

MAFYNETTI



Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $7x + 3 = 31$.

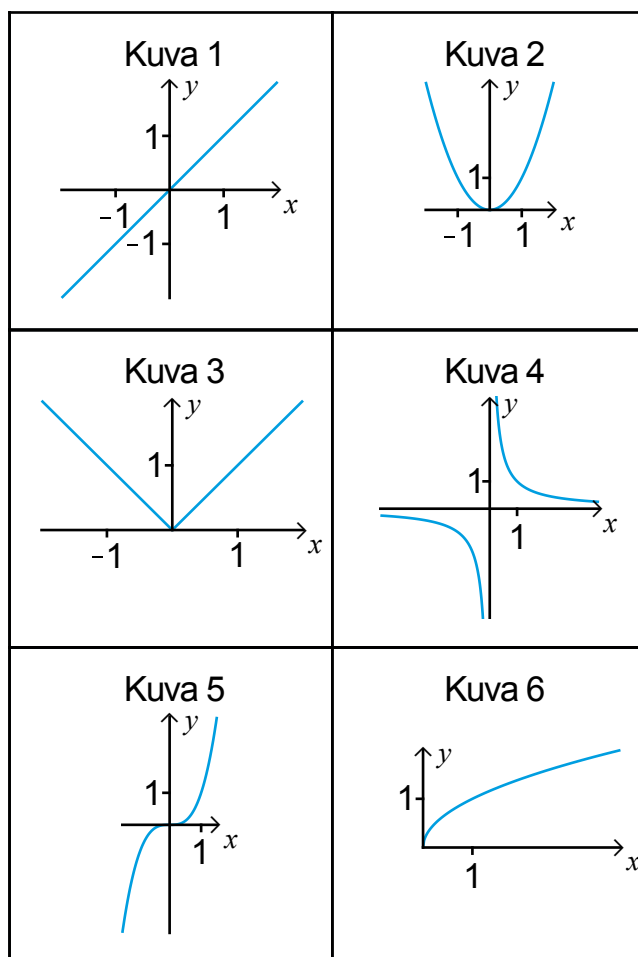
b) Laske lausekkeen $\frac{2a+3b}{a-b}$ arvo, kun $a = \frac{5}{2}$ ja $b = \frac{7}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

2. Kuvissa 1–6 on oheisessa taulukossa mainittujen funktioiden $y = f(x)$ kuvaajat. Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaaja esittää annettua funktiota.

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	\sqrt{x}	x^3	$ x $
Kuva						



3. a) Ratkaise yhtälö $\frac{7x + \frac{1}{2}}{3} - \frac{3x - \frac{1}{3}}{2} = 2$.

b) Ratkaise yhtälö $27^{x-2} = 9^{\frac{x}{2}}$.

4. a) Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x + b$ nollakohta on 2. Määritä vakion b arvo.

b) Missä pisteessä a-kohdan funktion kuvaaja leikkaa y -akselin?

c) Kuinka suuren terävän kulman a-kohdan funktion kuvaaja muodostaa x -akselin kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

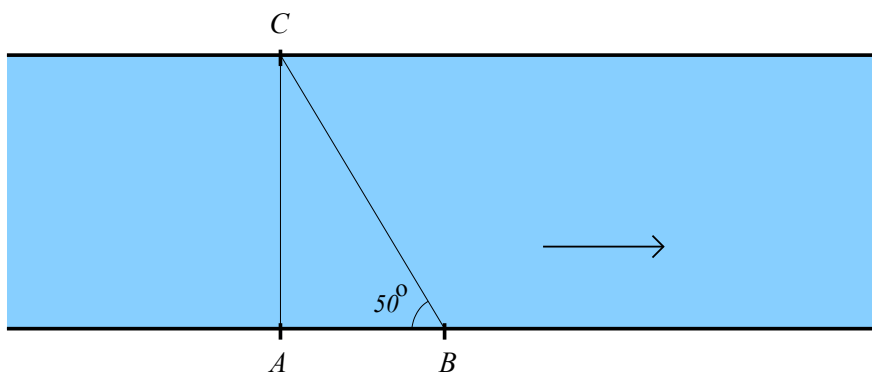
5. Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x+3)(x^2-4)$.

a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.

b) Määritä derivaatta $f'(x)$.

c) Laske derivaatan nollakohdat.

6. Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C . Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B , josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella.



7. Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella.

8. Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?
9. Farao Djoser (hallitsi 2667–2648 eaa.) suunnitteli porrasyramidia, jossa on päällekkäin 100 suorakulmaista neliöpohjaista särmiötä niin, että kaikilla on sama korkeus ja jokaisen pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin alla olevan pohjasärmä. Alimmaisen särmiön tilavuus on $10\,000\text{ m}^3$. Määritä tällaisen porrasyramidin tilavuus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



Porrasyramidi

<<http://fi.wikipedia.org/wiki/Djoser>>. Luettu 29.3.2011.

10. Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

$$1,44M = \log_{10} E - 5,24,$$

jossa E on järityksessä vapautuva energia.

- a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järityksen voimakkuus oli 9,0. Laske järityksessä vapautunut energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
- b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järityksen voimakkuus oli 6,8. Kuinka moninkertainen oli Sendain järityksessä vapautunut energia Koben järitykseen verrattuna?
11. Levitoimiseen tarvittavassa taikajuomassa on oltava vähintään 20 hyppysellistä jauhettua lepakon siipeä ja vähintään 10 hyppysellistä hämähäkin seittiä. Taikajuomapuodissa on kahta valmissekoitetta Ascensus ja Sursum. Pikarillinen Ascensusta maksaa kaksi kultarahaa, ja siinä on kolme hyppysellistä lepakon siipeä ja kaksi hyppysellistä hämähäkin seittiä. Pikarillinen Sursumia maksaa kolme kultarahaa. Siinä puolestaan on neljä hyppysellistä lepakon siipeä ja yksi hyppysellinen hämähäkin seittiä. Kuinka paljon kumpaakin sekoitetta kannattaa levitoijakokeilaan ostaa, jotta hän saisi taikajuoman mahdollisimman edullisesti?

12. Leonardo Pisano (1170–1250), kutsumanimeltään Fibonacci, määritteli noin vuonna 1210 lukujonon (f_n) kaavoilla

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

a) Määritä luvut f_3, f_4, \dots, f_{10} .

b) Kreikkalaiset kutsuivat lukua $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618034$ kultaiseksi leikkaukseksi. Sen avulla saadaan Fibonaccin luvuille kaava

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Näytä, että kaava on oikea, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

c) Näytä, että yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret ovat φ ja $-\frac{1}{\varphi}$.

13. Simeoni osti Saapasnahkatornin 12 000 eurolla ja teetti siihen myöhemmin 4 000 euron peruskorjauksen. Yksitoista vuotta myöhemmin hän myi sen Juhanille 42 000 eurolla. Voitosta on maksettava 30 % pääomatuloveroa. Verottaja tulkitsee voitoksi summan, joka saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään ostohinta ja peruskorjauskulut. Toisaalta Simeoni voi myös halutessaan käyttää ns. hankintameno-olettamaa. Tällöin myyntihinnasta vähennetään 20 %, jos on omistanut tornin alle 10 vuotta, ja 40 %, jos on omistanut yli 10 vuotta. Mitään muita vähennyksiä ei saa tehdä. Jäljelle jääneestä summasta maksetaan 30 % pääomatuloveroa.

- a) Paljonko Simeonille jää myyntihinnasta verotuksen jälkeen, kun hän valitsee edullisemman vaihtoehdon?
- b) Mikä olisi sellainen myyntihinta, että Simeoni maksaisi kummassakin verotusvaihtoehdossa yhtä suuren veron?

14. Vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa on eräällä paikkakunnalla normaalijakautunut niin, että odotusarvo on $4,0^\circ\text{C}$ ja 90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on $2,0^\circ\text{C} - 6,0^\circ\text{C}$. Laske keskilämpötilan keskihajonta.

15. a) Määritä yhtälön

$$\sin(2x + 4^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ratkaisut välillä $x \in [0^\circ, 90^\circ]$.

- b) Määritä a-kohdan yhtälön kaikki ratkaisut.

Arviomme tehtävien pisteytyksestä on merkitty sinisellä tekstillä.

Lyhyt matematiikka, kevät 2012

Mallivastaukset, 23.3.2012

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Antti on toiminut neljä vuotta tuntiopettajana Teknillisessä korkeakoulussa ja sen jälkeen lukiossa. Antti ja Teemu ovat perustaneet MAFY-valmennuksen ja opettavat sen kaikilla kursseilla ympäri vuoden. Nämä mallivastaukset ovat Antti Suominen Oy:n omaisuutta.

MAFY-valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Julkaisemme internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MAFY-valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää tätä tehtäväpakettia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MAFY-valmennuksen yhteystiedot:

internet: www.mafyvalmennus.fi
s-posti: info@mafyvalmennus.fi
puhelin: (09) 3540 1373

1. a)

$$7x + 3 = 31$$

$$7x = 28 \quad || : 7$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

2 p

b)

$$a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2a + 3b}{a - b} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2) \frac{7}{3}}$$

$$= \frac{5 + 7}{\frac{15}{6} - \frac{14}{6}}$$

$$= \frac{12}{\frac{15-14}{6}}$$

$$= \frac{12}{\frac{1}{6}}$$

$$= 12 \cdot \frac{6}{1}$$

$$= \underline{\underline{72}}$$

1 p (3 p)

1 p (4 p)

c)

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

(1)

$$3x + 0 = 9 \quad || : 3$$

$$x = 3$$

1 p (5 p)

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön (1).

$$3 + y = 8$$

$$y = 5$$

Vastaus: $x = 3, y = 5$

1 p (6 p)

2.

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	\sqrt{x}	x^3	$ x $
kuva	2	4	1	6	5	3

1 p jokaisesta oikeasta vastauksesta

3. a)

$$\begin{aligned} \frac{7x + \frac{1}{2}}{3} - \frac{3x - \frac{1}{3}}{2} &= 2 \quad || \cdot 6 \\ \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \left(7x + \frac{1}{2}\right)}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \left(3x - \frac{1}{3}\right)}{\underset{1}{\cancel{2}}} &= 12 && \mathbf{1 \text{ p}} \\ 2 \left(7x + \frac{1}{2}\right) - 3 \left(3x - \frac{1}{3}\right) &= 12 \\ 14x + 1 - 9x + 1 &= 12 && \mathbf{1 \text{ p (2 p)}} \\ 5x = 10 & \quad || : 5 \\ \underline{\underline{x = 2}} & && \mathbf{1 \text{ p (3 p)}} \end{aligned}$$

b) TAPA I:

$$\begin{aligned} 27^{x-2} &= 9^{\frac{x}{2}} \\ (3^3)^{x-2} &= (3^2)^{\frac{x}{2}} \\ 3^{3 \cdot (x-2)} &= 3^{2 \cdot \frac{x}{2}} && \mathbf{1 \text{ p (4 p)}} \\ 3^{3x-6} &= 3^x \quad (\text{saman kantaluvun potenssi}) \\ 3x - 6 &= x && \mathbf{1 \text{ p (4 p)}} \\ 2x &= 6 \quad || : 2 \\ \underline{\underline{x = 3}} & && \mathbf{1 \text{ p (6 p)}} \end{aligned}$$

TAPA II:

$$\begin{aligned} 27^{x-2} &= 9^{\frac{x}{2}} \quad || \lg() \\ \lg 27^{x-2} &= \lg 9^{\frac{x}{2}} \\ (x-2) \cdot \lg 27 &= \frac{x}{2} \cdot \lg 9 \quad || \cdot 2 && \mathbf{1 \text{ p (4 p)}} \\ (2x-4) \lg 27 &= x \lg 9 \\ x \cdot 2 \lg 27 - 4 \cdot \lg 27 &= x \cdot \lg 9 \\ x \cdot 2 \lg 27 - x \lg 9 &= 4 \lg 27 && \mathbf{1 \text{ p (5 p)}} \\ x(2 \lg 27 - \lg 9) &= 4 \lg 27 \quad || : (2 \lg 27 - \lg 9) \\ x &= \frac{4 \lg 27}{2 \lg 27 - \lg 9} \\ \underline{\underline{x = 3}} & && \mathbf{1 \text{ p (6 p)}} \end{aligned}$$

4. a)

$$f(x) = \frac{3}{2}x + b$$

Nollakohta on 2, joten

$$f(2) = 0 \quad 1 \text{ p}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 2 + b = 0$$

$$3 + b = 0$$

$$\underline{\underline{b = -3}} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

b) Kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $x = 0$.
Leikkauskohta y-akselilla on b, eli $y = -3$.

Vastaus: Pisteessä $(0, -3)$. 2 p (4 p)

c) Funktion kuvaaja $y = f(x)$, eli $y = \frac{3}{2}x - 3$ on suora, jonka kulmakerroin on $k = \frac{3}{2}$. Suoran suuntakulma α on terävä kulma x-akselin ja suoran välillä. Suuntakulmalle α pätee

$$\tan \alpha = k$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{2} \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$\alpha = 56,309 \dots^\circ$$

$$\approx 56,3^\circ$$

Vastaus: Kulma on $56,3^\circ$. 1 p (6 p)

5.

$$f(x) = (x + 3)(x^2 - 4)$$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x + 3)(x^2 - 4) &= 0 \quad (\text{tulon nollasääntö}) \\ x + 3 &= 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4 = 0 && \mathbf{1 \text{ p}} \\ \underline{x = -3} & \quad \text{tai} \quad x^2 = 4 \\ & & x = \pm\sqrt{4} \\ & & \underline{x = \pm 2} && \mathbf{1 \text{ p (2 p)}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 3)(x^2 - 4) \\ f(x) &= x^3 - 4x + 3x^2 - 12 \\ f(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x - 12 && \mathbf{1 \text{ p (3 p)}} \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio.

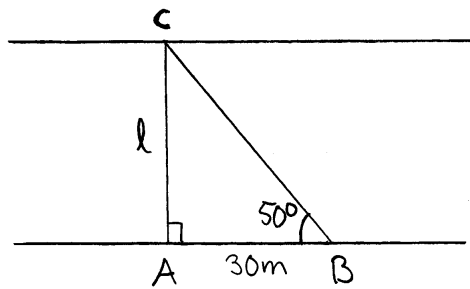
$$\underline{f'(x) = 3x^2 + 6x - 4} \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}$$

c) Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 6x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} \\ x &= \frac{-6 \pm \sqrt{84}}{6} && \mathbf{1 \text{ p (5 p)}} \\ x &= \frac{-6 + \sqrt{84}}{6} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 - \sqrt{84}}{6} \\ x &= 0,5275 \dots \quad \text{tai} \quad x = -2,5275 \dots \\ x &\approx 0,53 \quad \text{tai} \quad x \approx -2,53 \end{aligned}$$

Vastaus: Derivaatan nollakohdat ovat $x = -2,53$ tai $x = 0,53$. $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

6.



Kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio, jossa kateetit ovat sivut $AC = l$ ja $AB = 30\text{ m}$. 2 p

$$\tan 50^\circ = \frac{l}{30} \quad || \cdot 30 \quad 2 \text{ p (4 p)}$$

$$l = \tan 50^\circ \cdot 30$$

$$l = 35,752\dots \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$\approx 36 \text{ (m)}$$

Vastaus: Joen leveys on 36 m.

1 p (6 p)

7. Merkitään kahta ensimmäistä sähköpostin saajaa a_0 :lla ja n :ssä vaiheessa olevien sähköpostin saajien määrää a_n :llä.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = 2^1 \\ a_1 &= 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 2 = 2^2 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2^2 = 2^3 \\ &\vdots \\ a_n &= 2^{n+1} \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Eri vaiheissa sähköpostin saajien yhteenlaskettu määrä muodostuu geometrisesta summasta

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1},$$

jossa $a_1 = 2$, $q = 2$ ja $N = n + 1$. $\mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$

Muodostetaan summan lauseke.

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{a_1(1 - q^N)}{1 - q} \\ S_n &= \frac{2(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} \\ S_n &= \frac{2(1 - 2^{n+1})}{-1} \\ S_n &= -2(1 - 2^{n+1}). \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

Lasketaan, millä n :llä summan arvo saavuttaa 20000.

$$\begin{aligned} S_n &= 20000 \\ -2(1 - 2^{n+1}) &= 20000 \quad \parallel : (-2) \\ 1 - 2^{n+1} &= -10000 \\ -2^{n+1} &= -10001 \quad \parallel \cdot (-1) \\ 2^{n+1} &= 10001 \quad \parallel \lg () \\ \lg 2^{n+1} &= \lg 10001 \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}} \\ (n + 1) \lg 2 &= \lg 10001 \quad \parallel : \lg 2 \\ n &= \frac{\lg 10001}{\lg 2} - 1 \\ n &= 12,287\dots \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}} \end{aligned}$$

20000 ihmistä saavutetaan siis, kun $n = 13$. Lasketaan arvoa $n = 13$ vastaava aika minuuteissa.

$$t = 13 \cdot 10 \text{ min} = 130 \text{ min}$$

Vastaus: Aikaa kuluu 130 minuuttia.

1 p (6 p)

8. Alkuhinta on $K_0 = 45 \text{ €}$. Vuotuinen kasvu on 2,5 prosenttia. Hinta kasvaa saman prosenttiosuuden verran vuosittain, joten kasvu on eksponentiaalista.

Hinta on n :n vuoden kuluttua

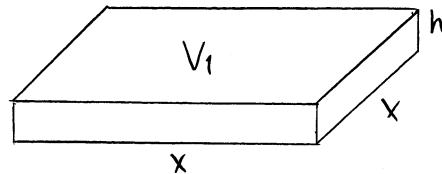
$$K_n = q^n K_0 \quad , \text{ missä } q = 1 + \frac{p}{100}. \quad 2 \text{ p}$$

Lasketaan hinta 10 vuoden kuluttua.

$$\begin{aligned} K_{10} &= \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{10} \cdot 45 && 2 \text{ p (4 p)} \\ &= 57,6038 \dots \\ &\approx 57,60 \text{ (€)} \end{aligned}$$

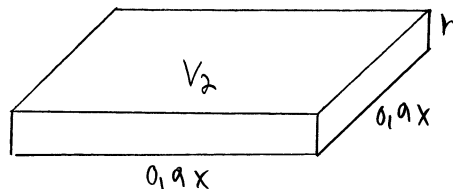
Vastaus: Hiustenleikkaus maksaa 57,60 €. 2 p (6 p)

9. Alimman särmiön tilavuus on $V_1 = 10000 \text{ m}^3$.



$$V_1 = x^2 h$$

Seuraavan särmiön tilavuus on V_2 .



$$V_2 = 0,9x \cdot 0,9x \cdot h = 0,81x^2 h = 0,81V_1 \quad 1 \text{ p}$$

Päällekkäisten särmiöiden tilavuuksien suhde on

$$q = \frac{V_2}{V_1} = \frac{0,81V_1}{V_1} = 0,81$$

$$V_3 = 0,81V_2 = 0,81^2 V_1 \text{ jne.} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Pyramidin kerroksien tilavuudet muodostavat geometrisen summan

$$S_n = \underbrace{V_1 + 0,81V_1 + 0,81^2 V_1 + \dots + 0,81^{n-1} V_1}_{\text{Geometrisen summa, jossa } a_1 = V_1, q = 0,81 \text{ ja } N = n} \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

$$S_N = \frac{a_1(1 - q^N)}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{V_1(1 - 0,81^n)}{1 - 0,81} \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

Tässä $n = 100$ ja $V_1 = 10000$.

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{10000(1 - 0,81^{100})}{1 - 0,81} && 1 \text{ p (5 p)} \\ &= 52631,57 \dots \\ &\approx 52600 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus: Pyramidin tilavuus on 52600 m³. 1 p (6 p)

10. Järistyksen voimakkuus M saadaan yhtälöstä

$$1,44M = \log_{10} E - 5,24. \quad (1)$$

a) $M = 9,0$

Ratkaistaan E_1 yhtälöstä (1).

$$\begin{aligned} 1,44 \cdot 9,0 &= \log_{10} E_1 - 5,24 && \mathbf{1\ p} \\ 12,96 + 5,24 &= \log_{10} E_1 \\ \log_{10} E_1 &= 18,2 \quad \parallel 10^{(\cdot)} \\ 10^{\log_{10} E_1} &= 10^{18,2} && \mathbf{1\ p\ (2\ p)} \\ E_1 &= 1,5848 \dots \cdot 10^{18} \\ &\approx 1,6 \cdot 10^{18} \text{ (J)} \end{aligned}$$

Vastaus: Energia oli $1,6 \cdot 10^{18}$ J. **1 p (3 p)**

b) $M = 6,8$

Ratkaistaan E_2 yhtälöstä (1).

$$\begin{aligned} 1,44 \cdot 6,8 &= \log_{10} E_2 - 5,24 \\ \log_{10} E_2 &= 15,032 \quad \parallel 10^{(\cdot)} \\ 10^{\log_{10} E_2} &= 10^{15,032} \\ E_2 &= 1,0764 \dots \cdot 10^{15} && \mathbf{1\ p\ (4\ p)} \end{aligned}$$

Lasketaan suhde

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &= \frac{10^{18,2}}{10^{15,032}} \quad \parallel \cdot E_2 \\ E_1 &= 1472,31 \dots \cdot E_2 \\ E_1 &\approx 1500 \cdot E_2 \end{aligned}$$

Vastaus: Sendain järistyksessä vapautui 1500-kertainen energia Kobaen verrattuna.

2 p (6 p)

11. Merkitään Ascensus-pikarien määrää x :llä ja Sursum-pikarien määrää y :llä. Taikajuomassa on 20 hyppysellistä lepakonsiipiä. Eri juomista saadaan yhteensä

$$3x + 4y \text{ lepakonsiipiä.}$$

Alaraja määrille on

$$3x + 4y \geq 20.$$

Taikajuomassa on 10 hyppysellistä hämähäkinseittiä. Eri juomista saadaan yhteensä

$$2x + y \text{ hämähäkinseittiä.}$$

Alaraja määrille on

$$2x + y \geq 10.$$

Lisäksi molempia juomia on vähintään 0, eli

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0.$$

1 p

Juoma tulee maksamaan yhteensä $2x + 3y$ euroa. Etsitään hinnalle pienin arvo lineaarisella optimoinnilla.

Etsitään rajasuorat kuvion piirtämistä varten.

1°

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\geq 20 \\ 4y &\geq -3x + 20 \quad || : 4 \\ y &\geq -\frac{3}{4}x + 5 \end{aligned}$$

Rajasuora on

$$y = -\frac{3}{4}x + 5.$$

2°

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 10 \\ y &\geq -2x + 10 \end{aligned}$$

Rajasuora on

$$y = -2x + 10.$$

3°

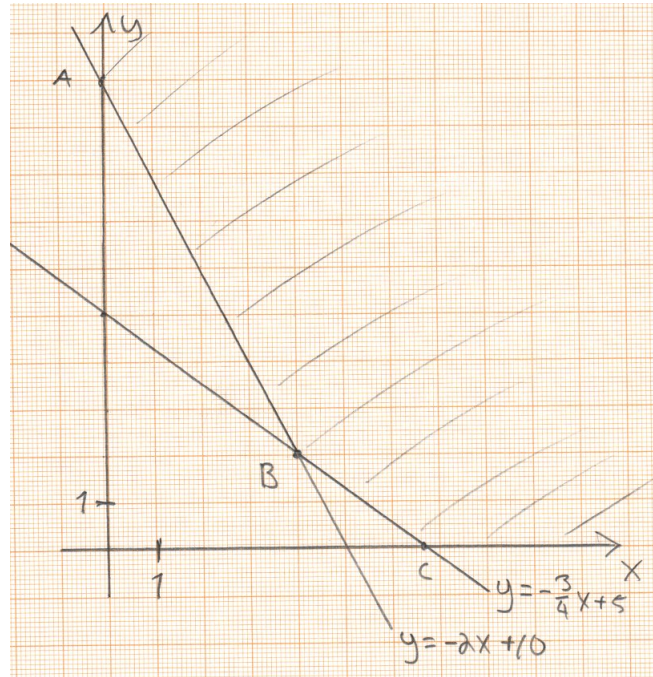
$$x \geq 0$$

Rajasuora on y -akseli.

4°

$$y \geq 0$$

1 p (2 p)

Rajasuora on x -akseli.

1 p (3 p) Hinnan pienin arvo näin rajatussa alueessa löytyy suorien leikkauspisteistä A, B tai C. Määritetään pisteet.

A: $A = (0, 10)$

B: Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 5 & (1) \\ y = -2x + 10 & (2) \end{cases}$$

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} -2x + 10 &= -\frac{3}{4}x + 5 \\ -2x + \frac{3}{4}x &= -5 \\ -\frac{5}{4}x &= -5 \quad \parallel \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 4$ yhtälöön (2), saadaan

$$y = -2 \cdot 4 + 10 = 2.$$

Saadaan piste

$$B = (4, 2). \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

C:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 0 &= -\frac{3}{4}x + 5 \\ \frac{3}{4}x &= 5 \quad \parallel \cdot \frac{4}{3} \\ x &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

$$C = \left(\frac{20}{3}, 0\right) \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

Lasketaan hinnat $2x + 3y$ eri pisteissä.

$$A: 2 \cdot 0 + 3 \cdot 10 = 30 \text{ (kultarahaa)}$$

$$B: 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14 \text{ (kultarahaa)}$$

$$C: 2 \cdot \frac{20}{3} + 3 \cdot 0 = 13\frac{1}{3} \text{ (kultarahaa) \quad pienin määrä}$$

Vastaus: Kannattaa ostaa $\frac{20}{3}$ pikarillista Ascensusta eikä lainkaan

Sursumia.

1 p (6 p)

12. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_1 = f_2 = 1$, $n = 1, 2, \dots$

a)

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = 2 + 1 = 3 \quad \text{1 p}$$

$$f_5 = 3 + 2 = 5$$

$$f_6 = 5 + 3 = 8$$

$$f_7 = 8 + 5 = 13$$

$$f_8 = 13 + 8 = 21$$

$$f_9 = 21 + 13 = 34$$

$$f_{10} = 34 + 21 = 55 \quad \text{1 p (2 p)}$$

b) Kultaisen leikkauksen avulla saadaan

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^1 - \left[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^{-1} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(1+\sqrt{5})^1 \cdot 1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 + 4}{2 + 2\sqrt{5}} \\
 &= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 2 \cdot 5} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} = 1 \quad \text{1 p (3 p)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^2 - \left[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^{-2} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} \cdot (1 + 2\sqrt{5} + 5) - \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot (1 + 2\sqrt{5} + 5)} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{6 + 2\sqrt{5}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(3+\sqrt{5})^2 \cdot 3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3 + \sqrt{5}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5 - 4}{6 + 2\sqrt{5}} \\
 &= \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 6\sqrt{5}} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Kaava on siis oikea, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

1 p (4 p)

□

c) Sijoitetaan juuriehtotukset φ ja $-\frac{1}{\varphi}$ yhtälöön

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (1)$$

1°

$$\begin{aligned} \varphi^2 - \varphi - 1 &= 0 \\ \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right]^2 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - 1 &= 0 \\ \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{5} + 5) - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - 1 &= 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Siis $x = \varphi$ toteuttaa yhtälön (1).

1 p (5 p)

2°

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right) - 1 &= 0 \\ \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} - 1 &= 0 \\ \frac{1}{\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right]^2} + \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} - 1 &= 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{5} + 5)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} - 1 &= 0 \\ \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{1}\sqrt{5}}{\frac{4}{3} + \frac{2}{1}\sqrt{5}} + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} - 1 &= 0 \\ \frac{1+\sqrt{5})}{3 + \sqrt{5}} \frac{2}{3 + \sqrt{5}} + \frac{3+\sqrt{5})}{1 + \sqrt{5}} \frac{2}{1 + \sqrt{5}} - 1 &= 0 \\ \frac{2 + 2\sqrt{5} + 6 + 2\sqrt{5}}{3 + 1\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5} - 1 &= 0 \\ \frac{\cancel{8} + 4\sqrt{5}}{\cancel{8} + 4\sqrt{5}} - 1 &= 0 \\ 1 - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Siis myös $x = -\frac{1}{\varphi}$ toteuttaa yhtälön (1).

□

1 p (6 p)

13. a) 1° Verottaja tulkitsee voitoksi

$$42000 \text{ €} - 12000 \text{ €} - 4000 \text{ €} = 26000 \text{ €}.$$

Veroa tästä menisi 30 % eli

$$0,3 \cdot 26000 \text{ €} = 7800 \text{ €}.$$

Näin ollen verotuksen jälkeen myyntihinnasta jäisi

$$42000 \text{ €} - 7800 \text{ €} = 34200 \text{ €}. \quad 1 \text{ p}$$

2° Hankintameno-olettamalla yli 10 vuoden pitoajalla veroa menisi

$$0,3 \cdot 0,6 \cdot 42000 \text{ €} = 7560 \text{ €}.$$

Verotuksen jälkeen myyntisumma olisi

$$42000 \text{ €} - 7560 \text{ €} = 34440 \text{ €}. \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Vaihtoehto 2° on siis edullisempi.

Vastaus: Edullisemmalla tavalla myyntihinnasta jää 34440 €. 1 p (3 p)

b) Olkoon myyntihinta nyt h . Maksettu veron määrä on tavalla 1°

$$0,3 \cdot (h - 12000 - 4000) = 0,3h - 4800$$

ja hankintameno-olettamalla 2°

$$0,3 \cdot 0,6h = 0,18h. \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

Nämä ovat yhtä suuret, kun

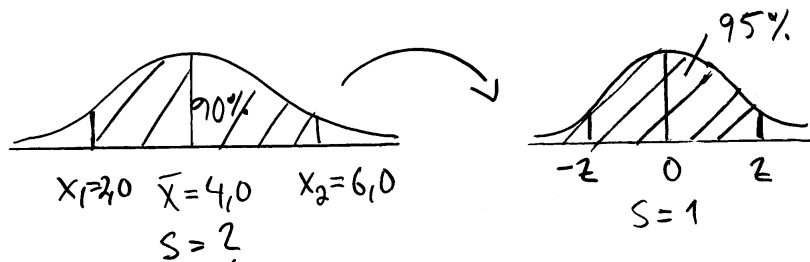
$$\begin{aligned} 0,3h - 4800 &= 0,18h \\ 0,12h &= 4800 \quad || : 0,12 \\ h &= 40000 \text{ (€)}. \end{aligned}$$

Vastaus: Myyntihinta olisi 40000 €. 2 p (6 p)

14. $\bar{x} = 4,0^\circ\text{C}$, $x_1 = 2,0^\circ\text{C}$ ja $x_2 = 6,0^\circ\text{C}$

Arvot x_1 ja x_2 ovat yhtä etäällä keskiarvosta.

1 p



1 p (2 p)

Tällöin

$$\Phi(z) = 0,95$$

$$z = 1,6449$$

1 p (3 p)

Ratkaistaan kysytty keskihajonta muuttujan arvon normittamiskaavasta.

$$z = \frac{x_2 - \bar{x}}{s} \quad || \cdot s$$

$$zs = x_2 - \bar{x} \quad || : z$$

$$s = \frac{x_2 - \bar{x}}{z} \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$s = \frac{6,0 - 4,0}{1,6449} \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$s = 1,2158 \dots$$

$$s \approx 1,2 (^\circ\text{C})$$

Vastaus: Keskihajonta on $1,2^\circ\text{C}$.

1 p (6 p)

15. a)

$$\sin(2x + 4^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x + 4^\circ = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{tai} \quad 2x + 4^\circ = 180^\circ - 60^\circ + n \cdot 360^\circ \quad 1 \text{ p}$$

$$\begin{array}{ll} 2x = 56^\circ + n \cdot 360^\circ & \parallel : 2 \\ x = 28^\circ + n \cdot 180^\circ \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2x = 116^\circ + n \cdot 360^\circ & \parallel : 2 \\ x = 58^\circ + n \cdot 180^\circ \end{array} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Välillä $x \in [0^\circ, 90^\circ]$ ratkaisut ovat

$$\underline{\underline{x = 28^\circ \text{ tai } x = 58^\circ}} \quad 1 \text{ p (3 p)}$$

b)

$$\underline{\underline{x = 28^\circ + n \cdot 180^\circ \text{ tai } x = 58^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}}} \quad 3 \text{ p (6 p)}$$