MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

28.9.2012

MATEMATIIKAN KOE
LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{2}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3. \end{cases}$$

2. **a)** Mikä on meetvurstin suolapitoisuus prosentin kymmenesosan tarkkuudella, kun 250 gramman massa meetvurstia on $9{,}0$ grammaa suolaa?

b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on $4{,}9$ m ja kateetin pituus $2{,}3$ m. Laske toisen kateetin pituus $0{,}1$ metrin tarkkuudella.

c) Määritä pisteiden $(0,8)$ ja $(12,0)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.

3. **a)** Määritä funktion $f(x) = x(x+2)^2$ derivaatta kohdassa $x = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $2^{3x+1} = 32$.

c) Ratkaise yhtälö $\log_4(3x) = 3$.

4. Tarkastellaan paraabelia $y = x^2 - 12x + 35$.

a) Missä pisteissä paraabeli leikkaa x-akselin?

b) Määritä paraabelin huipun koordinaatit.

5. Laske summat

a) $\sum_{n=0}^{22} (3 + 4n)$

b) $\sum_{n=2}^{15} (-3)^n$

6. Erään japanilaisen auton keskikulutus maantieajossa on $6{,}8$ litraa bensiiniä sadalla kilometrillä. Saman kokoluokan amerikkalaisella autolla voi ajaa 32 mailia yhdellä gallonalla bensiiniä. Kumpi auto kuluttaa vähemmän polttoainetta? Yksi gallona on noin $3{,}785$ litraa, ja yksi maili noin $1{,}609$ kilometriä.

7. Saksalainen tähtitieteilijä Johannes Kepler (1571−1630) keksi planeetan etäisyyden ja kiertoajan välisen yhteyden. Planeetan kiertoaikaa Auringon ympäri merkitään symbolilla x ja sen etäisyyttä Auringosta symbolilla y. Alla olevassa taulukossa on viiden Aurinkoa lähinnä olevan planeetan kiertoaika vuosina ja etäisyys astronomisen yksikön avulla lausuttuna.

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars	Jupiter
x	$0,241$	$0,615$	$1,0$	$1,881$	$11,861$
$\sqrt[3]{x}$					
y	$0,387$	$0,723$	$1,0$	$1,523$	$5,203$
$\sqrt{y}$					

a) Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja täydennä puuttuvat kohdat kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Päättele, mikä on Keplerin kaava etäisyydelle y kiertoajan x avulla lausuttuna.

c) Saturnuksen kiertoaika on $29,457$ vuotta. Mikä on sen etäisyys Auringosta?

8. Veetun lounaspaikassa on kolmenlaisia pitsoja: $7,50$ euron peruspitsa, $8,50$ euron ruispitsa ja $10,50$ euron pannupitsa. Pitsoihin valitaan 15 täytteestä kaksi erilaista. Maksamalla euron lisää voi valita vielä kolmannen täytteen. Veetu yrittää syödä aina erilaisen pitsan, joka eroaa kaikista aikaisemmista joko pohjaltaan tai täytteiltään.

a) Kuinka monta viikkoa hän voi tehdä näin, jos hän syö ravintolassa viisi kertaa viikossa?

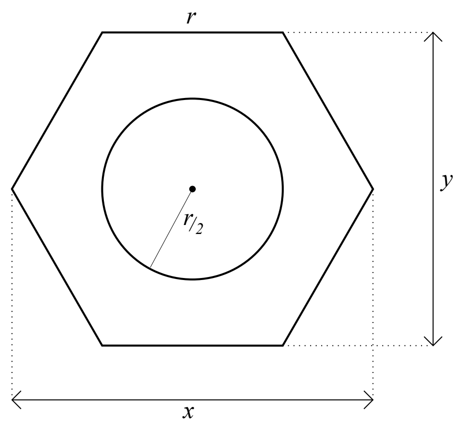
b) Mikä on erilaisten pitsojen keskimääräinen hinta?

9. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r.

a) Johda leveyden x lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

b) Johda korkeuden y lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

c) Laske kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on $\frac{r}{2}$.



10. Suoran ympyräkartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla ja yläreuna sivuaa kartion vaippaa. Lieriön pohjan halkaisija on yhtä suuri kuin sen korkeus. Toisaalta lieriön pohjan halkaisija on puolet kartion pohjan halkaisijasta. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kartion tilavuudesta? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

11. Aikuisen ihmisen sääriluun pituus y riippuu henkilön pituudesta x kaavojen

$$y = 0,43x - 27 \text{ (nainen)}$$
$$y = 0,45x - 31 \text{ (mies)}$$

mukaisesti, kun yksikkönä on senttimetri.

a) Arkeologi löytää naisen sääriluun, joka on 41 cm pitkä. Kuinka pitkä nainen oli?

b) Kaivauksissa löytyneen miehen pituudeksi arvioidaan 175 cm. Miehen läheltä löytyy sääriluu, jonka pituus on 42 cm. Onko kyseessä saman henkilön sääriluu?

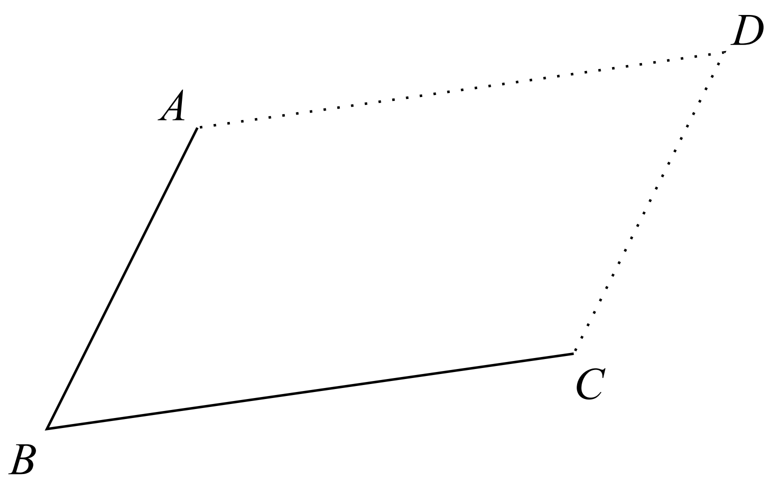
<http://tieku.fi/kulttuuri-ja-historia/menneisyyden-kulttuurit/
joukkohauta-viikingit-menettivat-paansa-englannissa>. Luettu 29.3.2011.

12. Maailman väkiluvun kasvua kuvataan usein eksponentiaalisen mallin avulla. Vuonna 2004 väkiluku oli $6,4$ miljardia ja vuonna 2010 noin $6,8$ miljardia. Minä vuonna väkiluku ylittää mallin mukaan 10 miljardin rajan?

13. Karoliina ja Petteri tallettivat kumpikin $10\,000$ euroa vuodeksi. Karoliina sijoitti rahansa vuoden määräaikaistilille $2,20$ %:n vuotuisella korolla. Maksetusta korosta pankki pidätti 30 % lähdeveroa. Petteri sijoitti rahansa ensin puolen vuoden määräaikaistilille, jonka vuosikorko oli $2,35$ %. Puolen vuoden kuluttua Petteri sijoitti pääoman korkoineen, josta pankki oli pidättänyt 30 % lähdeveroa, toiselle puolen vuoden määräaikaistilille. Tämän tilin vuosikorko oli $2,00$ %. Maksetusta korosta pankki pidätti jälleen 30 % lähdeveroa. Kumpi teki paremman sijoituksen, ja mikä oli sen arvo vuoden kuluttua?

14. Eräässä tutkimuksessa mitattiin tiettyä lisäainepitoisuutta sadassa pullollisessa virvoitusjuomaa. Pitoisuuden keskiarvoksi saatiin $\overline{x} = 0,215$ % ja keskihajonnaksi $s = 0,005$ %. Lisäainepitoisuus noudattaa normaalijakaumaa. Millä todennäköisyydellä lisäaineen pitoisuus pullossa ylittää sallitun rajan $0,225$ %?

15. Paikkavektorit $\overrightarrow{OA} = 4\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overrightarrow{OB} = 6\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overrightarrow{OC} = 7\overline{i} + 9\overline{j} + 3\overline{k}$ määrittävät suunnikkaan kolme kärkipistettä A, B ja C. Määritä neljännen kärjen D paikkavektori $\overrightarrow{OD}$ sekä suunnikkaan lävistäjävektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$.



Lyhyt matematiikka, syksy 2012

Mallivastaukset, 28.9.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, valmennuskursseihin sekä matematiikan ja luonnontieteiden opetukseen erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- lääketieteellisen valmennuskurssit
- DI-valmennuskurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- arkkitehtuurin valmennuskurssit
- Mafynetti - sähköinen oppimateriaali

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet:	`www.mafyvalmennus.fi`
s-posti:	`info@mafyvalmennus.fi`
puhelin:	(09) 3540 1373

1. a)

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &= 0 \\
x(x-2) &= 0 \quad \text{(tulon nollasääntö)}
\end{aligned}
$$

1 p

$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

1 p (2 p)

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}x - 1 &= \frac{2}{3} \quad \| \cdot 3 \\
2x - 3 &= 2
\end{aligned}
$$

1 p (3 p)

$$
\begin{aligned}
2x &= 5 \quad \| : 2 \\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

1 p (4 p)

c)

$$
\begin{cases}
x + 2y = -4 \\
2x - y = -3 \quad \| \cdot 2
\end{cases}
\tag{1}
$$

$$
\begin{cases}
x + 2y = -4 \\
4x - 2y = -6
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
5x &= -10 \quad \| : 5 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

1 p (5 p)

Sijoitetaan $x = -2$ yhtälöön (1).

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (-2) - y &= -3 \\
y &= -4 + 3 \\
y &= -1
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = -2,\ y = -1.}}$ 1 p (6 p)

2. a)

Suolan massa	9,0 g
Meetvurstin massa	250 g

Suolapitoisuus on

$$\frac{9}{250} = 0{,}036 = 3{,}6\%$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Suolapitoisuus on } 3{,}6\%.}}$ 2 p

b)

hypotenuusa	$c = 4{,}9\,\text{m}$
kateetti	$b = 2{,}3\,\text{m}$
kysytty kateetti	a

Suorakulmaisen kolmion sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ a^2 &= c^2 - b^2 && \text{1 p (3 p)} \\ a^2 &= 4{,}9^2 - 2{,}3^2 \\ a &= \underset{(-)}{+}\sqrt{4{,}9^2 - 2{,}3^2} \\ a &= 4{,}3266\ldots \\ &\approx 4{,}3\,(\,\text{m}) && \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Toisen kateetin pituus on } 4{,}3\,\text{m.}}}$

c) Pisteet ovat $(0, 8)$ ja $(12, 0)$. Lasketaan suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-8}{12-0} = \frac{-8^{(4}}{12} = -\frac{2}{3} \qquad \text{1 p (5 p)}$$

Pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevan suoran yhtälö on muotoa

$$\begin{aligned} y - y_1 &= k(x - x_1) \\ y - 8 &= -\frac{2}{3}(x - 0) \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= -\frac{2}{3}x + 8}} && \text{1 p (6 p)} \end{aligned}$$

3. a) Funktio f:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(x+2)^2 \\
&= x(x+2)(x+2) \\
&= x(x^2+2x+2x+4) \\
&= x(x^2+4x+4) \\
&= x^3+4x^2+4x
\end{aligned}
$$

f:n derivaattafunktio:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2+4\cdot 2x+4 \\
&= 3x^2+8x+4 \qquad \text{1 p}
\end{aligned}
$$

Derivaatta kohdassa $x=0$:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= 3\cdot 0^2+8\cdot 0+4 \\
&= 0+0+4 \\
&= 4 \qquad \text{1 p (2 p)}
\end{aligned}
$$

b) Tapa 1:

$$
\begin{aligned}
2^{3x+1} &= 32 \quad \| \lg(\,) \\
\lg\left(2^{3x+1}\right) &= \lg 32 \\
(3x+1)\lg 2 &= \lg 32 \quad \| : \lg 2 \qquad \text{1 p (3 p)} \\
3x+1 &= \frac{\lg 32}{\lg 2} \\
3x+1 &= 5 \\
3x &= 4 \quad \| : 3 \\
\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}\ &(= 1{,}33\ldots) \qquad \text{1 p (4 p)}
\end{aligned}
$$

Tapa 2:

$$
\begin{aligned}
2^{3x+1} &= 32 \\
2^{3x+1} &= 2^5 \qquad \text{1 p (3 p)} \\
3x+1 &= 5 \\
3x &= 4 \quad \| : 3 \\
\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}\ &(= 1{,}33\ldots) \qquad \text{1 p (4 p)}
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned} \log_4(3x) &= 3 \quad \| \text{ Sovelletaan logaritmin määritelmää} \\ 4^3 &= 3x \\ 3x &= 64 \quad \| : 3 \\ x &= \frac{64}{3} \, (= 21{,}33\ldots) \end{aligned}$$

1 p (5 p)

1 p (6 p)

4.

$$y = x^2 - 12x + 35$$

a) Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa, joissa $y = 0$, eli

$$x^2 - 12x + 35 = 0 \qquad \text{1 p}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm 2}{4}$$

$$x = 7 \quad \text{tai} \quad x = 5 \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Vastaus: Pisteet ovat $(5, 0)$ ja $(7, 0)$. 1 p (3 p)

b) Paraabelin huippu on derivaatan $y'(x)$ nollakohdassa. Derivaatta on

$$y'(x) = 2x - 12 \qquad \text{1 p (4 p)}$$

Määritetään derivaatan nollakohta.

$$y'(x) = 0$$

$$2x - 12 = 0$$

$$2x = 12 \quad \| : 2$$

$$x = 6 \qquad \text{1 p (5 p)}$$

Huipun y-koordinaatti on

$$y(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 35 = -1$$

Vastaus: Huipun koordinaatit ovat $(6, -1)$. 1 p (6 p)

5. a)

$$\sum_{n=0}^{22}(3+4n)$$

Tutkitaan lukujonoa $a_n = 3 + 4n$. Kaksi peräkkäistä jäsentä ovat

$$a_{n+1} = 3 + 4(n+1) \quad \text{ja} \quad a_n = 3 + 4n$$

Huomataan, että kyseessä on aritmeettinen jono, sillä

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 3 + 4(n+1) - (3 + 4n) \\ &= \cancel{3} + \cancel{4n} + 4 - \cancel{3} - \cancel{4n} \\ &= 4\,(\text{vakio}) \end{aligned}$$

Kyseisen aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus on siten

$$d = a_{n+1} - a_n = 4$$ 1 p

Lasketaan vastaavan aritmeettisen summan ensimmäinen ja viimeinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 + 4 \cdot 0 = 3 \\ a_{22} &= 3 + 4 \cdot 22 = 91 \end{aligned}$$

Summan jäsenten lukumäärä on

$$n = 22 - 0 + 1 = 23$$ 1 p (2 p)

Lasketaan kysytty aritmeettinen summa.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ \sum_{n=0}^{22}(3+4n) &= S_{23} \\ &= \frac{23(3+91)}{2} \\ &= 1081 \end{aligned}$$

Vastaus: Summa on 1081. 1 p (3 p)

b)

$$\sum_{n=2}^{15}(-3)^n$$

Tutkitaan lukujonoa $a_n = (-3)^n$. Kaksi peräkkäistä jäsentä ovat

$$a_{n+1} = (-3)^{n+1} \quad \text{ja} \quad a_n = (-3)^n$$

Huomataan, että kyseessä on geometrinen jono, sillä

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-3)^{n+1}}{(-3)^n} = (-3)^{n+1-n} = -3$$

Kyseisen geometrisen jonon suhdeluku on siten

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = -3$$ 1 p (4 p)

Lasketaan vastaavan aritmeettisen summan ensimmäinen jäsen:

$$a_2 = (-3)^2 = 9$$

Summan jäsenten lukumäärä on

$$n = 15 - 2 + 1 = 14$$ 1 p (5 p)

Lasketaan kysytty geometrinen summa.

$$S_n = \frac{A(1-Q)^N}{1-Q}$$

Nyt $A = a_2 = 9$, $Q = q = -3$ ja $N = n = 14$, joten

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{15}(-3)^n &= S_{14} \\ &= \frac{9(1-(-3)^{14})}{1-(-3)} \\ &= -10761678\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Summa on } -10761678.}}$ 1 p (6 p)

6. Japanilainen auto kuluttaa 6,8 l sadalla kilometrillä. Amerikkalainen auto kuluttaa yhden gallonan 32 mailin matkalla, eli 3,785 l matkalla

$$\begin{aligned} s_1 &= 32 \cdot 1{,}609\,\mathrm{km} \\ &= 51{,}488\,\mathrm{km} \end{aligned}$$ 1 p

Lasketaan, paljonko amerikkalainen auto kuluttaisi 100 km:n matkalla.

matka (km)	kulutettu bensiini (l)
51,488	3,785
100	x

1 p (2 p)

Kuljettu matka ja kulutus ovat suoraan verrannolliset, joten saadaan verranto:

$$\begin{aligned} \frac{x}{100} &= \frac{3{,}785}{51{,}488} \quad \| \cdot 100 \\ x &= \frac{3{,}785 \cdot 100}{51{,}488} \\ &= 7{,}3512\ldots\ (\mathrm{l}) > 6{,}8\ (\mathrm{l}) \end{aligned}$$

Vastaus: Japanilainen auto kuluttaa vähemmän. 4 p (6 p)

7. a)

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars	Jupiter
x	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861
$\sqrt[3]{x}$	0,622	0,850	1,0	1,234	2,281
y	0,387	0,723	1,0	1,523	5,203
$\sqrt{y}$	0,622	0,850	1,0	1,234	2,281

2 p

b) Taulukosta huomataan, että

$$\sqrt{y} = \sqrt[3]{x} \quad \|(\,)^2 \qquad \text{1 p (3 p)}$$

$$\underline{\underline{y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}} \qquad \text{1 p (4 p)}$$

c) Nyt $x = 29{,}457$ ja b-kohdan mukaan

$$\begin{aligned} y &= \left(\sqrt[3]{29{,}457}\right)^2 \\ &= 9{,}53803\ldots \\ &\approx \underline{\underline{9{,}538}} \qquad \text{2 p (6 p)} \end{aligned}$$

8. a) Lasketaan kuinka monta erilaista pitsavaihtoehtoa on. Täytteitä voi valita 2 tai 3. Kun valitaan 2 täytettä 15 täytteestä, erilaisia täyteyhdistelmiä on

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = 105\,(\text{kpl})$$

Kun valitaan 3 täytettä, täyteyhdistelmiä on

$$\binom{15}{3} = 455\,(\text{kpl})$$

Yhteensä erilaisia täyteyhdistelmiä on siis

$$105 + 455 = 560\,(\text{kpl})$$ 1 p

Jokaista pohjavaihtoehtoa (3 kpl) kohti on siis 560 erilaista täyteyhdistelmää, joten erilaisten pitsojen lukumäärä saadaan tuloperiaatteella:

$$3 \cdot 560 = 1680\,(\text{kpl})$$ 1 p (2 p)

Viikossa Veetu syö 5 pitsaa, joten erilaisia pitsavaihtoehtoja riittää

$$\frac{1680}{5} = 336 \text{ viikoksi}$$

Vastaus: 336 viikkoa 1 p (3 p)

b) 7,50 euron pitsoja (peruspohja + 2 täytettä) on 105 kpl. 8,50 euron pitsoja (peruspohja + 3 täytettä tai ruispohja + 2 täytettä) on

$$455 + 105 = 560 \text{ kpl}$$

9,50 euron pitsoja (ruispohja + 3 täytettä) on 455 kpl. 10,50 euron pitsoja (pannupohja + 2 täytettä) on 105 kpl. 11,50 euron pitsoja (pannupohja + 3 täytettä) on 455 kpl. Keskihinta on: 1 p (4 p)

$$\begin{aligned}\frac{7{,}50 \cdot 105 + 8{,}50 \cdot 560 + 9{,}50 \cdot 455 + 10{,}50 \cdot 105 + 11{,}50 \cdot 455}{1680} &= \frac{16205}{1680} \\ &= 9{,}6458\ldots \\ &\approx 9{,}65\,(\text{€})\end{aligned}$$

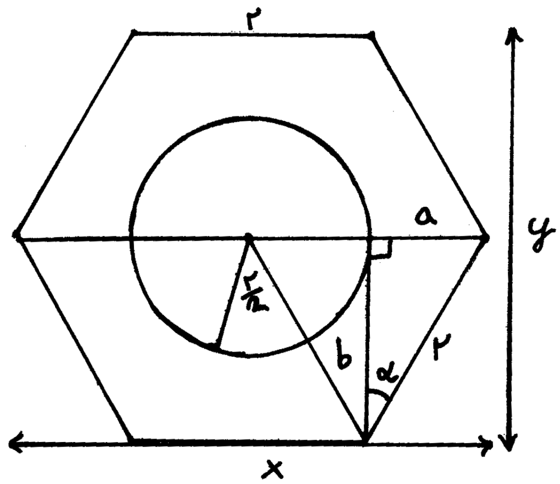
Vastaus: Keskimääräinen hinta on 9,65 €. 2 p (6 p)

9. a) Säännöllisen kuusikulmion kulmien summa on

$$(6-2)\cdot 180^\circ = 4\cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Täten yksi kulma on

$$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$$



Kuvasta saadaan

$$\begin{aligned} \alpha + 90^\circ &= 120^\circ \quad \| - 90^\circ \\ \alpha &= 30^\circ \end{aligned}$$ 1 p

Täten saadaan

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{r} \quad \| \cdot r \\ a &= r\cdot \sin\alpha \\ &= r\sin 30^\circ \\ &= r\cdot\frac{1}{2} = \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Täten leveys x saadaan laskettua:

$$x = r + 2a = r + 2\cdot\frac{r}{2} = r + r = \underline{\underline{2r}}$$ 1 p (2 p)

b) Kuvasta nähdään, että tasasivuisen kolmion (sivun pituus r) korkeus on puolet kuusikulmion korkeudesta y. Täten taulukkokirjan kaavalla saadaan:

$$\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}r}{2} \quad \| \cdot 2$$
$$y = \underline{\underline{\sqrt{3}r}}$$

2 p (4 p)

c) Kuusikulmio voidaan kuvan mukaisesti jakaa kahteen yhtä suureen puolisuunnikkaaseen. Näiden pinta-ala on

$$\begin{aligned} &2 \cdot \frac{r+x}{2} \cdot \frac{y}{2} \\ &= (r+2r) \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2} \\ &= 3r \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}r^2}{2} \end{aligned}$$

1 p (5 p)

Ympyrän pinta-ala on

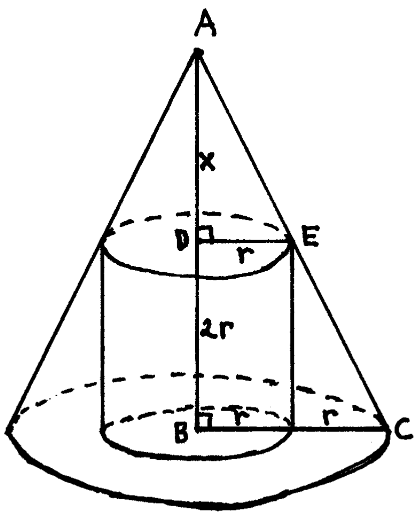
$$\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

Väliin jäävä pinta-ala on siis

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 - \frac{\pi}{4}r^2 = \underline{\underline{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) r^2}}$$

1 p (6 p)

10.



Kolmiot ABC ja ADE ovat yhdenmuotoiset (kk), sillä niillä on suoran kulman lisäksi kärjessä A yhteinen kulma. Siten

1 p

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$$ 1 p (2 p)

$$\frac{2\cancel{r}}{\cancel{r}} = \frac{x+2r}{x} \quad \| \cdot x \,(\text{oltava } x \neq 0)$$

$$2x = x + 2r$$

$$x = 2r$$ 1 p (3 p)

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V_1 &= A_p \cdot h \\ &= \pi r^2 \cdot 2r \\ &= 2\pi r^3 \end{aligned}$$ 1 p (4 p)

Kartion tilavuus on

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{A_p \cdot h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot (2r)^2 \cdot 4r}{3} \\ &= \frac{16\pi r^3}{3} \end{aligned}$$ 1 p (5 p)

Kysytty prosenttiosuus on

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V_2} &= \frac{2\cancel{\pi r^3}}{\frac{16\cancel{\pi r^3}}{3}}\\ &= \frac{6}{16}\\ &= \frac{3}{8}\\ &= 0{,}375\\ &= \underline{\underline{37{,}5\%}}\end{aligned}$$

1 p (6 p)

11. Sääriluun pituudet:

$$\begin{array}{ll} & x \text{ on henkilön pituus} \\ \text{naiset} & y = 0{,}43x - 27 \\ \text{miehet} & y = 0{,}45x - 31 \end{array}$$

a) $y = 41\,(\text{cm})$
Ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 41 &= 0{,}43x - 27 && \text{1 p} \\ 0{,}43x &= 41 + 27 \\ 0{,}43x &= 68 \quad \| : 0{,}43 \\ x &= \frac{68}{0{,}43} \\ x &= 158{,}139\ldots \\ &\approx 160\,(\text{cm}) && \text{2 p (3 p)} \end{aligned}$$

Vastaus: Nainen oli 160 cm pitkä.

b) Lasketaan sääriluun pituus, kun $x = 175\,(\text{cm})$.

$$y = 0{,}45 \cdot 175 - 31 = 47{,}75\,(\text{cm}) \qquad \text{1 p (4 p)}$$

Vastaus: Löytynyt sääriluu oli 42 cm, joten kyseessä ei ole saman henkilön luu. 2 p (6 p)

12. Merkitään

$$
\begin{aligned}
K &= 6{,}4 \\
n &= 2010 - 2004 = 6 \\
K_6 &= 6{,}8
\end{aligned}
$$

Saadaan yhtälö

$$K_6 = Kq^n, \quad \text{missä } q \text{ on korkotekijä}$$

Siis

$$
\begin{aligned}
6{,}8 &= 6{,}4 \cdot q^6 \quad \| : 6{,}4 && \text{1 p} \\
q^6 &= \frac{6{,}8}{6{,}4} \\
q &= \underset{(-)}{+} \sqrt[6]{\frac{6{,}8}{6{,}4}} \\
&= 1{,}010155\ldots && \text{1 p (2 p)}
\end{aligned}
$$

Väkiluku ylittää 10 miljardia, kun

$$
\begin{aligned}
10 &= 6{,}4 \cdot q^n \quad \| : 6{,}4 && \text{1 p (3 p)} \\
q^n &= \frac{10}{6{,}4} \quad \| \lg(\,) \\
n \lg q &= \lg \frac{10}{6{,}4} \quad \| : \lg q \\
n &= \frac{\lg \frac{10}{6{,}4}}{\lg q} \quad \| \text{sijoitetaan } q && \text{1 p (4 p)} \\
n &= \frac{\lg \frac{10}{6{,}4}}{\lg 1{,}010155\ldots} \\
n &= 44{,}16688\ldots && \text{1 p (5 p)}
\end{aligned}
$$

Väkiluku ylittää 10 miljardia sina vuonna, kun vuodesta 2004 on kulunut

$$n \approx 45 \text{ vuotta}$$

Siis vuonna

$$2004 + 45 = 2049$$

Vastaus: Vuonna 2049. 1 p (6 p)

13. Karoliinan talletukselle maksetaan korkoa 2,20%, eli vuodessa

$$10\,000\,€ \cdot 0{,}022 = 220\,€. \qquad \text{1 p}$$

Korosta menee veroa 30%, joten jäljelle jää

$$100\% - 30\% = 70\%, \quad \text{eli}$$
$$220\,€ \cdot 0{,}7 = 154\,€. \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Petteri talletti ensin puoleksi vuodeksi 2,35% korolla, eli korkoa tuli nettona

$$\frac{10\,000\,€ \cdot 0{,}0235 \cdot 0{,}7}{2} = 82{,}25\,€. \qquad \text{1 p (3 p)}$$

Uuden pääoman, eli

$$10\,000\,€ + 82{,}25\,€ = 10\,082{,}25\,€ \qquad \text{1 p (4 p)}$$

Petteri talletti edelleen puoleksi vuodeksi 2,00% korolla, eli nettona korko oli

$$\frac{10\,082{,}25\,€ \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}7}{2} = 70{,}57575\,€. \qquad \text{1 p (5 p)}$$

Kaikkiaan Petterin nettovuosituotto oli

$$82{,}25\,€ + 70{,}57575\,€ = 152{,}82575\,€ < 154\,€.$$

Vastaus: Karoliina teki paremman sijoituksen, sen arvo oli vuoden kuluttua 10 154 €. 1 p (6 p)

14.

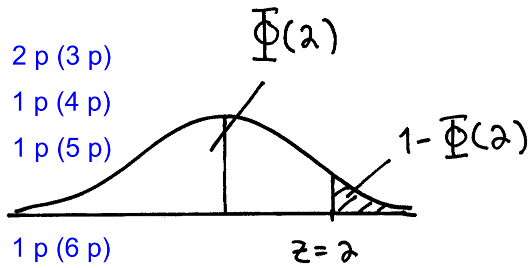
$$\begin{aligned} \text{keskiarvo} \quad & \overline{x} = 0{,}215\,\% \\ \text{keskihajonta} \quad & s = 0{,}005\,\% \\ \text{sallittu raja} \quad & x = 0{,}225\,\% \end{aligned}$$

Normitus:

$$z = \frac{x - \overline{x}}{s} = \frac{0{,}225\,\% - 0{,}215\,\%}{0{,}005\,\%} = 2 \qquad \text{1 p}$$

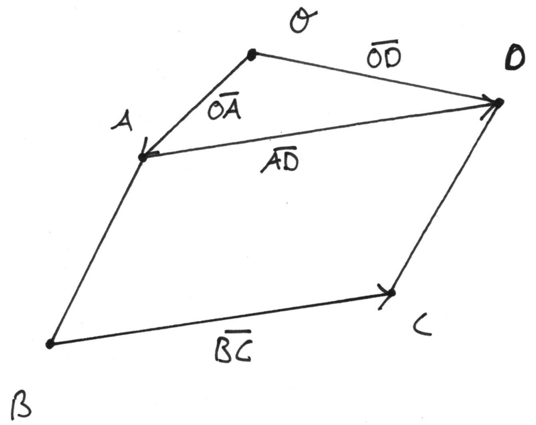
Nyt siis todennäköisyys

$$\begin{aligned} P(x \geq 0{,}225\,\%) &= P(z \geq 2) \\ &= 1 - P(z \leq 2) && \text{2 p (3 p)} \\ &= 1 - \Phi(2) && \text{1 p (4 p)} \\ &= 1 - 0{,}9772 && \text{1 p (5 p)} \\ &= 0{,}0228 \\ &\approx \underline{\underline{2{,}3\,\%}} && \text{1 p (6 p)} \end{aligned}$$



15.

$$\overline{OA} = 4\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$$
$$\overline{OB} = 6\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$$
$$\overline{OC} = 7\overline{i} + 9\overline{j} + 3\overline{k}$$



Määritetään vektori $\overline{BC}$.

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB}\\ &= (7-6)\overline{i} + (9-5)\overline{j} + (3-2)\overline{k}\\ &= \overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k} \qquad \text{1 p}\end{aligned}$$

Vektorit $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ ovat samat, eli

$$\overline{AD} = \overline{BC} \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Määritetään paikkavektori $\overline{OD}$.

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{AD} \quad \| \text{sij. } \overline{AD} = \overline{BC}\\ \overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{BC}\\ \overline{OD} &= 4\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k} + \overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}\\ &= 5\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k} \qquad \text{2 p (4 p)}\end{aligned}$$

Lasketaan lävistäjävektorit

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA}\\ &= (7-4)\overline{i} + (9-2)\overline{j} + (3-1)\overline{k}\\ &= 3\overline{i} + 7\overline{j} + 2\overline{k} \qquad \text{1 p (5 p)}\\ \overline{BD} &= \overline{OD} - \overline{OB}\\ &= (5-6)\overline{i} + (6-5)\overline{j} + (2-2)\overline{k}\\ &= -\overline{i} + \overline{j}\end{aligned}$$

Vastaus: $\overline{OP} = 5\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k}$

$\overline{AC} = 3\overline{i} + 7\overline{j} + 2\overline{k}$

$\overline{BC} = -\overline{i} + \overline{j}$

1 p (6 p)