

# MAFYNETTI



## Valmistaudu pitkän- tai lyhyen matematiikan kirjoituksiin ilmaiseksi Mafynetti-ohjelmalla!

- Harjoittelu tehdään aktiivisesti tehtäviä ratkomalla. Tehtävät kattavat kaikki yo-kokeessa tarvittavat asiat.
- Lasket kynällä ja paperilla, mutta Mafynetti opettaa ja neuvoo videoiden ja ratkaisujen avulla.
- Mafynetti huolehtii kertauksesta, joten et unohda oppimiasi asioita.
- Mafynetti on nyt kokonaan ilmainen!



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö  $4x + (5x - 4) = 12 + 3x$ .

b) Sievennä lauseke  $x^2 + x - (x^2 - x)$  ja laske sen arvo, kun  $x = \frac{1}{2}$ .

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

2. a) Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 2 ja hypotenuusan pituus 5. Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

b) Sievennä lauseke  $(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x}$ .

c) Laske  $|x - y|$ , kun  $x = 2$  ja  $y = 5$ .

3. a) Määritä sellainen vakio  $a$ , että  $x = 2$  toteuttaa yhtälön  $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ .

b) Positiivinen luku  $a$  kasvaa 20% ja pienenee tämän jälkeen 17%. Onko tulos suurempi vai pienempi kuin alkuperäinen luku  $a$ ? Kuinka monta prosenttia alkuperäisestä luvusta muutos on?

4. Muinaiset egyptiläiset laskivat ympyrän pinta-alan sellaisen neliön alana, jonka sivun pituus on  $\frac{8}{9}$  ympyrän halkaisijasta.

a) Laske tällä säännöllä ympyrän ala, kun sen halkaisija on 5.

b) Onko edellä saatu ala liian suuri vai liian pieni? Kuinka suuri virhe on prosentteina? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

5. Alla on taulukoituina erään funktion arvot  $0,1:n$  välein välillä  $[-1,1]$ . Hahmottele funktion kuvaaja ja määritä sen avulla likimääräisesti funktion derivaatta kohdassa  $x = 0$ .

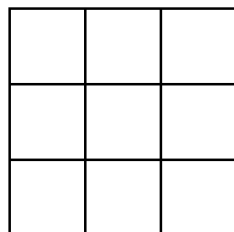
$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
-1,0	0,00	-0,5	5,64	0,1	10,51	0,6	11,19
-0,9	1,05	-0,4	6,72	0,2	10,89	0,7	11,01
-0,8	2,18	-0,3	7,70	0,3	11,14	0,8	10,74
-0,7	3,34	-0,2	8,59	0,4	11,27	0,9	10,40
-0,6	4,51	-0,1	9,36	0,5	11,28	1,0	10,00
		0,0	10,00				

6. A4-kokoisen kartan mittakaava on 1:20 000. Kartta pienennetään kopiokoneella A5-kokoiseksi, jolloin sen pinta-ala pienenee puoleen, mutta muoto säilyy. Mikä on pienennetyn kartan mittakaava?
7. Eräessä kokeessa annettiin suoritusten arvosanoiksi 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6. Näiden prosenttiosuudet olivat seuraavat:

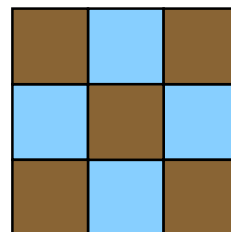
arvosana	0	1	2	3	4	5	6
osuus	5,80	10,99	17,54	24,78	19,95	15,48	5,46

Laske kokeen keskiarvo ja keskihajonta.

8. Alla olevan kuvion 1 kukin ruutu väritetään satunnaisesti ja toisista riippumatta joko ruskeaksi tai siniseksi.
- a) Millä todennäköisyydellä saadaan kuvion 2 shakkilautakuvio?
- b) Millä todennäköisyydellä mikään vaakarivi ei ole yksivärinen?

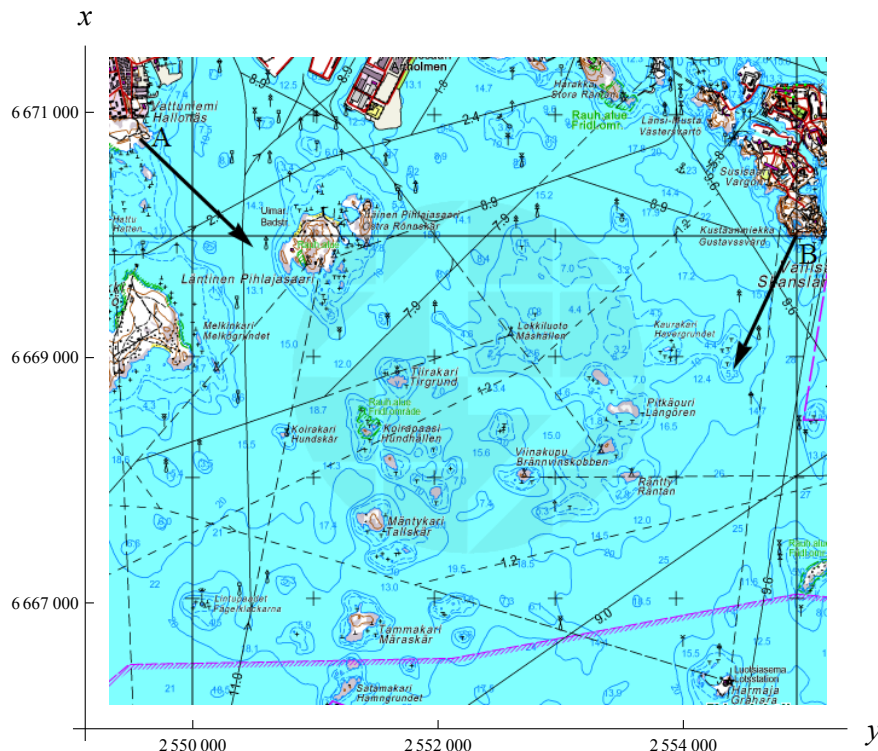


Kuvio 1



Kuvio 2

9. Olkoon  $f(x) = -x^3 + x + 2$  ja  $g(x) = x^3 - x - 2$ . Millä muuttujan  $x$  arvoilla on  $f'(x) > g'(x)$ ?
10. Suorakulmion yhtenä sivuna on  $x$ -akselin väli  $[-a, a]$ , missä  $0 < a < 2$ . Suorakulmion kaksi kärkeä ovat paraabelilla  $y = 4 - x^2$ . Millä luvun  $a$  arvolla suorakulmion pinta-ala on suurin?
11. Radioaktiivisen näytteen aktiivisuudeksi mitattiin 25,0 kBq ja viisi vuorokautta myöhemmin 16,2 kBq. Laske puoliintumisaika ja näytteen aktiivisuus kymmenen vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, ja puoliintumisaika on aika, jonka kuluessa aktiivisuus vähenee puoleen.
12. Havaintopisteestä A nähtiin trombi merellä suunnassa  $133,8^\circ$  ja havaintopisteestä B sama trombi suunnassa  $205,0^\circ$ . Suunnat on ilmoitettu pohjoissuunnasta lähtien myötäpäivään. Pisteiden A ja B koordinaatit ovat (6 670 801, 2 549 572) ja (6 670 015, 2 554 955) koordinaatistossa, jonka  $x$ -akseli suuntautuu pohjoiseen ja  $y$ -akseli itään ja jonka yksikönä on metri. Laske trombin sijainnin koordinaatit.



- 13.** Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 10 ja toinen termi 12. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 2 ja suhdeluku  $q = \frac{21}{20}$ . Monennestako termistä lähtien geometrisen jonon termi on suurempi kuin vastaava aritmeettisen jonon termi? Muodosta tarvittava epäyhtälö ja etsi sille ratkaisu kokeilemalla.
- 14. a)** Säätiöllä on 1,8 miljoonan euron pääoma, jonka vuosittainen tuotto on 5,4 prosenttia. Eräänä vuonna säätiö on päättänyt siirtää tuotosta 30 prosenttia pääomaan ja jakaa lopusta tuotosta kaksi 21 000 euron suuruisia apurahaa opiskeluun ulkomailla sekä 14 yhtä suurta matka-apurahaa. Kuinka suuria matka-apurahat ovat?
- b)** Kuinka suureksi säätiön 1,8 miljoonan euron pääoma kasvaa viidessä vuodessa, jos tuotto on jokaisena vuotena 5,4 prosenttia pääomasta ja vuosittain pääomaan siirretään 30 prosenttia tuotosta?
- 15.** Laske avaruuden kulman  $\sphericalangle BAC$  suuruus asteen tarkkuudella, kun  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (4, 5, 6)$  ja  $C = (9, 8, 7)$ .

Arviomme tehtävien pisteytyksestä  
on merkitty sinisellä tekstillä

## Lyhyt matematiikka, kevät 2011

Mallivastaukset, 23.3.2011

**Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet** filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita koko tämän ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennus Oy:ssä. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennus Oy:n omaisuutta.

**MA-FY Valmennus Oy** on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Vuoden 2010 keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kurseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

**Tämä asiakirja on tarkoitettu** yksityishenkilöille opiskelukäyttöön ja oman yo-vastausten tarkistamista varten. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MA-FY Valmennuksen internet-sivuilta [www.mafyvalmennus.fi](http://www.mafyvalmennus.fi). Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää näitä mallivastauksia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MA-FY Valmennus Oy:n yhteystiedot:

internet: [www.mafyvalmennus.fi](http://www.mafyvalmennus.fi)  
s-posti: [info@mafyvalmennus.fi](mailto:info@mafyvalmennus.fi)  
puhelin: (09) 3540 1373

1. a)

$$4x + (5x - 4) = 12 + 3x$$

$$4x + 5x - 4 = 12 + 3x$$

$$9x - 3x = 12 + 4$$

$$6x = 16 \quad || \cdot : 6$$

$$x = \frac{16}{6} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

$$x = 2\frac{4}{6}^{(2)}$$

$$x = \underline{\underline{2\frac{2}{3}}} \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

Täydet pisteet myös  
vastauksesta  $\frac{8}{3}$

b)

$$x^2 + x - (x^2 - x) = x^2 + x - x^2 + x$$

$$= 2x. \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

 Kun  $x = \frac{1}{2}$ , saa lauseke arvon

$$2x = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{1}}. \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}$$

c)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 & || \cdot (-1) & (1) \\ x - 3y = 1 & & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$-y = 1 \quad || \cdot (-1)$$

$$y = -1 \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}} \quad (3)$$

Sij. (3) yhtälöön (1).

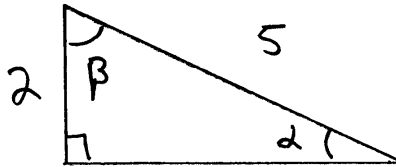
$$x - 2 \cdot (-1) = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

 Vastaus:  $\underline{\underline{x = 2, y = -1}}$ 
 $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

2. a)



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2}{5} \\ \alpha &= 23,578 \dots^\circ \\ \alpha &\approx 24^\circ \quad \text{1 p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{2}{5} \\ \beta &= 66,421 \dots^\circ \\ \beta &\approx 66^\circ\end{aligned}$$

Vastaus: Terävät kulmat ovat 24° ja 66°. 1 p (2 p)

b)

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x} &= \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1^2 + 2\sqrt{x} & \text{1 p (3 p)} \\ &= \underline{\underline{x + 1}} & \text{1 p (4 p)}\end{aligned}$$

c)

$$x = 2, y = 5$$

$$\begin{aligned}|x - y| &= |2 - 5| \\ &= |-3| \\ &= \underline{\underline{3}} & \text{2 p (6 p)}\end{aligned}$$



3.

a)

Sijoitetaan  $x = 2$  yhtälöön

$$x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$$

$$2^2 - 4a \cdot 2 + 4a^2 = 0$$

$$4a^2 - 8a + 4 = 0 \quad || : 4 \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$a = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$a = \underline{\underline{1}} \quad \mathbf{2 \text{ p (3 p)}}$$

b)

Muutosten jälkeen tulos on ( $a > 0$ )  $a \cdot 1,20 \cdot 0,83 = 0,996a < a$ . **1 p (4 p)**

**1 p (5 p)** Muutos on  $0,996a - a = -0,004a$ . Prosentteina muutos on

$$\frac{-0,004a}{a} = -0,004 = -0,4\%$$

Vastaus: Tulos on pienempi kuin alkuperäinen. Muutos on -0,4 %. **1 p (6 p)**

4.

a) Ympyrän halkaisija on  $d = 5$ . Egyptiläisten neliön sivun pituus on tällöin

$$\begin{aligned} a &= \frac{8}{9}d \\ &= \frac{8}{9} \cdot 5 \\ &= \frac{40}{9}. \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Egyptiläisten neliön pinta-ala on siten

$$\begin{aligned} A_n &= a^2 \\ &= \left(\frac{40}{9}\right)^2 \\ &= \frac{1600}{81} \\ &= 19,753\dots \\ &\approx 19,75 \end{aligned}$$

Vastaus: Pinta-ala on 19,75.

**2 p (3 p)**

b) Ympyrän pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_y &= \pi r^2 \\ &= \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= 19,634\dots \end{aligned}$$

Egyptiläisten menetelmällä pinta-ala oli  $A_n = 19,753\dots$ , joten  $A_n > A_y$ . **1 p (4 p)**

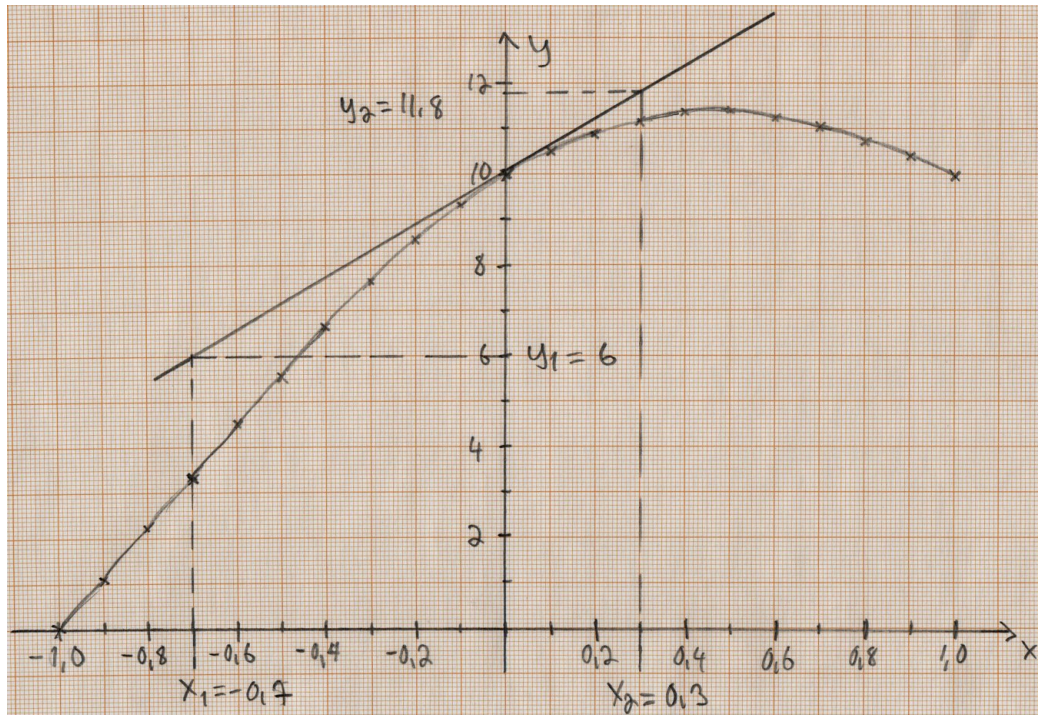
Pinta-alan virhe on

$$\begin{aligned} \frac{A_n - A_y}{A_y} &= \frac{19,735\dots - 19,634\dots}{19,634\dots} \\ &= 0,00601\dots \\ &\approx 0,6\% \end{aligned}$$

Vastaus: Ala on liian suuri. Virhe on 0,6 %

**2 p (6 p)**

5. Piirretään pisteet  $(x, y)$ -koordinaatistoon millimetripaperille. Saadaan käyrä  $y = f(x)$ .



2 p kuvaajasta

1 p (3 p) tangentista

Määritetään funktion derivaatta  $f'(0)$  käyrän  $y = f(x)$  kohtaan  $x = 0$  piirretyn tangentin kulmakertoimena. **1 p (4 p)**

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{11,8 - 6}{0,3 - (-0,7)} \\ &= 5,8 \end{aligned}$$

Vastaus: Funktion derivaatta kohdassa  $x = 0$  on  $f'(0) = 5,8$ .

**2 p (6 p)**

6. A4- ja A5-kokoiset kartat ovat yhdenmuotoisia. Merkitään pinta-aloja

$A_1$  on A4:n pinta-ala,

$A_2$  on A5:n pinta-ala.

Tehtävänannon mukaan

$$A_2 = \frac{1}{2}A_1 \quad || : A_1$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Karttojen pinta-alojen suhde on vastinpituuksien neliö, eli

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\pm\right) \sqrt{\frac{1}{2}} \quad || \cdot x_1$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}x_1 \quad || : \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = \sqrt{2}x_2. \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

Merkitään vastinpituuksien suhdetta luonnon ja A4-kartan välillä  $\frac{x_1}{L}$ . Tällöin

$$\frac{x_1}{L} = \frac{1}{20000}, \quad \text{siis } x_1 = \sqrt{2}x_2$$

$$\frac{\sqrt{2}x_2}{L} = \frac{1}{20000} \quad || : \sqrt{2} \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}$$

$$\frac{x_2}{L} = \frac{1}{20000 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\frac{x_2}{L} = \frac{1}{28284,27\dots} \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}}$$

$$\frac{x_2}{L} \approx \frac{1}{28000}$$

Vastaus: Piennetyn kartan mittakaava on 1 : 28000.  $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

7.

Keskiarvo on

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{5,80 \cdot 0 + 10,99 \cdot 1 + 17,54 \cdot 2 + 24,78 \cdot 3 + 19,95 \cdot 4 + 15,48 \cdot 5 + 5,46 \cdot 6}{5,80 + 10,99 + 17,54 + 24,78 + 19,95 + 15,48 + 5,46} \\ &= 3,1037 \quad \mathbf{2 \text{ p}} \\ &\approx 3,10. \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

Keskihajonta on

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{5,80 \cdot (0 - 3,1037)^2 + 10,99 \cdot (1 - 3,1037)^2 + 17,54 \cdot (2 - 3,1037)^2 \dots \\ &\quad + 24,78 \cdot (3 - 3,1037)^2 + 19,95 \cdot (4 - 3,1037)^2 \dots \\ &\quad + 15,48 \cdot (5 - 3,1037)^2 + 5,46 \cdot (6 - 3,1037)^2}{5,80 + 10,99 + 17,54 + 24,78 + 19,95 + 15,48 + 5,46}} \\ &= 1,560879 \dots \quad \mathbf{2 \text{ p (5 p)}} \\ &\approx 1,56.\end{aligned}$$

 Vastaus: Keskiarvo on 3,10 ja keskihajonta on 1,56.  $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$

8.

Merkitään todennäköisyyksiä

$$P(\text{"1 ruutu on ruskea"}) = r = \frac{1}{2},$$

$$P(\text{"1 ruutu on sininen"}) = s = \frac{1}{2}.$$

a) Kuvion 2 mukainen shakkilauta koostuu 9 ruudusta, joista jokainen voi olla vain tietyn värinen. Eli suotuisia väritysvaihtoehtoja on vain yksi.

Kaikkiaan 9 ruutua voidaan värittää kahdella värillä  $2^9$ :llä tavalla. Todennäköisyydeksi saadaan

1 p

$$\begin{aligned} P(\text{"kuvio 2"}) &= \frac{1}{2^9} \\ &= \frac{1}{512} \\ &= 0,001953 \dots \\ &\approx 0,20\%. \end{aligned} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Vastaus: Todennäköisyys on 0,20 %.

1 p (3 p)

b) Merkitään tapahtumaa

$A$  on "Vaakarivi on yksivärinen", eli

$A$  on "Vaakarivi on ruskea tai sininen"

Täydet pisteet myös murto-  
lukuna annetusta vastauk-  
sesta.

Tämän todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(A) &= P(r \text{ ja } r \text{ ja } r \text{ tai } s \text{ ja } s \text{ ja } s) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tapahtuman  $A$  vastatapahtuma  $\bar{A}$  on "Vaakarivi ei ole yksivärinen". Tämän todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

Kysytty tapahtuma on

$B$  on "Mikään vaakarivi ei ole yksivärinen", eli

$B$  on "Kaikki vaakarivit ovat ei-yksivärisiä".

Tämän todennäköisyys on

$$\begin{aligned}P(B) &= P(\bar{A} \text{ ja } \bar{A} \text{ ja } \bar{A}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{27}{64} \\ &= 0,421875 \\ &\approx 42,2\%.\end{aligned}$$

Vastaus: Todennäköisyys on 42,2 %.

2 p (6 p)

Täydet pisteet myös murto-  
lukuna annetusta vastauk-  
sesta.

9.

$$f(x) = -x^3 + x + 2$$

$$g(x) = x^3 - x - 2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 1$$

$$g'(x) = 3x^2 - 1.$$

1 p

Ratkaistaan epäyhtälö

$$f'(x) > g'(x)$$

$$-3x^2 + 1 > 3x^2 - 1$$

$$-6x^2 + 2 > 0 \quad || : (-2)$$

$$3x^2 - 1 < 0.$$

1 p (2 p)

Nollakohdat ovat

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 = 1 \quad || : 3$$

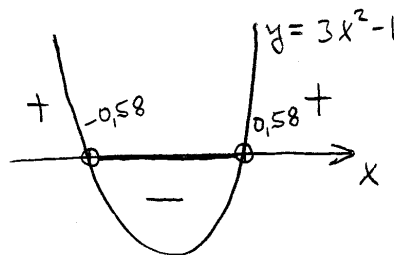
$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x = \pm 0,57753 \dots$$

$$x \approx \pm 0,58.$$

2 p (4 p)



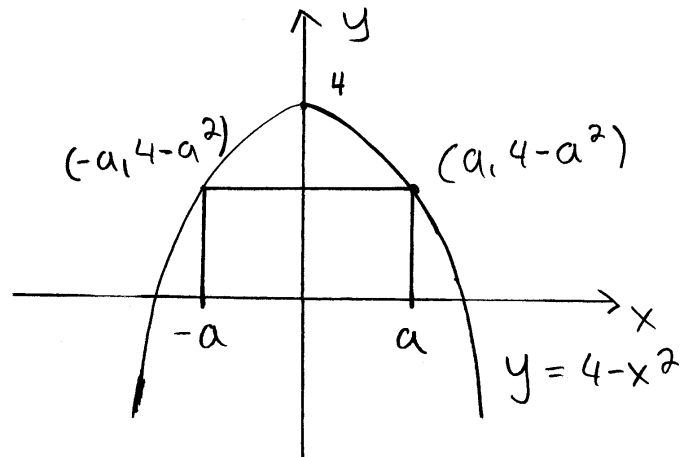
1 p (5 p)

Vastaus:  $f'(x) > g'(x)$ , kun  $-0,58 < x < 0,58$ .

1 p (6 p)



10.



1 p

Suorakulmion leveys on  $a - (-a) = 2a$ . Suorakulmion korkeus on  $4 - a^2$ . Suorakulmion pinta-ala on tällöin

$$\begin{aligned} A(a) &= 2a(4 - a^2) \\ &= -2a^3 + 8a \quad , \text{ missä } 0 < a < 2. \end{aligned}$$

1 p (2 p)

Etsitään  $A(a)$ :lle suurin arvo derivaatan avulla. Pinta-alan derivaatta on

$$A'(a) = -6a^2 + 8.$$

1 p (3 p)

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} A'(a) &= 0 \\ -6a^2 + 8 &= 0 \\ 6a^2 &= 8 \quad || : 6 \\ a^2 &= \frac{8}{6} \\ a^2 &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

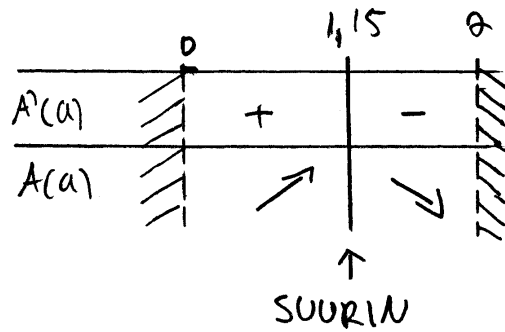
$$\begin{aligned} a &= (\pm) \sqrt{\frac{4}{3}} \\ a &= 1,154\dots \end{aligned}$$

$$a \approx 1,15$$

1 p (4 p)

Muodostetaan  $A(a)$ :n kulkukaavio.

$$\begin{aligned} A'(1) &= -6 \cdot 1^2 + 8 = 2 > 0 \\ A'(1,5) &= -5,5 < 0. \end{aligned}$$



1 p (5 p)

Vastaus: Pinta-ala on suurin arvolla  $a = 1,15$ .

1 p (6 p)

11. Merkitään  $q$ :lla kerrointa, jonka mukaisesti aktiivisuus vähenee vuorokaudessa. Edelleen merkitään

$a_0$  on aktiivisuus alussa,

$a_n$  on aktiivisuus  $n$  vuorokauden kuluttua.

Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, joten

$$a_n = a_0 \cdot q^n, \text{ missä } 0 < q < 1. \quad \mathbf{1 \text{ p}} \quad (1)$$

Aktiivisuus tarkastelujakson alussa ja viiden vuorokauden kuluttua on

$$a_0 = 25,0 \text{ (kBq)} \text{ ja} \quad (2)$$

$$a_5 = 16,2 \text{ (kBq)}. \quad (3)$$

Yhtälöstä (1) saadaan

$$a_5 = a_0 \cdot q^5 \quad \parallel \text{Sij. (2) ja (3)}$$

$$16,2 = 25,0 \cdot q^5 \quad \parallel : 25,0$$

$$q^5 = \frac{16,2}{25,0}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{16,2}{25,0}}$$

$$q = 0,916885 \dots$$

**1 p (2 p)**

Puoliintumisaika vuorokausina saadaan ehdosta

$$a_n = \frac{a_0}{2} \quad \parallel \text{Sij. (1)}$$

$$a_0 q^n = a_0 \cdot 0,5$$

$$q^n = 0,5 \quad \parallel \lg() \quad (q > 0)$$

$$\lg q^n = \lg 0,5$$

$$n \lg q = \lg 0,5 \quad \parallel : \lg q$$

$$n = \frac{\lg 0,5}{\lg q}$$

$$n = \frac{\lg 0,5}{\lg 0,916885 \dots}$$

$$n = 7,988059 \dots$$

$$n \approx 7,99 \text{ (vrk)}$$

**2 p (4 p)**

Aktiivisuus 10 vrk ennen ensimmäistä mittausta on

$$a_0 \cdot q^{-10} = 25,0 \cdot 0,916885 \dots^{-10}$$

$$= 59,5374 \dots$$

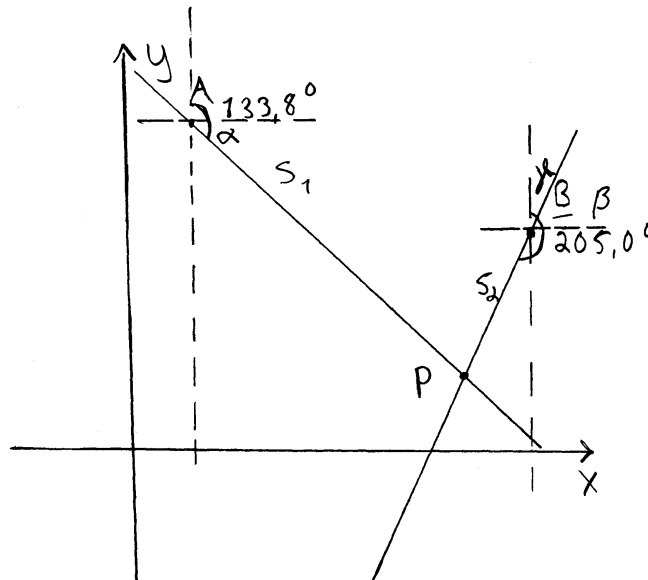
$$\approx 59,5 \text{ (kBq)}$$

Vastaus: Puoliintumisaika on 7,99 vuorokautta.

Aktiivisuus 10 vrk ennen 1. mittausta oli 59,5 kBq.

**2 p (6 p)**

12.



Nimetään  $x$ - ja  $y$ -akselit toisin päin kuin tehtävänannossa, eli pohjoiseen osoittava akseli on  $y$ -akseli ja itään osoittava akseli on  $x$ -akseli. (Huomautus lukijalle: Näin koordinaatiston ja laskelmien merkinnöistä saadaan tavanomaisemmat ja laskutyö helpottuu.) Kun akselit on nimetty uudestaan, ovat havaintopisteiden koordinaatit

1 p kuvaa-  
jasta seli-  
tyksineen.

$$A = (2549572, 6670801)$$

$$B = (2554955, 6670015)$$

Trombi on pisteessä P. Lasketaan suorien  $s_1$  ja  $s_2$  kulmakertoimet.

Suoran  $s_1$  suuntakulma  $\alpha$  on

$$\alpha = 90^\circ - 133,8^\circ = -43,8^\circ.$$

Kulmakerroin on

$$\begin{aligned} k_1 &= \tan \alpha \\ &= \tan(-43,8^\circ) \\ &= -0,9589 \dots \end{aligned}$$

Suoran  $s_2$  suuntakulma on  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \gamma &= 205^\circ - 180^\circ \\ &= 25^\circ \\ \beta &= 90^\circ - 25^\circ \\ &= 65^\circ \end{aligned}$$

Kulmakerroin on

$$\begin{aligned} k_2 &= \tan \beta \\ &= \tan 65^\circ \\ &= 2,1445\dots \end{aligned} \quad \mathbf{1\ p\ (2\ p)}$$

Merkitään P:n koordinaatteja  $(x_0, y_0)$ :lla. Suoran  $s_1$  kulmakerroin pisteiden P ja A avulla lausuttuna on

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} \quad \parallel \cdot (x_A - x_0) \\ k_1 x_A - k_1 x_0 &= y_A - y_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Lausutaan vastaavasti suoran  $s_2$  kulmakerroin.

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{y_0 - y_B}{x_0 - x_B} \quad \parallel \cdot (x_0 - x_B) \\ k_2 x_0 - k_2 x_B &= y_0 - y_B \end{aligned} \quad (2)$$

Yhdistetään yhtälöt (1) ja (2) yhtälöpariksi.

$$\begin{cases} k_1 x_A - k_1 x_0 = y_A - y_0 \\ k_2 x_0 - k_2 x_B = y_0 - y_B \end{cases} \quad \mathbf{1\ p\ (3\ p)}$$

$$\begin{aligned} k_1 x_A - k_1 x_0 + k_2 x_0 - k_2 x_B &= y_A - y_B \\ (k_2 + k_1)x_0 &= y_A - y_B - k_1 x_A + k_2 x_B \quad \parallel : (k_2 + k_1) \\ x_0 &= \frac{y_A - y_B - k_1 x_A + k_2 x_B}{k_2 + k_1} \end{aligned} \quad \mathbf{1\ p\ (4\ p)}$$

Sijoitetaan arvot, saadaan

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{6670801 - 6670015 + 0,959\dots \cdot 2549572 + 2,144\dots \cdot 2554955}{2,144\dots + 0,958\dots} \\ x_0 &= 2553544,931\dots \\ x_0 &\approx 2553545 \end{aligned} \quad \mathbf{1\ p\ (5\ p)}$$

Ratkaistaan  $y_0$  yhtälöstä (1).

$$\begin{aligned} y_0 &= -k_1 x_A + k_1 x_0 + y_A \\ &= k_1(x_0 - x_A) + y_A \\ &= -0,9589\dots \cdot (2553544,93 - 2549572) + 6670801 \\ &= 6666991,096\dots \\ &\approx 6666991. \end{aligned}$$

Tehtävänannon koordinaatistossa  $x$ - ja  $y$ -akselit olivat toisin päin, joten

Vastaus: Tehtävänannon koordinaatistossa

trombi on pisteessä  $P = (6666991, 2553545)$ . **1 p (6 p)**

13. Merkitään aritmeettista jonoa  $a_n$ :llä.

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = 12$$

$$d = a_{n+1} - a_n = a_2 - a_1 = 12 - 10 = 2$$

Yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 10 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 10 + 2n - 2 \\ &= 2n + 8 \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Merkitään geometristä jonoa  $b_n$ :llä.

$$\begin{aligned} b_1 &= 2 \\ q &= \frac{21}{20} \end{aligned}$$

Yleinen jäsen on

$$b_n = q^{n-1} \cdot b_1 = \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} \cdot 2. \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

Tutkitaan, millä  $n$ :n arvolla toteutuu epäyhtälö

$$\begin{aligned} b_n &> a_n \\ \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} \cdot 2 &> 2n + 8. \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$$

Ratkaistaan epäyhtälö kokeilemalla.

$$n = 95$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{21}{20}\right)^{95-1} \cdot 2 &> 2 \cdot 95 + 8 \\ 196,25 \dots &> 198 \quad \text{epätosi} \end{aligned}$$

$$n = 97$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{21}{20}\right)^{97-1} \cdot 2 &> 2 \cdot 97 + 8 \\ 216,37 \dots &> 202 \quad \text{tosi} \end{aligned}$$

$$n = 96$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{21}{20}\right)^{96-1} \cdot 2 &> 2 \cdot 96 + 8 \\ 206,06 \dots &> 200 \quad \text{tosi} \end{aligned} \quad \mathbf{2 \text{ p (5 p)}}$$

Näin ollen  $b_n > a_n$  arvosta  $n = 96$  lähtien.

Vastaus: Geometrisen jonon termi on aritmeettisen  
jonon termiä suurempi 96. termistä lähtien.

1 p (6 p)

14. a)

$$K = 1800000 \text{ €}$$

$$p = 5,4 (\%)$$

Tuotto eräänä vuonna on

$$\begin{aligned} \frac{p}{100} \cdot K &= 0,054 \cdot 1800000 \\ &= 97200 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Tuotosta 30 % siirrettiin pääomaan, joten  $(100 - 30) \% = 70 \%$  jaettiin apurahoina. Euroina apurahojen määrä on

$$97200 \text{ €} \cdot 0,7 = 68040 \text{ €} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Matka-apurahiin jäi

$$68040 \text{ €} - 2 \cdot 21000 \text{ €} = 26040 \text{ €} \quad \mathbf{1 \text{ p (2 p)}}$$

Siten yhden matka-apurahan suuruus oli

$$\frac{26040 \text{ €}}{14} = 1860 \text{ €}$$

Vastaus: Matka-apurahat olivat 1860 euron suuruisia.  $\mathbf{1 \text{ p (3 p)}}$

b) Pääoman tuotto on 5,4 %, josta 30 %:n osuus siirretään vuosittain pääomaan. Pääoma kasvaa siis vuosittain

$$5,4\% \cdot 0,30 = 1,62\%$$

Korkotekijäksi saadaan

$$\begin{aligned} q &= 1 + \frac{1,62}{100} \\ &= 1,0162 \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p (4 p)}}$$

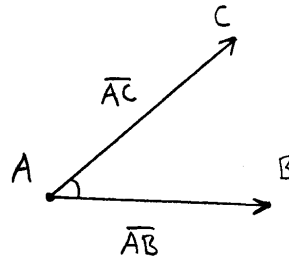
Pääoma viiden vuoden kuluttua on

$$\begin{aligned} K_5 &= K \cdot q^5 \\ &= 1800000 \cdot 1,0162^5 \\ &= 1950601,069 \dots \\ &\approx 1950000 \text{ (€)} \end{aligned} \quad \mathbf{1 \text{ p (5 p)}}$$

Vastaus: Pääoma kasvaa viidessä vuodessa 1,95 miljoonaan euroon.  $\mathbf{1 \text{ p (6 p)}}$



15.



$$A = (1, 2, 3) \quad B = (4, 5, 6) \quad C = (9, 8, 7)$$

Kulma BAC on sama kuin vektorien  $\overline{AB}$  ja  $\overline{AC}$  välinen kulma.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (4 - 1)\bar{i} + (5 - 2)\bar{j} + (6 - 3)\bar{k} \\ &= 3\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k} \end{aligned} \quad 1 \text{ p}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= (9 - 1)\bar{i} + (8 - 2)\bar{j} + (7 - 3)\bar{k} \\ &= 8\bar{i} + 6\bar{j} + 4\bar{k} \end{aligned} \quad 1 \text{ p (2 p)}$$

Vektorien väliselle kulmalle pätee

$$\begin{aligned} \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} \\ \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) &= \frac{(3\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}) \cdot (8\bar{i} + 6\bar{j} + 4\bar{k})}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{8^2 + 6^2 + 4^2}} \quad 1 \text{ p (3 p)} \\ \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) &= \frac{3 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{116}} \end{aligned}$$

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = 0,96490 \dots \quad 1 \text{ p (4 p)}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) = 15,22515 \dots^\circ \quad 1 \text{ p (5 p)}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) \approx 15^\circ$$

Vastaus:  $\sphericalangle BAC = 15^\circ$  1 p (6 p)