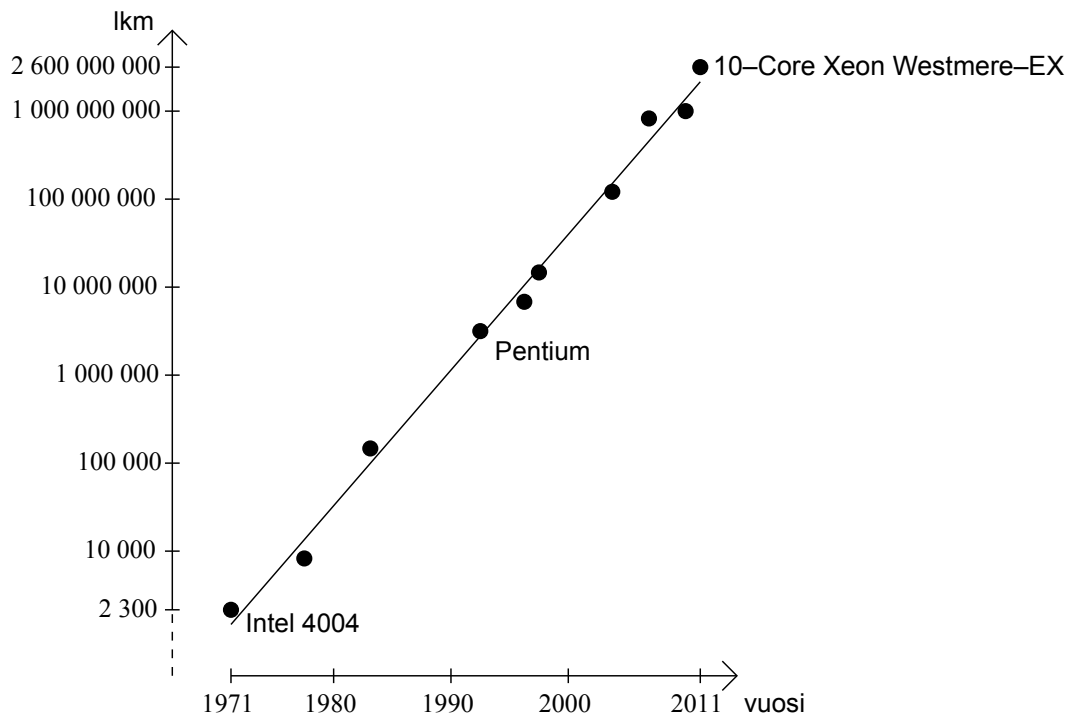
7. Mitä arvoja funktio $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 5$ saa välillä $[0, 2]$?
8. Vuonna 2005 yksityishenkilöiden maksuhäiriöiden lukumäärä Suomessa oli 422 500, ja vuonna 2011 se oli 1 460 500.
- a) Kuinka monta prosenttia maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.
- b) Vuonna 2011 ministeriö asetti tavoitteeksi vähentää maksuhäiriöiden määrän neljässä vuodessa takaisin vuoden 2005 tasolle. Kuinka monta prosenttia määrä vähenee vuodessa, kun vuotuinen vähenemisprosentti on sama? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



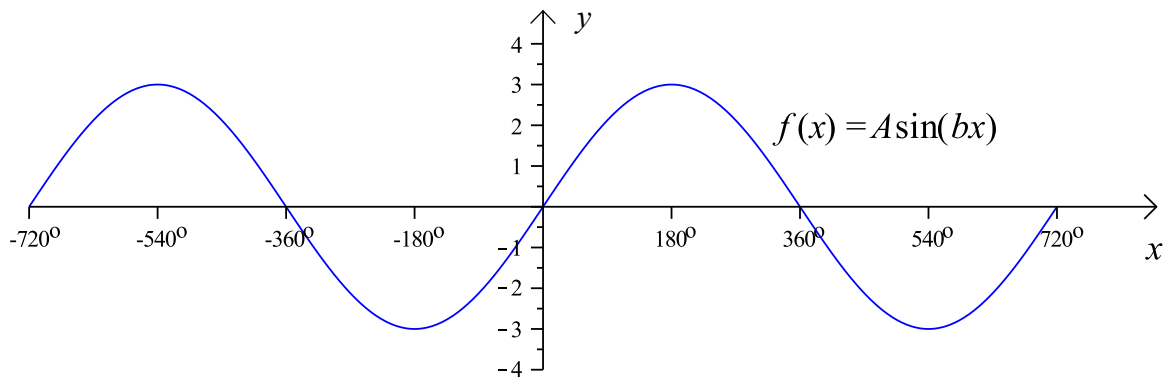
<<http://www.asiakastieto.fi/asiakastieto/tilastot/maksuhairiot/>>. Luettu 5.3.2012.

9. Neliön piiri on yhtä pitkä kuin ympyrän kehä.
- a) Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on pienempi kuin ympyrän pinta-ala?
- b) Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala? Anna vastaukset prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

10. Noppaa heitetään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä
- silmlukujen summa on vähintään kahdeksan?
 - silmlukujen summa on suurempi kuin niiden tulo?
11. Lukujonossa (a_n) on $a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{12}{5}$. Määritä jonon sadan ensimmäisen termin summa, kun jono on
- aritmeettinen
 - geometrinen. Anna tämän kohdan vastaus miljoonan tarkkuudella.
12. Valmistajan tarkistusmittauksissa todettiin, että hajuvesipullon sisällön määrä noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 52 millilitraa ja keskihajonta on 1,25 millilitraa. Millä todennäköisyydellä hajuvesipullon sisältö on alle 50 millilitraa?
13. Mikropiirin transistoreiden lukumäärä $N = N(t)$ on kasvanut alla olevan kuvan mukaisesti. Ajanhetkellä $t = 0$ (vuosi 1971) lukumäärä oli 2 300, ja hetkellä $t = 40$ (vuosi 2011) se oli 2 600 000 000. Lukumäärä noudattaa mallia $N(t) = N(0)e^{at}$.
- Määritä vakion a kaksidesimaalinen likiarvo näiden tietojen perusteella.
 - Perustele a-kohdan avulla niin sanottu Mooren laki, jonka mukaan transistoreiden lukumäärä kaksinkertaistuu noin kahden vuoden välein.



- 14.** Yhtiö valmistaa kännykkäkoteloita, joiden valmistuskustannukset ovat 12,30 € kappale. Tämän lisäksi yhtiön kiinteät kustannukset ovat 98 000 euroa. Koteloita myydään aluksi 17,99 eurolla, mutta viimeiset 25 % myydään varaston tyhjentämiseksi 14,00 eurolla kappale. Oletetaan, että yhtiö saa myytyä kaikki kotelot. Tehtävässä ei oteta huomioon verotusta.
- Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön kokonaiskustannuksia koteloiden valmistusmäärän x avulla lausuttuna.
 - Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön saamaa voittoa valmistusmäärän x avulla lausuttuna.
 - Kuinka monta koteloita yhtiön täytyy valmistaa, jotta kiinteät kustannukset saadaan katettua yllä mainitulla hinnoittelustrategialla?
- 15.** Alla on funktion $f(x) = A\sin(bx)$ kuvaaja välillä $x \in [-720^\circ, 720^\circ]$. Määritä kuvaajan perusteella
- vakion A arvo
 - vakion b arvo
 - funktion f lyhin jakso L , jolle pätee $L > 0$ ja $f(x+L) = f(x)$ kaikilla x .



Arviomme tehtävien pisteytyksestä on merkitty sinisellä tekstillä.

Lyhyt matematiikka, kevät 2013

Mallivastaukset, 20.3.2013

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fyysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet: www.mafyvalmennus.fi
s-posti: info@mafyvalmennus.fi
puhelin: (09) 3540 1373

Lääkisvalmennuskurssit — DI-valmennuskurssit — yo-valmennuskurssit

1. a)

$$\begin{aligned}2(x+4) - 3(x-3) &= 0 \\2x + 8 - 3x + 9 &= 0 && \mathbf{1\ p} \\-x + 17 &= 0 \\-x &= -17 \quad || : (-1) \\ \underline{\underline{x = 17}} &&& \mathbf{1\ p\ (2\ p)}\end{aligned}$$

b) Keskiarvo on

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}{2} &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{6}}{2} && \mathbf{1\ p\ (3\ p)} \\ &= \frac{2)4}{6} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{8+5}{12} \\ &= \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} && \mathbf{1\ p\ (4\ p)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{3a - 6a^2}{3a} &= \frac{\overset{1}{3}a(1-2a)}{\underset{1}{3}a} && \mathbf{1\ p\ (5\ p)\ Ennen\ supistusta} \\ &= \underline{\underline{-2a + 1}} && \mathbf{1\ p\ (6\ p)}\end{aligned}$$

2. a)

$$4x + 17 > 2 - x$$

$$5x > -15 \quad || : 5 \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

$$\underline{\underline{x > -3}} \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

b)

$$x^2 + 14x = -49$$

$$x^2 + 14x + 49 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1}$$

$$\underline{\underline{x = -7}} \quad \mathbf{2 \text{ p (4 p)}}$$

c) Suora kulkee pisteiden $(0, 0)$ ja $(2, 3)$ kautta, joten sen yhtälö on muotoa

$$y = kx.$$

Kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \frac{3 - 0}{2 - 0}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Suoran yhtälö on

$$y = \frac{3}{2}x. \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}}$$

Tutkitaan toteuttaako piste $(48, 75)$ suoran yhtälön:

$$\frac{3}{2} \cdot 48 = 72$$

$$\neq 75$$

Vastaus: Suora ei kulje pisteen $(48, 75)$ kautta. $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

3. a)

$$f(x) = x(x + 2) - 5$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 \quad 1 \text{ p}$$

$$f'(x) = 2x + 2 \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 + 2$$

$$\underline{\underline{f'(1) = 4}} \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

b) Tapa 1:

$$5^{3x-1} = 25^{\frac{x}{2}}$$

$$5^{3x-1} = (5^2)^{\frac{x}{2}} \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$5^{3x-1} = 5^{2 \cdot \frac{x}{2}}$$

$$5^{3x-1} = 5^x \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$3x - 1 = x$$

$$2x = 1 \quad || : 2$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}} \quad 1 \text{ p (6 p)}$$

Tapa 2:

$$5^{3x-1} = 25^{\frac{x}{2}} \quad || \lg(\quad)$$

$$\lg(5^{3x-1}) = \lg(25^{\frac{x}{2}})$$

$$(3x - 1) \lg(5) = \frac{x}{2} \lg(25) \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$3 \lg(5) \cdot x - \lg(5) = \frac{\lg(25)}{2} \cdot x$$

$$3 \lg(5) \cdot x - \frac{\lg(25)}{2} \cdot x = \lg(5) \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$1,3979 \dots x = \lg(5) \quad || : 1,3979 \dots$$

$$\underline{\underline{x = 0,5}} \quad 1 \text{ p (6 p)}$$

4. Merkitään alkuosan hintaa A :lla ja keskiosan hintaa K :lla.

$$A = 21,90 \text{ €}$$

$$K = 28,20 \text{ €} - 21,90 \text{ €} = 6,30 \text{ €}$$

Alpo maksaa:

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} \cdot 21,90 \text{ €} = \underline{7,30 \text{ €}} \quad 2 \text{ p}$$

Sanna maksaa:

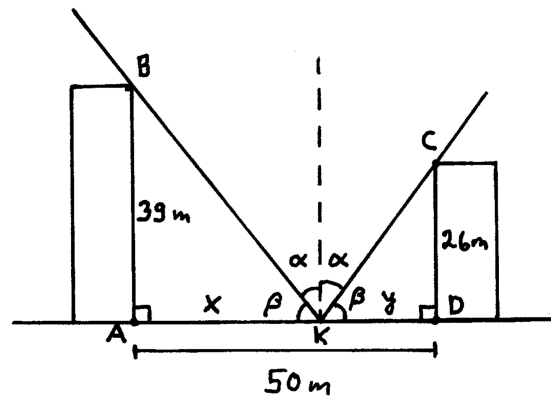
$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{2}K = \frac{1}{3} \cdot 21,90 \text{ €} + \frac{1}{2} \cdot 6,30 \text{ €} = \underline{10,45 \text{ €}} \quad 2 \text{ p (4 p)}$$

Pauli maksaa loput, eli

$$33,50 \text{ €} - 10,45 \text{ €} - 7,30 \text{ €} = \underline{15,75 \text{ €}}$$

Vastaus: Alpo maksaa 7,30 €, Sanna 10,45 € ja Pauli 15,75 €. 2 p (6 p)

5.



Molemmin puolin

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

joten muodostuvissa suorakulmaisissa kolmioissa alempi terävä kulma on sama β .

$$x + y = 50$$

$$y = 50 - x \quad 1 \text{ p} \quad (1)$$

Kolmiot KAB ja KCD ovat yhdenmuotoiset (kk), joten vastinsivujen suhteista saadaan

$$\frac{y}{x} = \frac{26}{39} \quad (x \neq 0) \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

$$1 \text{ p (3 p)}$$

Sijoitetaan (1):

$$\frac{50 - x}{x} = \frac{26}{39} \quad \parallel \cdot 39x \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$1950 - 39x = 26x$$

$$1950 = 65x \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$65x = 1950 \quad \parallel : 65$$

$$x = 30 \text{ (m)}$$

Vastaus: Kysytty etäisyys on 30 metriä.

$$1 \text{ p (6 p)}$$

6. Pallojen halkaisija $d = 6,68$ cm, joten säde

$$r = \frac{d}{2} = \frac{6,68}{2} = 3,34 \text{ (cm)}$$

Pakkaus on ympyrälieriö, jonka pohjaympyrän säde on sama $r = 3,34$ cm ja korkeus

$$h = 4 \cdot d$$

$$h = 4 \cdot 6,68$$

$$h = 26,72 \text{ (cm)}$$

1 p

Pallon tilavuus

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

ja ympyrälieriön tilavuus

$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h,$$

1 p (2 p)

joten kysytty %-osuus on

$$\frac{4 \cdot V_{\text{pallo}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{4 \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{\pi r^2 h}$$

1 p (3 p)

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{\pi r^{\frac{1}{3}}}{\pi r^{\frac{2}{1}} h}$$

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{r}{h}$$

2 p (5 p)

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{3,34}{26,72}$$

$$= 0,666 \dots$$

$$\approx 67\%$$

Vastaus: Pallo täyttävät 67% tilavuudesta.

1 p (6 p)

7.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 5, \quad \text{kun } 0 \leq x \leq 2$$

Etsitään funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2]$. Ne löytyvät välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohtista.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 10 \\ f'(x) &= 6x^2 + 4x - 10 \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x^2 + 4x - 10 &= 0 \quad || : 2 \\ 3x^2 + 2x - 5 &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{-2 \pm 8}{6} \\ &= \frac{-1 \pm 4}{3} \\ x &= 1 \quad \text{tai} \quad \left(x = -\frac{5}{3}\right) \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

Lasketaan funktion arvot.

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f(1) &= -1 \quad (\text{pienin arvo}) \\ f(2) &= 9 \quad (\text{suurin arvo}) \end{aligned} \quad \mathbf{2 \text{ p (5 p)}}$$

Joten välillä $0 \leq x \leq 2$ funktio $f(x)$ saa kaikki arvot väliltä $-1 \leq f(x) \leq 9$.

Vastaus: $f(x)$ saa arvoja väliltä $[-1, 9]$. $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

8.

Vuonna 2005 maksuhäiriöitä 422 500
 Vuonna 2011 maksuhäiriöitä 1460 500

a) Kasvu-% on:

$$\frac{1460\,500 - 422\,500}{422\,500} = 2,4568\dots \quad 2 \text{ p}$$

$$\approx 246\%$$

Vastaus: Määrä kasvoi 246%. 1 p (3 p)

b) Määrän tulisi vähetä eksponentiaalisesti neljässä vuodessa 1460 500:sta takaisin 422 500:aan. Merkitään

$$K = 1460\,500$$

$$K_4 = 422\,500$$

$$q = 1 - \frac{p}{100},$$

missä q on korkotekijä ja p vähenemisprosentti. Saadaan

$$K_n = Kq^n \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$422\,500 = 1460\,500 \cdot q^4 \quad \parallel : 1460\,500$$

$$q^4 = \frac{422\,500}{1460\,500}$$

$$q = (\pm) \sqrt[4]{\frac{422\,500}{1460\,500}}$$

$$q = 0,733\dots \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

Ratkaistaan p korkotekijän lausekkeesta.

$$1 - \frac{p}{100} = 0,733\dots$$

$$-\frac{p}{100} = -0,266\dots \quad \parallel \cdot (-100)$$

$$p = 26,66\dots$$

$$p \approx 26,7$$

Vastaus: Maksuhäiriöt vähenevät 26,7% vuodessa. 1 p (6 p)

9. Merkitään neliön sivun pituutta a :lla ja ympyrän sädettä r :llä. Tehtävänannon mukaan

neliön piiri = ympyrän kehä

$$4a = 2\pi r \quad || : 4$$

$$a = \frac{\pi r}{2}$$

Neliön pinta-ala A_n on:

$$A_n = a^2 = \left(\frac{\pi r}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot r^2 \quad 1 \text{ p}$$

Ympyrän pinta-ala:

$$A_y = \pi r^2$$

a) Kysytty %-osuus on:

$$\frac{A_y - A_n}{A_y} = \frac{\frac{1}{\pi} r^2 - \frac{\pi^2}{4} r^2}{\pi r^2} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

$$= \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1}$$

$$= 0,2146 \dots$$

$$\approx 21,5\% \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

b) Kysytty %-osuus on

$$\frac{A_y - A_n}{A_n} = \frac{\frac{1}{\pi} r^2 - \frac{\pi^2}{4} r^2}{\frac{\pi^2}{4} r^2} \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$= \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$= \frac{4}{\pi} - 1$$

$$= 0,2732 \dots$$

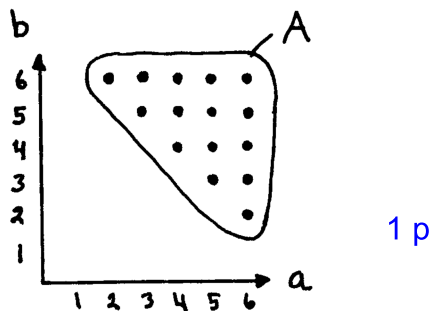
$$\approx 27,3\%$$

Vastaus: a) 21,5% pienempi, b) 27,3% suurempi. 1 p (6 p)

10. Heitetään noppaa kahdesti. Merkitään 1. heiton silmälukua a :lla ja 2. heiton silmälukua b :llä.

a)

A : “Silmälukujen summa vähintään 8”



1 p

Kaikkiaan kahden heiton yhdistelmiä on

$$6 \cdot 6 = 36$$

1 p (2 p)

kappaletta ja suotuisten yhdistelmien määrä saadaan kuvasta.

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0,4166\dots \approx 41,7\%$$

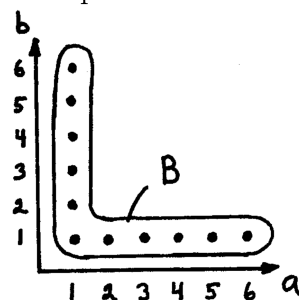
Vastaus: Todennäköisyys on 41,7%.

1 p (3 p)

b)

B : “Silmälukujen summa on suurempi kuin niiden tulo.”

Merkitään suotuisat silmälukuparit kuvaan:



2 p (5 p)

$$P(B) = \frac{11}{36} = 0,3055\dots \approx 30,6\%$$

Vastaus: Todennäköisyys on 30,6%.

1 p (6 p)

11.

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{12}{5}$$

a) Jono on aritmeettinen, joten sen yleinen termi on muotoa

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

missä

$$d = a_{n+1} - a_n = a_2 - a_1 = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Yleinen termi on

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n - 1)\frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{5}n + \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 100. termi:

$$a_{100} = \frac{2}{5} \cdot 100 + \frac{8}{5} = 41,6 \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

Aritmeettinen summa on

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

joten

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{2 + 41,6}{2} = 2180$$

Vastaus: Summa on 2180.**1 p (3 p)**

b) Jono on geometrinen, joten sen yleinen termi on muotoa

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

missä

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{12}{5}}{2} = \frac{6}{5} \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}$$

Geometrinen summa on

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q},$$

joten

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{2 \left(1 - \left(\frac{6}{5} \right)^{100} \right)}{1 - \frac{6}{5}} && \mathbf{1 \text{ p (5 p)}} \\ &= 828179736,2 \dots \\ &\approx 8,28 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

Vastaus: Summa on $8,28 \cdot 10^8$. **1 p (6 p)**

12. Keskiarvo on

$$\bar{x} = 52 \text{ ml.}$$

Keskihajonta on

$$s = 1,25 \text{ ml.}$$

$$x = 50$$

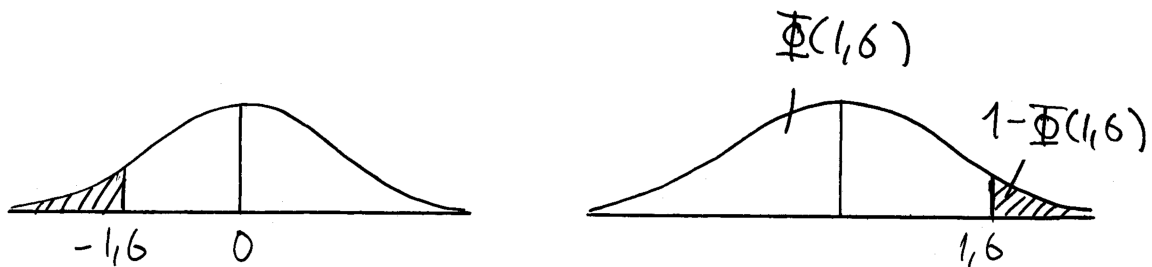
Normitetaan arvo

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{s} \\ z &= \frac{50 - 52}{1,25} \\ &= -1,6 \end{aligned}$$

2 p

Määritetään todennäköisyys

$$P(x \leq 50) = P(z \leq -1,6)$$



2 p (4 p)

$$\begin{aligned} P(z \leq -1,6) &= 1 - \Phi(1,6) \\ &= 1 - 0,9452 \\ &= 0,0548 \\ &\approx 5,5\% \end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys on 5,5%.

2 p (6 p)

13.

$$N(0) = 2300$$

$$N(40) = 2600000000$$

Tiedetään, että

$$N(t) = N(0)e^{at}$$

a)

$$N(40) = N(0)e^{a \cdot 40}$$

$$2,6 \cdot 10^9 = 2300 \cdot e^{40a} \quad || : 2300 \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

$$e^{40a} = 1130434,783 \dots \quad || \ln(\quad)$$

$$\ln(e^{40a}) = \ln(1130434,783 \dots) \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

$$40a = \ln(1130434,783 \dots) \quad || : 40$$

$$a = \frac{\ln(1130434,783 \dots)}{40}$$

$$a = 0,3484 \dots$$

$$\underline{\underline{a \approx 0,35}} \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

b) Ratkaistaan aika t , jonka kuluessa transistorien määrä kaksinkertaistuu.

$$2N(0) = N(0)e^{at} \quad || : N(0)$$

$$2 = e^{at} \quad || \ln(\quad) \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}$$

$$\ln(e^{at}) = \ln(2)$$

$$at = \ln(2) \quad || : a \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}}$$

$$t = \frac{\ln(2)}{a} \quad || \text{ sij. } a = 0,3484 \dots$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0,3484 \dots}$$

$$t = 1,989 \dots$$

$$\underline{\underline{t \approx 2,0}} \quad (\text{vuotta})$$

Vastaus: Mallin mukaan transistorien määrä siis kaksinkertaistuu noin kahdessa vuodessa, mikä on yhtäpitävää Mooren lain kanssa.

1 p (6 p)

14. a) Valmistusmäärä on x .

$$\text{Valmistuskustannukset: } 12,3 \cdot x \quad (\text{€})$$

$$\text{Kiinteät kustannukset: } 98\,000 \quad (\text{€})$$

Kokonaiskustannukset ovat

$$\underline{\underline{K(x) = 12,3x + 98\,000 \quad (\text{€})}} \quad \mathbf{2 \text{ p}}$$

b) 75% myydään hinnalla 17,99 €. Näistä saadaan myyntiä

$$17,99 \cdot 0,75x \quad (\text{€})$$

25% myydään hinnalla 14,00 €. Näistä saadaan myyntiä

$$14,00 \cdot 0,25x \quad (\text{€})$$

Myyntiä on yhteensä

$$M(x) = 17,99 \cdot 0,75x + 14,00 \cdot 0,25x = 16,9925x \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

Voitto on

$$V(x) = M(x) - K(x)$$

$$V(x) = 16,9925x - (12,3x + 98\,000)$$

$$\underline{\underline{V(x) = 4,6925x - 98\,000 \quad (\text{€})}} \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}$$

c) Kun kustannukset saadaan katettua, on voitto (ja tappio) nolla.

$$V(x) = 0$$

$$4,6925x - 98\,000 = 0 \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}}$$

$$4,6925x = 98\,000 \quad || : 4,6925$$

$$x = 20884,389 \dots$$

$$x \approx 20885 \text{ (kpl)}$$

(Huom! Pyöristys tehdään pyöristyssääntöjen vastaisesti ylöspäin, koska kyseessä on vähimmäismäärä.)

Vastaus: Koteloita täytyy valmistaa vähintään 20885 kappaletta. $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

15. a) Kuvaajan perusteella f :n suurin arvo on 3. $\sin(bx)$:n suurin arvo on 1. Esim. kohdassa $x = 180^\circ$, $\sin(bx) = 1$. **1 p**

$$\begin{aligned}f_{\max} &= A \sin(180^\circ) \\3 &= A \cdot 1 \\ \underline{\underline{A = 3}} & \quad \mathbf{1\ p\ (2\ p)}\end{aligned}$$

- b) Funktio $3 \sin(a) = 0$, kun $a = 180^\circ$. Kuvaajasta 1. positiivinen nollakohta on kohdassa $x = 360^\circ$. Näin ollen

$$\begin{aligned}bx &= 180^\circ & \mathbf{1\ p\ (3\ p)} \\ b \cdot 360^\circ &= 180^\circ \quad || : 360^\circ \\ \underline{\underline{b = 0,5}} & & \mathbf{1\ p\ (4\ p)}\end{aligned}$$

- c) Kuvaajasta nähdään, että lyhyin jakso, jolle

$$f(x + L) = f(x)$$

on 720° .

Vastaus: $L = 720^\circ$. **2 p (6 p)**