MAFY-VALMENNUS

MAFYNETTI

Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!

Lataa ilmaiseksi mafyvalmennus.fi/mafynetti

YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

28.9.2011

MATEMATIIKAN KOE
LYHYT OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. **a)** Laske lausekkeen $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ arvo, kun $x=3$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{5}{x}=-\frac{1}{2}$.

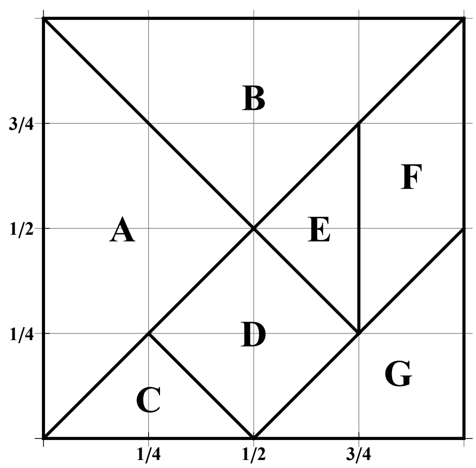
c) Ratkaise yhtälö $x^2-3(x+3)=3x-18$.

2. **a)** Kolmiossa ABC kulma A on 28° ja kulman B vieruskulma 110°. Määritä kulmien B ja C suuruudet.

b) Ratkaise x yhtälöstä $\frac{ax}{2}-1=\frac{b-2}{2}$, kun $a\neq 0$.

c) Sievennä lauseke $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(ab)^{\frac{1}{2}}$.

3. Kiinalaisen Tangram-pelin pelilaatat saadaan jakamalla neliö osiin oheisen kuvan mukaisesti. Ilmoita osien pinta-alat, kun koko neliön sivun pituus on 1.



4. Ludwig van Beethoven, Wolfgang Amadeus Mozart ja Johann Sebastian Bach elivät yhteensä 156 vuotta. Bach eli yhdeksän vuotta vanhemmaksi kuin Beethoven, Mozart kuoli 21 vuotta nuorempana kuin Beethoven. Kuinka vanhoiksi säveltäjät elivät?

5. Osakkeen arvo laski 46 prosenttia ja nousi sitten ensiksi 15 prosenttia ja tämän jälkeen vielä 34 prosenttia.

a) Oliko osakkeen arvo näiden muutosten jälkeen suurempi vai pienempi kuin ennen muutoksia?

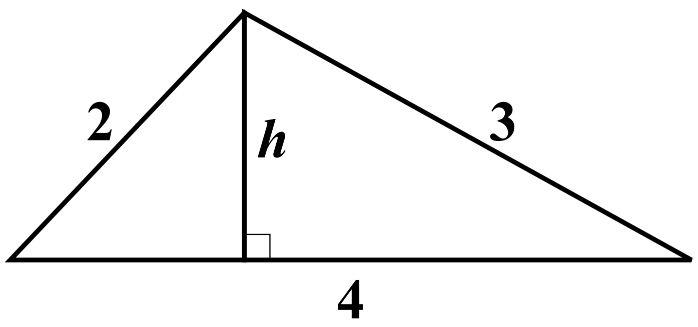
b) Kuinka monta prosenttia jälkimmäisen nousun olisi pitänyt olla, jotta olisi palattu alkuperäiseen arvoon?

6. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 4x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1,2]$.

7. Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4.

a) Laske pisintä sivua vastaava korkeus h kahden desimaalin tarkkuudella.

b) Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

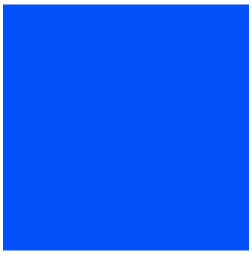


8. Grönlannin mannerjäätikön laajuus on $1\ 834\ 000\ \mathrm{km}^2$ ja paksuus noin $2\ \mathrm{km}$. Kuinka paljon valtameren pinta kohoaa, jos jäätiköstä sulaa 30 tilavuusprosenttia? Jään tiheys on $0,9\ \mathrm{kg/dm}^3$ ja veden tiheys $1,0\ \mathrm{kg/dm}^3$. Maapallon pinta-alasta on 71 prosenttia valtameriä ja maapallon säde on $6\ 400\ \mathrm{km}$. Anna vastaus $0,1$ metrin tarkkuudella.

9. Värisävy esimerkiksi www-sivulla voidaan ilmoittaa kuusimerkkisellä RGB-koodilla, joka sisältää tiedon sävyn muodostavien perusvärien punainen (Red), vihreä (Green) ja sininen (Blue) määristä. Kunkin perusvärin määrä ilmoitetaan kahdella peräkkäin kirjoitetulla merkillä, jotka valitaan joukosta

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}.$$

Laske, kuinka monta erilaista värisävyä RGB-koodilla voidaan ilmaista.



0000ff

f5c97a

10. Oletetaan, että matematiikan ylioppilaskokeen tulokset (jotka ovat välillä $0,\ldots,60$ pistettä) jakautuvat likimain normaalisti keskiarvona 30 ja keskihajontana 10. Määritä tämän perusteella laudaturin pisteraja, kun tavoitteena on antaa laudatureja enintään viidelle prosentille osallistujista.

11. Paraabelin $y = x^2 + 4$ pisteeseen $A = (3,13)$ asetetaan tangentti. Tämä leikkaa x-akselin pisteessä B. Pisteen A kautta kulkeva y-akselin suuntainen suora leikkaa x-akselin pisteessä C. Laske kolmion ABC pinta-ala.

12. Tiedetään, että suure y on suoraan verrannollinen muuttujaan x, ts. $y = kx$. Kolmella mittauksella on saatu seuraavat arvot:

x	y
2	$1,5$
3	$2,6$
6	$4,6$

Arvot sisältävät kuitenkin mittausvirheitä, joten kaikkiin arvopareihin sopivaa kulmakerrointa ei ole olemassa. Paras mahdollinen k voidaan tällöin määrittää ns. *pienimmän neliösumman menetelmällä:* Kunkin x-arvon kohdalla lasketaan suoran $y = kx$ antaman y-arvon ja mitatun y-arvon erotus, ja kerroin k valitaan niin, että erotusten neliöiden summa eli funktio

$$f(k) = (2k - 1,5)^2 + (3k - 2,6)^2 + (6k - 4,6)^2$$

on mahdollisimman pieni. Määritä k tällä tavoin. Piirrä kuvio pisteistä (x, y) ja saamastasi suorasta $y = kx$.

13. Laske lukujen $1\ 000$ ja $2\ 000$ välissä olevien 13:lla jaollisten lukujen summa.

14. Matti lainaa ystävältään $7\ 500$ euroa ja maksaa summan takaisin neljässä $2\ 000$ euron erässä vuoden välein, ensimmäisen erän vuoden kuluttua lainan nostamisesta. Määritä, millaista vuotuista korkoprosenttia p tämä vastaa muodostamalla ensin yhtälö korkotekijälle $q = 1 + p/100$ ja etsimällä tälle likimääräinen ratkaisu. Anna vastauksena korkoprosentti yhden desimaalin tarkkuudella.

15. Kulma x on välillä $[0^\circ, 360^\circ]$. Ratkaise asteen tarkkuudella seuraavat yhtälöt:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$, **b)** $\cos x = \frac{1}{4}$, **c)** $\tan x = \frac{1}{5}$.

Arviomme tehtävien pisteytyksestä
on merkitty sinisellä tekstillä

Lyhyt matematiikka, syksy 2011

Mallivastaukset, 28.9.2011

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita koko tämän ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennuksessa. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennuksen omaisuutta.

MA-FY Valmennus on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- arkkitehtiosastojen pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Vuoden 2010 keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MA-FY Valmennuksen yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	(09) 3540 1373

1. **a)** Kun $x = 3$, on

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x+1}{x-1} &= \frac{3^2-2\cdot 3+1}{3-1} && \text{1 p}\\ &= \frac{4}{2}\\ &= \underline{\underline{2}} && \text{1 p (2 p)}\end{aligned}$$

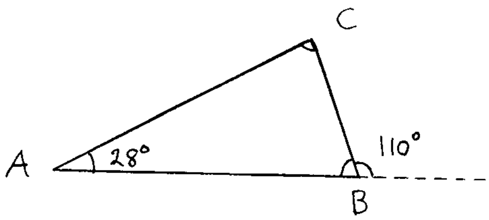
b) $\frac{5}{x} = -\frac{1}{2}$
Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{5}{x} &= -\frac{1}{2}\\ \frac{5}{x} &= \frac{1}{-2} && \text{kerrotaan ristiin}\\ 1\cdot x &= 5\cdot(-2) && \text{1 p (3 p)}\\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -10}} && \text{1 p (4 p)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x^2-3(x+3) &= 3x-18\\ x^2-3x-9 &= 3x-18\\ x^2-6x+9 &= 0 && \text{1 p (5 p)}\\ x &= \frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 9}}{2}\\ x &= \frac{6\pm 0}{2}\\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 3}} && \text{1 p (6 p)}\end{aligned}$$

2. a)



$$\begin{aligned}\sphericalangle B &= 180° - 110° \quad \text{(vieruskulmat)}\\ &= 70° \qquad \text{1 p}\end{aligned}$$

Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned}\sphericalangle C &= 180° - 28° - 70°\\ &= 82°\end{aligned}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\sphericalangle B = 70° \text{ ja } \sphericalangle C = 82°.}}$ 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned}\frac{ax}{2} - 1 &= \frac{b-2}{2} \quad \| \cdot 2\\ ax - 2 &= b - 2 \qquad \text{1 p (3 p)}\\ ax &= b \quad \| : a \quad (a \neq 0)\\ \underline{\underline{x = \frac{b}{a}}} & \qquad \text{1 p (4 p)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(ab)^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\\ &= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \qquad \text{1 p (5 p)}\\ &= \underline{\underline{ab}} \qquad \text{1 p (6 p)}\end{aligned}$$

3. Kolmion A kanta on $a_{\mathrm{A}} = 1$ ja korkeus on $h_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}$, joten sen pinta-ala on

$$A_{\mathrm{A}} = \frac{a_{\mathrm{A}} h_{\mathrm{A}}}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Kolmio B on samanlainen kuin A, joten sen pinta-ala on $A_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4}$. 1 p

Kolmion C kanta on $a_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}$ ja korkeus on $h_{\mathrm{C}} = \frac{1}{4}$, joten sen pinta-ala on

$$A_{\mathrm{C}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{16}.$$

Kolmio E on samanlainen kuin C. Sen pinta-ala on siis myös $A_{\mathrm{E}} = \frac{1}{16}$. 1 p (2 p)

Neliö D muodostuu kahdesta C:n kokoisesta kolmiosta, joten sen pinta-ala on $A_{\mathrm{D}} = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$. 1 p (3 p)

Kolmion G kanta on $a_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}$ ja korkeus on $h_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}$, joten sen pinta-ala on

$$A_{\mathrm{G}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}.$$ 1 p (4 p)

Nelikulmio F on suunnikas, koska sen vastakkaiset sivut ovat selvästi yhtä pitkät. Suunnikkaan kanta on $a_F = \frac{1}{2}$ ja korkeus $h_F = \frac{1}{4}$, joten sen pinta-ala on

$$A_F = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Pinta-alat ovat } A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4},\ A_{\mathrm{C}} = A_{\mathrm{E}} = \frac{1}{16}}}$ 2 p (6 p)

$\underline{\underline{\text{ja } A_{\mathrm{D}} = A_{\mathrm{G}} = A_{\mathrm{F}} = \frac{1}{8}.}}$

4. Merkitään säveltäjien elinikiä seuraavasti:

a on Beethovenin elinikä,
b on Mozartin elinikä ja
c on Bachin elinikä.

Annetuista tiedoista saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a+b+c=156 & (1) \\ c=a+9 & (2) \\ b=a-21 & (3) \end{cases}$$

Yhtälöryhmä 2 p

Sijoitetaan (2) ja (3) yhtälöön (1):

$$\begin{aligned} a+a-21+a+9 &= 156 \\ 3a &= 168 \quad \| :3 \\ a &= 56 \end{aligned}$$

2 p (4 p)

Yhtälöstä (2) saadaan

$$\begin{aligned} c &= 56+9 \\ &= 65, \end{aligned}$$

1 p (5 p)

ja yhtälöstä (3) saadaan

$$\begin{aligned} b &= 56-21 \\ &= 35. \end{aligned}$$

Vastaus: Säveltäjät elivät seuraavasti: Beethoven 56-, Mozart 35- ja Bach 65-vuotiaaksi.

1 p (6 p)

5. a) Olkoon osakkeen alkuperäinen arvo a. Lasketaan osakkeen arvo muutosten jälkeen.

$$a \cdot 0{,}54 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}34 = 0{,}83214a$$ 2 p

Vastaus: Osakkeen arvo oli pienempi muutosten jälkeen. 1 p (3 p)

b) Muodostetaan yhtälö, jonka mukaan alkuperäinen arvo on yhtä suuri kuin muutosten jälkeinen arvo. Viimeinen muutostekijä on $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

$$a = a \cdot 0{,}54 \cdot 1{,}15 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \quad \| : (0{,}54 \cdot 1{,}15a)$$ 1 p (4 p)

$$\frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{0{,}54 \cdot 1{,}15\underset{1}{\cancel{a}}} = 1+\frac{p}{100}$$

$$1+\frac{p}{100} = 1{,}6103\ldots$$

$$\frac{p}{100} = 0{,}6103\ldots \quad \| \cdot 100$$ 1 p (5 p)

$$p = 61{,}03\ldots$$

$$p \approx 61$$

Vastaus: Korotus olisi pitänyt olla 61 %. 1 p (6 p)

6. $f(x) = x^3 - 4x + 1$

Funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 2]$ löytyvät derivaatan nollakohdista tai välin $[-1, 2]$ päätepisteistä. 1 p

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$ 1 p (2 p)

Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 4 &= 0 \\ 3x^2 &= 4 \quad \| : 3 \\ x^2 &= \frac{4}{3} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \\ \left(x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -1{,}154\ldots\right) &\quad \text{tai} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} &= 1{,}154\ldots \end{aligned}$$

1 p (3 p)

1 p (4 p)

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.

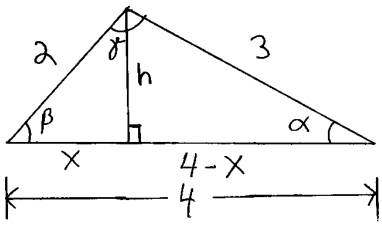
$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 1 = 4 \quad \text{(suurin arvo)} \\ f\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) &= -2{,}079\ldots \approx -2{,}08 \quad \text{(pienin arvo)} \\ f(2) &= 1 \end{aligned}$$

Arvojen laskeminen
1 p (5 p)

Vastaus: Suurin arvo on $f(-1) = 4$ ja pienin arvo on $f\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = -2{,}08.$

Tulos
1 p (6 p)

7. a) Korkeusjana jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat x ja h sekä $4-x$ ja h.



Pythagoraan lause 1. kolmiolle on

$$\begin{aligned} h^2 + x^2 &= 2^2 \\ h^2 &= 4 - x^2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Toiselle kolmiolle pätee

$$\begin{aligned} h^2 + (4-x)^2 &= 3^2 \\ h^2 + 16 - 8x + x^2 &= 9 \\ h^2 &= 9 - 16 + 8x - x^2 \\ h^2 &= -7 + 8x - x^2. \qquad (2) \end{aligned}$$

1 p

Sijoitetaan (2) yhtälöön (1).

$$\begin{aligned} -7 + 8x - \cancel{x^2} &= 4 - \cancel{x^2} \\ 8x &= 4 + 7 \\ 8x &= 11 \quad \| : 8 \\ x &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

1 p (2 p)

Lasketaan korkeus h yhtälöstä (1).

$$\begin{aligned} h^2 &= 4 - \left(\frac{11}{8}\right)^2 \\ h &= _{(}\pm_{)} \sqrt{4 - \left(\frac{11}{8}\right)^2} \\ h &= 1{,}452\ldots \\ h &\approx 1{,}45 \end{aligned}$$

Vastaus: Korkeus on $h = 1{,}45$.

1 p (3 p)

b) Ratkaistaan kulmat α ja β suorakulmaisten kolmioiden trigonometriasta.

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{1{,}452\ldots}{3} \\ \alpha &= 28{,}9\ldots^\circ \\ \alpha &\approx 29^\circ \end{aligned}$$

1 p (4 p)

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{1{,}452\ldots}{2} \\ \beta &= 46{,}5\ldots^\circ \\ \beta &\approx 47^\circ \end{aligned}$$

1 p (5 p)

Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ \gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ \gamma &= 180^\circ - 28{,}9\ldots^\circ - 46{,}5\ldots^\circ \\ \gamma &= 104{,}4\ldots^\circ \\ \gamma &\approx 104^\circ. \end{aligned}$$

Vastaus: Kolmion kulmat ovat 104°, 47° ja 29°. 1 p (6 p)

8. Grönlannin mannerjäätikön tilavuus V on

$$\begin{aligned} V &= A_\mathrm{p} \cdot h \\ &= 1\,834\,000 \cdot 2 \\ &= 3\,668\,000\,(\mathrm{km}^3). \end{aligned}$$

Siitä sulaa 30 % eli:

$$\begin{aligned} V_\mathrm{sula} &= 0{,}3 \cdot V \\ &= 0{,}3 \cdot 3\,668\,000 \\ &= 1\,100\,400\,(\mathrm{km}^3) \end{aligned}$$ 1 p

Tämän jään massa on

$$\begin{aligned} m_\mathrm{sula} &= 0{,}9 \cdot V_\mathrm{sula} \\ &= 0{,}9 \cdot 1\,100\,400 \\ &= 990\,360\,(\mathrm{kg}), \end{aligned}$$ 1 p (2 p)

joten sulaneen jään tilavuus vetenä on

$$\begin{aligned} V_\mathrm{vesi} &= \frac{m_\mathrm{sula}}{1{,}0} \\ &= 990\,360\,(\mathrm{km}^3) \end{aligned}$$ 1 p (3 p)

Maapallon pinta-ala on

$$A_\mathrm{Maa} = 4\pi r^2.$$

Tästä valtamerta on 71 % eli

$$\begin{aligned} A_\mathrm{meret} &= 0{,}71 \cdot A_\mathrm{Maa} \\ &= 0{,}71 \cdot 4\pi r^2 \\ &= 2{,}84 \cdot \pi(6\,400)^2 \end{aligned}$$ 1 p (4 p)

Meren pinnan kohoaminen h_k on

$$\begin{aligned} V_\mathrm{vesi} &= A_\mathrm{meret} \cdot h_\mathrm{k} \\ h_\mathrm{k} &= \frac{V_\mathrm{vesi}}{A_\mathrm{meret}} \\ &= \frac{990\,360}{2{,}84 \cdot \pi \cdot (6\,400)^2} \\ &= 0{,}0027099\ldots\ \mathrm{km} \\ &\approx 2{,}7\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Vastaus: Valtameren pinta kohoaa 2,7 m. 2 p (6 p)

1 p

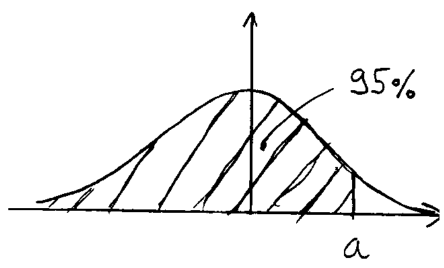
9. Erilaisia merkkejä on yhteensä 16 kpl. Lasketaan kuinka monta erilaista perusvärin määrää kahdella peräkkäisellä merkillä voidaan ilmoittaa.
Tuloperiaatteen mukaan erilaisia määriä on $n_P = 16^2$ kpl. 2 p (3 p)
Perusvärejä on kolme, joten tuloperiaatteen mukaan erilaisia värikombinaatioita on

$$n_P^3 = (16^2)^3 = 16^6 = 16\,777\,216\,\text{kpl.}$$

Vastaus: RGB-koodilla voidan ilmaista 16 777 216 erilaista väriä. 3 p (6 p)

10. Pistemäärä X noudattaa likimain jakaumaa $N(30, 10)$ eli $\bar{X} = 30$ ja $s = 10$. Pistemäärä, jonka enintään 5 % osallistujista saa, on siis sama kuin pistemäärä, jonka alle 95 % osallistujista jää. Eli kysytään, millä pistemäärällä a todennäköisyys on

$$P(X \leq a) = 0{,}95.$$ 1 p



On siis oltava

$$\phi(z) = 0{,}95,$$ 1 p (2 p)

josta saadaan

$$\begin{aligned} z &= 1{,}6449 && \text{1 p (3 p)} \\ \frac{a - \bar{X}}{s} &= 1{,}6449 \\ \frac{a - 30}{10} &= 1{,}6449 \quad \| \cdot 10 && \text{1 p (4 p)} \\ a - 30 &= 16{,}449 \\ a &= 46{,}449. && \text{1 p (5 p)} \end{aligned}$$

Sai olla enintään 5 %, joten pyöristetään ylöspäin:

$$a \approx 47$$

Vastaus: Laudaturin pisteraja on 47. 1 p (6 p)

11. Paraabelin yhtälö on $y = x^2 + 4$. Pisteeseen $A = (3, 13)$ asetetun tangentin kulmakertoimen arvo on $k = y'(3)$.
Derivoidaan:

$$y'(x) = 2x. \qquad \text{1 p}$$

Lasketaan kulmakerroin:

$$k = y'(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Lasketaan tangentin yhtälö:

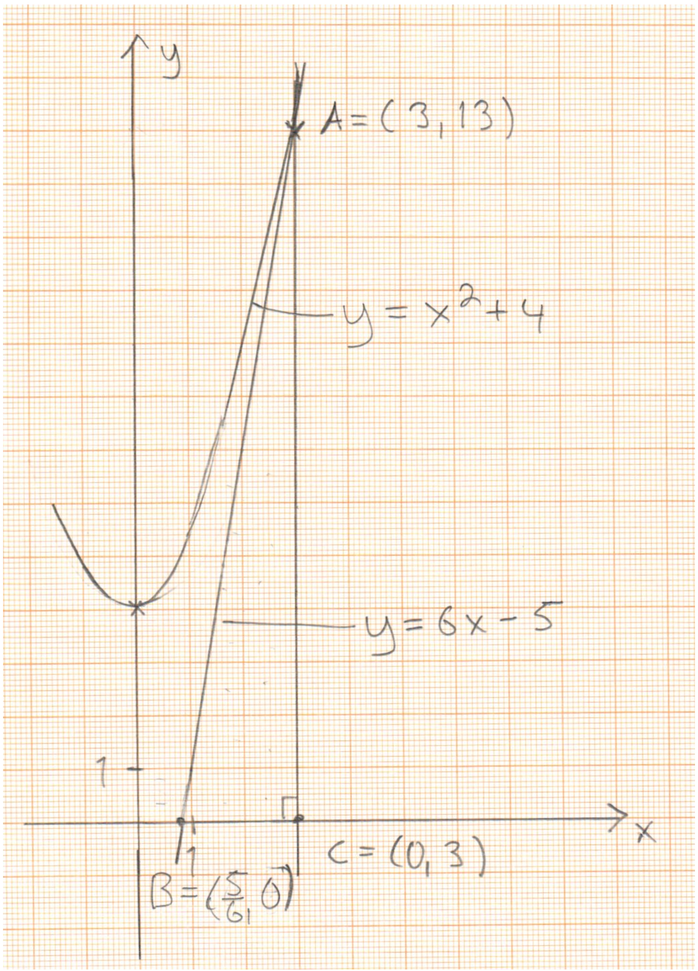
$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \quad \| \text{ sij. } (x_0, y_0) = (3, 13) \\ y - 13 &= 6(x - 3) \\ y &= 6x - 5. \qquad \text{1 p (2 p)} \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea tangentin ja x-akselin leikkauspiste B. Tällöin $y = 0$ eli

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 5 \\ 6x &= 5 \quad \| : 6 \\ x &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Näin ollen $B = \left(\frac{5}{6}, 0\right)$. 1 p (3 p)
Pisteen $A = (3, 13)$ kautta piirretyn pystysuoran yhtälö on $x = 3$, joten piste $C = (3, 0)$. Piirretään kuva tilanteesta koordinaatistoon.

1 p (4 p)



Kolmio ABC on suorakulmainen. Sen kateetit ovat BC ja CA. Kateettien pituudet ovat

$$|BC| = \left(3 - \frac{5}{6}\right) = \frac{13}{6} \quad \text{ja} \quad |CA| = 13.$$ 1 p (5 p)

Lasketaan kolmion pinta-ala:

$$A = \frac{|BC| \cdot |CA|}{2} = \frac{\frac{13}{6} \cdot 13}{2} = \frac{169}{12} = 14\frac{1}{12}.$$

Vastaus: Kolmion ABC pinta-ala on $14\frac{1}{12}$. 1 p (6 p)

12.

$$f(k) = (2k - 1{,}5)^2 + (3k - 2{,}6)^2 + (6k - 4{,}6)^2$$
$$f(k) = 4k^2 - 6k + 2{,}25 + 9k^2 - 15{,}6k + 6{,}76 + 36k^2 - 55{,}2k + 21{,}16$$
$$f(k) = 49k^2 - 76{,}8k + 30{,}17 \qquad \text{1 p}$$
$$f'(k) = 98k - 76{,}8 \qquad \text{1 p (2 p)}$$

Derivaatan nollakohta

$$\begin{aligned} f'(k) &= 0 \\ 98k - 76{,}8 &= 0 \\ 98k &= 76{,}8 \quad \| : 98 \\ k &= \frac{76{,}8}{98} \\ k &= 0{,}78367\ldots \qquad \text{1 p (3 p)} \end{aligned}$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten f saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa (paraabelin huippu). Siis paras mahdollinen kulmakerroin on

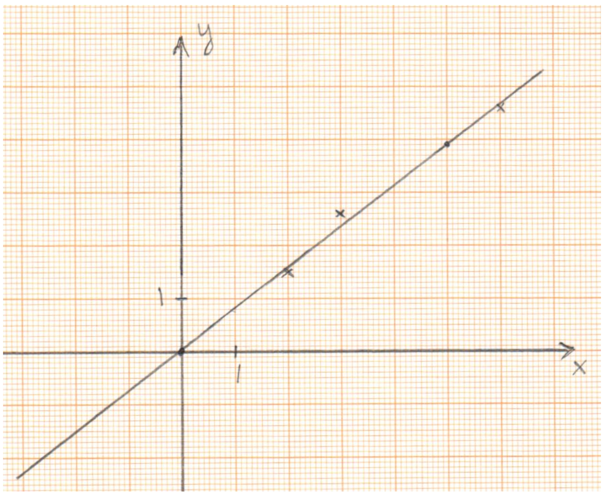
$$\begin{aligned} k &= 0{,}78367\ldots \\ k &\approx 0{,}78. \qquad \text{1 p (4 p)} \end{aligned}$$

Mitatut

x	y
2	1,5
3	2,6
6	4,6

PNS-menetelmä

x	$y = 0{,}78x$
0	0
$\vdots$	$\vdots$
5	$0{,}78 \cdot 5 = 3{,}9$



2 p (6 p)

13. Etsitään pienin lukujen 1 000 ja 2 000 välissä oleva 13:lla jaollinen luku.

$$\frac{1\,000}{13} = 76{,}92\ldots \quad \text{(ei jaollinen 13:lla)}$$
$$\frac{1\,001}{13} = 77 \quad \text{(on jaollinen 13:lla)}$$

13:lla jaolliset luvut muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = 1\,001$ ja $d = 13$. Jonon yleinen jäsen on muotoa

1 p

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= 1\,001 + (n-1)\cdot 13 \\ a_n &= 1\,001 + 13n - 13 \\ a_n &= 988 + 13n. \end{aligned}$$

1 p (2 p)

Lasketaan, kuinka monta jonon jäsenistä on välillä $[1\,000, 2\,000]$:

$$\begin{aligned} a_n &< 2\,000 \\ 988 + 13n &< 2\,000 \\ 13n &< 1\,012 \\ n &< 77{,}84\ldots. \end{aligned}$$

Siis 77 jäsentä on lukujen 1 000 ja 2 000 välissä. Lasketaan 77. jäsen: 1 p (3 p)

$$a_{77} = 988 + 13\cdot 77 = 1\,989.$$

1 p (4 p)

Kysytty summa on aritmeettinen summa S_n, jossa $n = 77$, $a_1 = 1\,001$ ja $a_n = 1\,989$. 1 p (5 p)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ S_{77} &= \frac{77\cdot(1\,001 + 1\,989)}{2} \\ &= 115\,115 \end{aligned}$$

Vastaus: Summa on 115 115. 1 p (6 p)

14. Lainattu summa on $K = 7\,500$ €. Takaisinmaksu tapahtuu neljässä erässä, joten $n = 4$. Takaisinmaksettavan tasaerän suuruus on $A = 2\,000$. Yleisesti tasaerän suuruus tasaerälainassa (annuiteettilaina) on

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}. \qquad \text{1 p}$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
2\,000 &= 7\,500q^4 \cdot \frac{1-q}{1-q^4} \quad \| \cdot (1-q^4) \\
2\,000(1-q^4) &= 7\,500q^4(1-q) \\
2\,000 - 2\,000q^4 &= 7\,500q^4 - 7\,500q^5 \\
7\,500q^5 - 9\,500q^4 + 2\,000 &= 0 \quad \| : 500 \\
15q^5 - 19q^4 + 4 &= 0. \qquad \text{2 p (3 p)}
\end{aligned}$$

Etsitään ratkaisun likiarvo haarukoimalla. Merkitään

$$P(q) = 15q^5 - 19q^4 + 4.$$

Arvaus: $q = 1{,}03$

$$\begin{aligned}
P(1{,}03) &= 15 \cdot 1{,}03^5 - 19 \cdot 1{,}03^4 + 4 = 0{,}00444\ldots \\
P(1{,}02) &= -0{,}00499\ldots \\
P(1{,}025) &= -0{,}00132\ldots \\
P(1{,}0275) &= 0{,}00129\ldots \\
P(1{,}02625) &= -7 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on $q = 1{,}02625$. 2 p (5 p)
Ratkaistaan vuotuinen korkoprosentti.

$$\begin{aligned}
q &= 1 + \frac{p}{100} \\
1{,}02625 &= 1 + \frac{p}{100} \\
\frac{p}{100} &= 0{,}02625 \quad \| \cdot 100 \\
p &= 2{,}625 \\
p &\approx 2{,}6
\end{aligned}$$

Vastaus: Korkoprosentti on 2,6. 1 p (6 p)

Huomautus lukijalle! Uskomme, että täydet pisteet voi saada myös päättelemällä korkoprosentin p korkotekijästä q ilman laskelmaa.

15. a)

$$\sin x = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{llll} x = 19{,}47\ldots^\circ \quad (+n\cdot 360^\circ) & \text{tai} & x = 180^\circ - 19{,}47\ldots^\circ \quad (+n\cdot 360^\circ) & \text{1 p} \\ x = 19{,}47\ldots^\circ & \text{tai} & x = 160{,}52\ldots^\circ & \\ x \approx 19^\circ & \text{tai} & x \approx 161^\circ & \end{array}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 19^\circ \text{ tai } x = 161^\circ.}}$ 1 p (2 p)

b)

$$\cos x = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm 75{,}52\ldots^\circ + n\cdot 360^\circ \qquad \text{1 p (3 p)}$$

Ratkaisuista välillä $[0^\circ, 360^\circ]$ ovat

$$\begin{array}{lll} x = 75{,}52\ldots^\circ & \text{sekä} & x = -75{,}52\ldots + 1\cdot 360^\circ \\ x \approx 76^\circ & & x = 284{,}47\ldots^\circ \\ & & x \approx 284^\circ \end{array}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 76^\circ \text{ tai } x = 284^\circ.}}$ 1 p (4 p)

c)

$$\tan x = \frac{1}{5}$$

$$x = 11{,}30\ldots^\circ + n\cdot 180^\circ \qquad \text{1 p (5 p)}$$

Ratkaisuista välillä $[0^\circ, 360^\circ]$ ovat

$$\begin{array}{lll} x = 11{,}30\ldots^\circ & \text{sekä} & x = 11{,}30\ldots + 1\cdot 180^\circ \\ x \approx 11^\circ & & x = 191{,}30\ldots^\circ \\ & & x \approx 191^\circ \end{array}$$

Vastaus: $\underline{\underline{x = 11^\circ \text{ tai } x = 191^\circ.}}$ 1 p (6 p)