Lyhyt matematiikka, syksy 2010

Mallivastaukset, 29.9.2010

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen on opettanut lukiossa viiden vuoden ajan pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita koko tämän ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennus Oy:ssä. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennus Oy:n omaisuutta.

MA-FY Valmennus Oy on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- yo-kokeisiin valmentavat kurssit
- yksityisopetus

Vuoden 2010 keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

Tämä asiakirja on tarkoitettu yksityishenkilöille opiskelukäyttöön ja omien yo-vastausten tarkistamista varten. Kopion tästä asiakirjasta voi ladata MA-FY Valmennuksen internet-sivuilta www.mafyvalmennus.fi. Käyttö kaikissa kaupallisissa tarkoituksissa on kielletty. Lukion matematiikan opettajana voit käyttää näitä mallivastauksia oppimateriaalina lukiokursseilla.

MA-FY Valmennus Oy:n yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	050 338 7098

1. a) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3}+\frac{1-x}{4}=\frac{1}{6}$.

b) Ratkaise yhtälö $(x-2)^2-4(2-x)=0$.

c) Mikä on lausekkeen $\frac{3x-1}{x+1}$ arvo, kun $x=\frac{4}{7}$?

Ratkaisu. **a)**

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3}+\frac{1-x}{4}&=\frac{1}{6} \quad \| \cdot 12\\
\frac{12x}{3}+\frac{12(1-x)}{4}&=\frac{12}{6}\\
4x+3(1-x)&=2\\
4x+3-3x&=2\\
\underline{\underline{x=-1}}&
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(x-2)^2-4(2-x)&=0\\
x^2-4x+4-8+4x&=0\\
x^2-4&=0\\
x^2&=4\\
\underline{\underline{x=\pm 2}}&
\end{aligned}$$

c) $x=\frac{4}{7}$,

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{x+1}&=\frac{3\cdot\frac{4}{7}-1}{\frac{4}{7}+1}\\
&=\frac{\frac{12}{7}-1}{\frac{4}{7}+1}\\
&=\frac{\frac{12}{7}-\frac{7}{7}}{\frac{4}{7}+\frac{7}{7}}\\
&=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{11}{7}}\\
&=\frac{5}{\cancel{7}_1}\cdot\frac{\cancel{7}^1}{11}\\
&=\underline{\underline{\frac{5}{11}}}
\end{aligned}$$

2. a) Ympyrän kehän pituus on 10,25 m. Määritä ympyrän pinta-ala 0,01 neliömetrin tarkkuudella.

b) Suorakulmaisessa kolmiossa toisen terävän kulman sini on 0,123. Laske kolmion terävät kulmat asteen tarkkuudella.

c) Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi on 1 ja viides on 3. Mikä on jonon kymmenes termi?

Ratkaisu. **a)** $p = 10{,}25\,\mathrm{m}$
Ratkaistaan ympyrän säde.

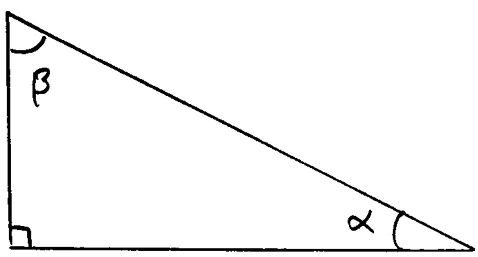
$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \quad \| : (2\pi) \\ r &= \frac{p}{2\pi} \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ A &= \pi \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 \\ &= \pi \cdot \frac{p^2}{2^2\pi^2} \\ &= \frac{p^2}{4\pi} \\ &= \frac{10{,}25^2}{4\pi} \\ &= 8{,}3606\ldots \\ &\approx 8{,}36\,(\mathrm{m}^2) \end{aligned}$$

Vastaus: Ympyrän pinta-ala on $8{,}36\,\mathrm{m}^2$.

b)



$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 0{,}123\\ \alpha &= 7{,}06\ldots^\circ\\ \alpha &\approx 7^\circ\end{aligned}$$

Kolmion kulmien summa on 180°

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+90^\circ &= 180^\circ\\ \beta &= 90^\circ-\alpha\\ \beta &= 90^\circ-7{,}065\ldots^\circ\\ \beta &= 82{,}934\ldots^\circ\\ \beta &\approx 83^\circ\end{aligned}$$

Vastaus: Terävät kulmat ovat 7° ja 83°.

c)

$$\begin{aligned}a_1 &= 1\\ a_5 &= 3\end{aligned}$$

Aritmeettisen lukujonon yleinen termi on

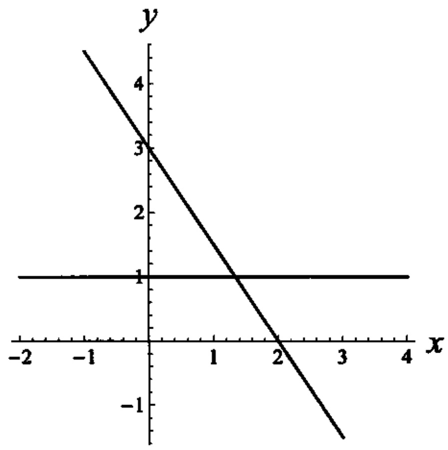
$$\begin{aligned}a_n &= a_1+(n-1)d\\ 3 &= 1+(5-1)\cdot d\\ 2 &= 4d \quad \| : 4\\ d &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jonon 10. termi on

$$\begin{aligned}a_{10} &= 1+(10-1)\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{11}{2}\\ &= 5\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vastaus: Jonon 10. termi on $5\frac{1}{2}$.

3. Oheisessa kuviossa on kaksi suoraa. Määritä näiden yhtälöt, ja laske niiden leikkauspisteen koordinaatit. Mikä on suorien ja y-akselin rajaaman kolmion pinta-ala?



Ratkaisu. Vaakasuoran suoran yhtälö on $y = 1$.
Laskeva suora kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(2, 0)$ kautta. Sen kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{2-0} = -\frac{3}{2}.$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$, $b = 3$.

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Lasketaan leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$$

Tehdään sijoitus:

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{3}{2}x + 3 \\ -\frac{3}{2}x &= -2 \quad \| \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right) \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Leikkauspisteeksi saadaan $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$.

Suorat rajaavat suorakulmaisen kolmion, jonka kateetit ovat

$$a = \frac{4}{3} \quad \text{ja} \quad b = 3 - 1 = 2$$

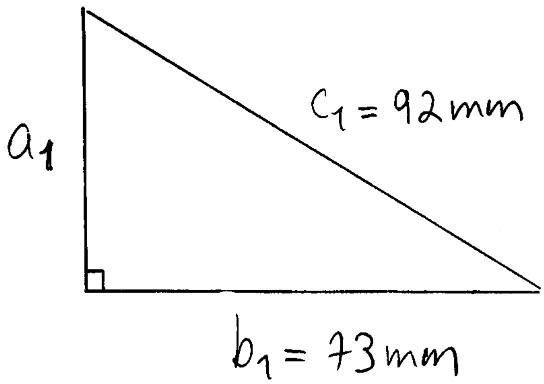
Kolmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{ab}{2} \\ &= \frac{\frac{4}{3} \cdot 2}{2} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vastaus: Suorien yhtälöt ovat $y = 1$ ja $y = -\frac{3}{2}x + 3$.
Suorien leikkauspiste on $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$.
Suorien ja y-akselin rajaaman kolmion pinta-ala on $\frac{4}{3}$.

4. Määritä suorakulmaisen kolmion muotoisen tontin sivujen pituudet ja pinta-ala, kun kartasta mitattuna kahden pisimmän sivun pituudet ovat 92 mm ja 73 mm. Kartan mittakaava on 1 : 2 000.

Ratkaisu.



Lasketaan toisen kateetin pituus a_1 Pythagoraan lauseella:

$$\begin{aligned} c_1^2 &= b_1^2 + a_1^2 \\ a_1^2 &= c_1^2 - b_1^2 \\ a_1 &= {}_{(}\overset{+}{-}{}_{)} \sqrt{c_1^2 - b_1^2} \\ a_1 &= \sqrt{92^2 - 73^2} \\ &= 55{,}99\ldots \text{ (mm)} \end{aligned}$$

Merkitään kartan kolmion sivujen pituuksia a_1, b_1 ja c_1 vastaavia tontin sivujen pituuksia a_2, b_2 ja c_2.
Mittakaava on vastinpituuksien suhde, joten a_2:n arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{2\,000}{1} \quad \| \cdot a_1 \\ a_2 &= 2\,000 a_1 \\ &= 2\,000 \cdot 55{,}99\ldots \text{ mm} \\ &= 111\,982{,}14\ldots \text{ mm} \\ &= \frac{111\,982{,}14\ldots}{10^3} \text{ m} \\ &= 111{,}982\ldots \text{ m} \\ &\approx 110 \text{ m} \end{aligned}$$

Samoin saadaan b_2 ja c_2:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_2}{b_1} &= \frac{2\,000}{1} \qquad \| \cdot b_1 \\
b_2 &= 2\,000 b_1 \\
&= 2\,000 \cdot 73\,\text{mm} \\
&= 146\,000\,\text{mm} \\
&= \frac{146\,000}{10^3}\,\text{m} \\
&= 146\,\text{m} \\
&\approx 150\,\text{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= 2\,000 \cdot c_1 \\
&= 2\,000 \cdot 92\,\text{mm} \\
&= 184\,000\,\text{mm} \\
&= \frac{184\,000}{10^3}\,\text{m} \\
&= 184\,\text{m} \\
&\approx 180\,\text{m}
\end{aligned}
$$

Lasketaan tontin pinta-ala

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a_2 b_2}{2} \\
&= \frac{111{,}982\ldots\,\text{m} \cdot 146\,\text{m}}{2} \\
&= 8\,174{,}69\ldots\,\text{m}^2 \\
&\approx 8\,200\,\text{m}^2
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\underline{\underline{\text{Tontin sivut ovat } 110\,\text{m},\ 150\,\text{m ja } 180\,\text{m ja pinta-ala } 8\,200\,\text{m}^2.}}$

5. Tuotteen hintaa korotetaan ensin 45 prosenttia ja sen jälkeen 62 prosenttia. Näytä, että tulos on sama, jos tuotteen hintaa korotetaan ensin 62 prosenttia ja sitten 45 prosenttia. Kuinka monen prosentin nousua tuotteen hinnassa korotukset yhteensä merkitsevät? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu. Tuotteen hinta alussa on a. Hintaa nostetaan ensin 45 % ja sen jälkeen 62 %, saadaan

$$1{,}62 \cdot (1{,}45 \cdot a) = 2{,}349 \cdot a.$$

Kun hintaa nostetaan ensin 62 % ja sen jälkeen 45 % on lopullinen hinta

$$1{,}45 \cdot (1{,}62 \cdot a) = 2{,}349 \cdot a.$$

Lopullinen hinta on siis sama molemmissa tapauksissa.
Hinnan korotus on

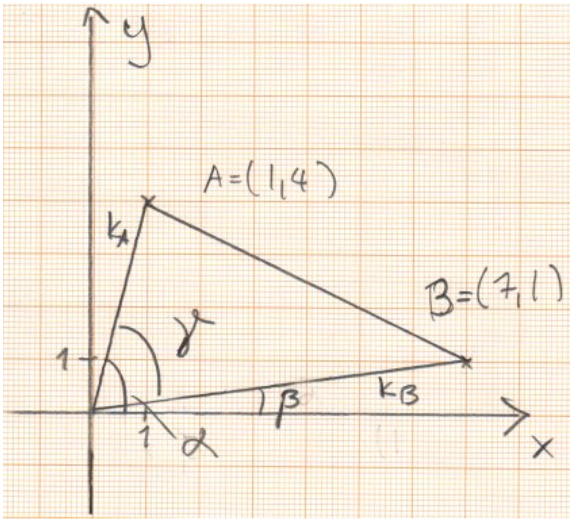
$$2{,}349a - a = 1{,}349a,$$

joka vastaa 134,9 % korotusta.

Vastaus: Korotus vastaa 134,9 % hinnan nousua.

6. Pisteitä $A = (1, 4)$ ja $B = (7, 1)$ katsotaan origosta. Kuinka suuressa kulmassa jana AB tällöin näkyy, ts. mikä on janan päätepisteisiin suuntautuvien tähtäysviivojen välinen kulma? Anna vastaus yhden asteen tarkkuudella.

Ratkaisu.



Lasketaan janojen A ja B kulmakertoimet:

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
k_A &= \frac{4-0}{1-0} = 4 \\
k_B &= \frac{1-0}{7-0} = \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Kulmat α ja β ovat janojen kautta kulkevien suurien suuntakulmat:

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= k_A \\
\tan\alpha &= 4 \\
\alpha &= 75{,}963\ldots^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= k_B \\
\tan\beta &= \frac{1}{7} \\
\beta &= 8{,}130\ldots^\circ
\end{aligned}
$$

Lasketaan kulma γ.

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha - \beta \\ &= 75{,}963\ldots^\circ - 8{,}130\ldots^\circ \\ &= 67{,}833\ldots^\circ \\ &\approx 68^\circ\end{aligned}$$

Vastaus: Jana AB näkyy 68°:een kulmassa.

7. Määritä polynomin $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

a) nollakohdat,

b) ääriarvokohdat ja ääriarvot sekä

c) piirrä polynomin kuvaaja.

Ratkaisu. Merkitään $P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$.
a) Etsitään nollakohdat:

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x &= 0 \\ x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan joko

$$x = 0$$

tai

$$\begin{aligned} &x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} = 0 \quad \| \cdot 4 \\ &4x^2 - 6x - 9 = 0, \qquad a = 4, \quad b = -6, \quad c = -9 \\ &x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} \\ &x = \frac{6 \pm \sqrt{180}}{8} \\ &x = \frac{6 - \sqrt{180}}{8} \quad \text{tai} \quad x = \frac{6 + \sqrt{180}}{8} \\ &x = -0{,}927\ldots \quad \text{tai} \quad x = 2{,}427\ldots \end{aligned}$$

Vastaus: Nollakohdat ovat $x = 0$, $x = -0{,}93$ ja $x = 2{,}43$.

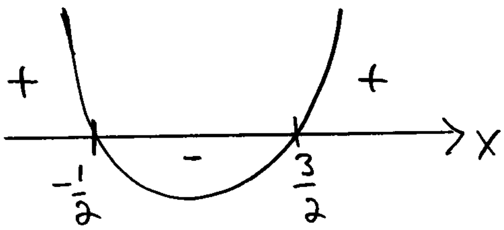
b) $P(x)$ on jatkuva ja derivoituva, ja sen derivaattafunktio on

$$P'(x) = 3x^2 - 3x - \frac{9}{4}.$$

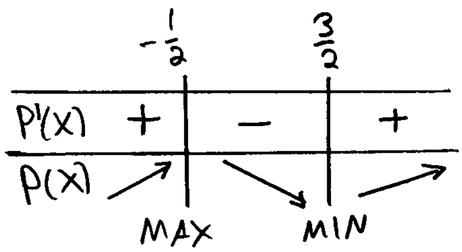
$P(x)$:n ääriarvot löytyvät derivaatan nollakohdista.

$$
\begin{aligned}
P'(x) &= 0 \\
3x^2 - 3x - \frac{9}{4} &= 0 \quad \| \cdot 4 \\
12x^2 - 12x - 9 &= 0, \qquad a = 12, \quad b = -12, \quad c = -9 \\
x &= \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-9)}}{2 \cdot 12} \\
x &= \frac{12 \pm \sqrt{576}}{24} \\
x = -\frac{12}{24} \quad &\text{tai} \quad x = \frac{36}{24} \\
x = -\frac{1}{2} \quad &\text{tai} \quad x = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



Muodostetaan polynomin merkkikaavio:



Lasketaan ääriarvot. Maksimi:

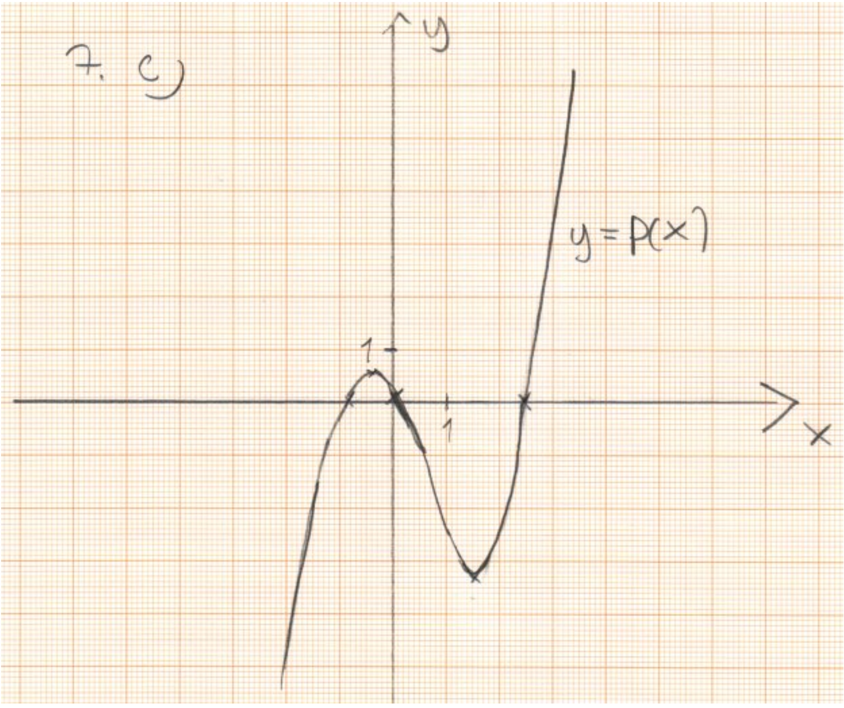
$$P\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

Minimi:

$$P\left(\tfrac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{27}{8}$$

Vastaus: Maksimikohta $x = -\frac{1}{2}$, maksimi $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$.
Minimikohta $x = \frac{3}{2}$, minimi $P\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$.

c) Tiedämme a- ja b-kohtien perusteella, että $P(x)$:n kuvaaja kulkee pisteiden $(-0{,}93; 0)$, $(2{,}43; 0)$, $(0, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ ja $\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{8}\right)$ kautta. Piirretään kuvaaja.



8. Verkkopankkiin kirjaudutaan niin, että ensin annetaan kuuden numeron pituinen käyttäjätunnus ja neljän numeron pituinen salasana, minkä jälkeen annetaan vielä neljän numeron pituinen kertakäyttötunnus. Jokaisella pankin asiakkaalla on eri käyttäjätunnus, mutta usealla asiakkaalla voi olla sama salasana ja kertakäyttötunnus.

a) Jos verkkopankilla on 600 000 asiakasta, niin mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä arvauksella löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnuksen?

b) Mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä yrityksellä pääsee kirjautumaan verkkopankkiin?

Ratkaisu. **a)** Olkoon A tapaus ”yhdellä arvauksella löydetään jonkun asiakkaan käyttäjätunnus”. Kuusinumeroisia käyttäjätunnuksia on 1 000 000 kpl (000000–999999). Näistä 600 000 on pankin asiakkaiden käytössä, joten

$$P(A) = \frac{600\,000}{1\,000\,000} = 0{,}6.$$

Vastaus: Todennäköisyys sille, että yhdellä arvauksella löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnuksen on 0,6.

b) Merkitään:

A on ”yhdellä arvauksella löydetään jonkun asiakkaan käyttäjätunnus”
B on ”arvataan yhdellä yrityksellä oikein asiakkaan salasana”
C on ”arvataan yhdellä yrityksellä oikein asiakkaan kertakäyttötunnus”
D on ”päästään yhdellä yrityksellä kirjautumaan verkkopankkiin”

Jotta pääsisi kirjautumaan pankkiin sisälle, pitää löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnus, tämän salasana ja kertakäyttötunnus. Siis

$$P(D) = P(A \text{ ja } B \text{ ja } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C). \tag{1}$$

Nelinumeroisia salasanoja on 10 000 kpl (0000–9999). Samoin mahdollisia kertakäyttötunnuksia on 10 000 kpl. Näin ollen

$$P(B) = P(C) = \frac{1}{10\,000} = 10^{-4}.$$

a-kohdassa todettiin, että $P(A) = 0{,}6$, joten kun sijoitetaan saadut todennäköisyydet yhtälöön (1), saadaan

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-9}.$$

Vastaus: Todennäköisyys sille, että päästään yhdellä yrityksellä kirjautumaan verkkopankkiin on $6 \cdot 10^{-9}$.

9. Punnuksilla käyvässä seinäkellossa on 12 tunnin kellotaulu. Kello lyö puolen tunnin kohdalla kerran ja täyden tunnin kohdalla tuntimäärän mukaisesti. Lyöntipunnus laskeutuu viikossa 1 120 mm.

a) Paljonko lyöntipunnus laskeutuu yhdellä lyönnillä?

b) Maanantaista klo 12.05 lähtien lyöntipunnus on eräänä ajankohtana laskeutunut 650 mm. Määritä vastaava viikonpäivä ja kellonaika puolen tunnin tarkkuudella.

Ratkaisu. **a)** Kello lyö vuorokaudessa puolituntisten kohdalla 24 kertaa. Lisäksi kello lyö täysien tuntien kohdalla

$$2 \cdot (\underbrace{1 + 2 + \cdots + 12}_{S_n}) \text{ kertaa.}$$

S_n on aritmeettinen summa, jossa $n = 12$, $a_1 = 1$ ja $a_n = 12$. Saadaan

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ S_{12} &= \frac{12(12+1)}{2} \\ &= 78. \end{aligned}$$

Kello lyö vuorokaudessa yhteensä

$$24 + 2 \cdot 78 = 180 \text{ kertaa.}$$

Näin ollen kello lyö viikossa

$$7 \cdot 180 = 1\,260 \text{ kertaa.}$$

Punnus laskeutuu viikossa 1 120 mm, joten yhdellä lyönnillä se laskeutuu

$$\begin{aligned} \frac{1\,120}{1\,260} &= 0{,}888\ldots \\ &\approx 0{,}89\,(\text{mm}) \end{aligned}$$

Vastaus: Punnus laskeutuu yhdellä lyönnillä 0,89 mm.

b) Kello on lyönyt 650 mm:n laskeutumisen aikana

$$\frac{650\,\text{mm}}{0{,}88\ldots\ \text{mm/kertaa}} = 731{,}25\,\text{kertaa} \approx 731\,\text{kertaa.}$$

Lasketaan, kuinka monta täyttä vuorokautta tämä vastaa

$$\frac{731}{180\,1/\text{vrk}} = 4{,}0625\,\text{vrk}.$$

Aikaa on kulunut 4 vrk ja lisäksi kello on lyönyt

$$0{,}0625 \cdot 180 = 11{,}25\,\text{kertaa} \approx 11\,\text{kertaa}.$$

Klo 12.05:n jälkeen tulee seuraavat lyönnit:

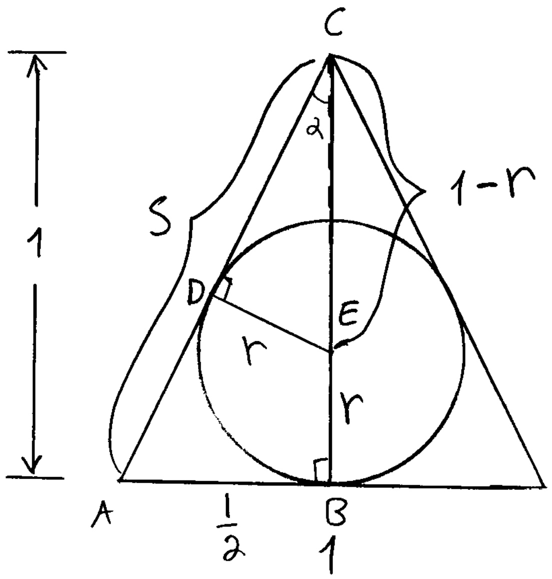
12.30	1 kerta, yhteensä 1 lyöntiä
13.00	1 kerta, yhteensä 2 lyöntiä
13.30	1 kerta, yhteensä 3 lyöntiä
14.00	2 kertaa, yhteensä 5 lyöntiä
14.30	1 kerta, yhteensä 6 lyöntiä
15.00	3 kerta, yhteensä 9 lyöntiä
15.30	1 kerta, yhteensä 10 lyöntiä
16.00	4 kerta, yhteensä 14 lyöntiä

Kello lyö 11. kerran klo 16.00.

Vastaus: Perjantai klo 16.00.

10. Suoran ympyräkartion korkeus on sama kuin sen pohjan halkaisija, kumpikin suuruudeltaan = 1. Kartion sisään asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa ja pohjaa. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on ympyräkartion tilavuudesta? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.

Ratkaisu.



Lasketaan sivun s pituus Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} s^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ s^2 &= \frac{5}{4} \\ s &= \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{5}{4}} \\ s &= \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Huomataan, että kolmiot ABC ja EDC ovat yhdenmuotoisia, koska niissä on yhteinen kärkikulma α sekä suora kulma (kk). Vastinsivut ovat kartion säde $r_k = \frac{1}{2}$ ja pallon säde r sekä s ja $1 - r$.

Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen suhde on vakio

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\frac{1}{2}} &= \frac{1-r}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \\
2r &= \frac{2(1-r)}{\sqrt{5}} \quad \| \cdot \tfrac{\sqrt{5}}{2} \\
\sqrt{5}r &= 1-r \\
r+\sqrt{5}r &= 1 \\
(1+\sqrt{5})r &= 1 \quad \| : (1+\sqrt{5}) \\
r &= \frac{1}{1+\sqrt{5}} \\
r &= 0{,}309\ldots
\end{aligned}$$

Lasketaan pallon tilavuus

$$\begin{aligned}
V_p &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}309\ldots^3 \\
&= 0{,}1236\ldots
\end{aligned}$$

Lasketaan kartion tilavuus

$$\begin{aligned}
V_k &= \frac{1}{3}\pi r_k^2 h \\
&= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \\
&= 0{,}2617\ldots
\end{aligned}$$

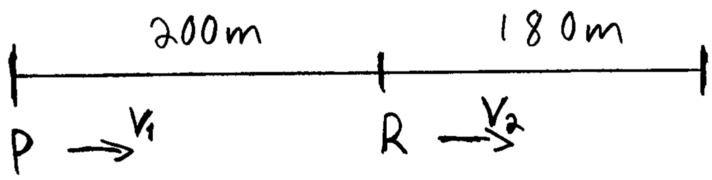
Lasketaan kuinka monta prosenttia V_p on V_k:sta

$$\begin{aligned}
\frac{V_p}{V_k} &= \frac{0{,}1236\ldots}{0{,}2617\ldots} \\
&= 0{,}4721\ldots \\
&\approx 47\,\%
\end{aligned}$$

Vastaus: Pallon tilavuus on 47 % kartion tilavuudesta.

11. Ryöstöyrityksen keskeydyttyä Arska pinkaisi poliisia pakoon ja sai 200 metrin etumatkan. Kun poliisi oli juossut tämän 200 metriä, Arskalla oli vielä etumatkaa 180 metriä. Kun poliisi oli juossut tämän, Arskan etumatka oli jälleen kutistunut kymmenesosalla. Takaa-ajo jatkui samalla tavoin. Saiko poliisi Arskan kiinni? Jos sai, niin kuinka pitkän matkan juostuaan poliisi ulottui tarttumaan Arskaan? Poliisin käden pituudeksi oletetaan puoli metriä.

Ratkaisu. Poliisi juoksee alussa ajan t_1 ja saavuttaa rosvoa 20 m.



Yleisesti nopeus on

$$v = \frac{s}{t}.$$

Poliisin nopeus

$$v_1 = \frac{200}{t_1}.$$

Rosvon nopeus

$$v_2 = \frac{180}{t_1}.$$

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{200/t_1}{180/t_1} = \frac{200}{180} = \frac{10}{9} \\ v_2 &= 0{,}9 v_1 \end{aligned}$$

Poliisi juoksee matkan x ennen kuin saa rosvon kiinni. Samalla rosvo juoksee matkan $x - 199{,}5$ m.
Yleisesti kuljettu matka on

$$\begin{aligned} s &= vt \quad \| : v \\ t &= \frac{s}{v}. \end{aligned}$$

Molemmilla kuluu sama aika siitä, kun poliisi lähtee rosvon perään. Rosvolle

$$\begin{aligned} t &= \frac{x - 199{,}5}{v_2} \\ &= \frac{x - 199{,}5}{0{,}9 v_1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Poliisille

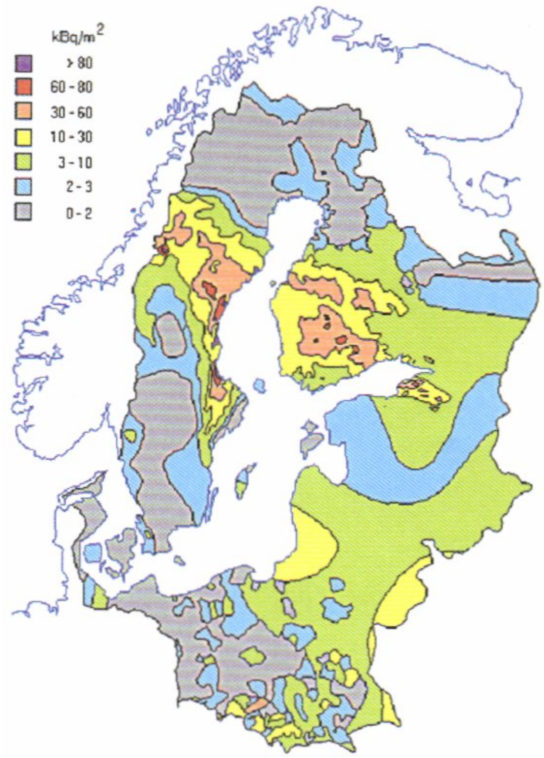
$$t = \frac{x - 199{,}5}{v_1}. \tag{2}$$

Yhdistetään yhtälöt (1) ja (2), saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{x}{v_1} &= \frac{x - 199{,}5}{0{,}9v_1} \quad \| \cdot 0{,}9v_1 \\
0{,}9x &= x - 199{,}5 \\
0{,}1x &= 199{,}5 \quad \| : 0{,}1 \\
x &= 1\,995 \\
x &\approx 2\,000\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Vastaus: Poliisi sai Arskan kiinni juostuaan 2 000 m.

12. Tšernobylin ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen vuonna 1987 cesium-137-laskeuman radioaktiivisuus eräillä alueilla Hämeessä ja Keski-Suomessa oli 78 kBq/m^2. Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m^2. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti. Minä vuonna alkuperäinen aktiivisuus on vähentynyt puoleen? Entä neljännekseen? Minä vuonna Vaasan seudun pienempi aktiivisuus on vähentynyt puoleen?



Tšernobylin onnettomuuden cesium-137-laskeuma kesällä 1987 Itämeren ympäristössä

Lähde: www.stuk.fi
(26.4.2009)

Ratkaisu. Eksponentiaalisen vähenemisen kaava

$$A_n = A_0 q^n, \tag{1}$$

jossa

A_0 on aktiivisuus alussa ja
A_n on aktiivisuus n vuoden kuluttua.

Vuosien 1987 ja 2006 välillä

$$\begin{aligned} A_0 &= 78, \\ n &= 2006 - 1987 = 19 \quad \text{ja} \\ A_{19} &= 50. \end{aligned}$$

Sijoitetaan edelliset kaavaan (1), saadaan

$$\begin{aligned} 50 &= 78q^{19} \quad \| : 78 \\ q^{19} &= \frac{50}{78} \\ q &= \sqrt[19]{\frac{50}{78}} \\ q &= 0{,}97686\ldots. \end{aligned}$$

Lasketaan minä vuonna aktiivisuus on laskenut puoleen.

$$\begin{aligned} A_0 q^x &= 0{,}5 A_0 \quad \| : A_0 \\ q^x &= 0{,}5 \quad \| \lg() \\ x \lg q &= \lg 0{,}5 \quad \| : \lg q \\ x &= \frac{\lg 0{,}5}{\lg q} \\ x &= \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}97686\ldots} \\ x &= 29{,}615\ldots \end{aligned}$$

Aktiivisuus on vähentynyt puoleen 30 vuoden kuluttua, eli vuonna $1987 + 30 = 2017$. Aktiivisuus on vähentynyt neljännekseen, kun

$$\begin{aligned} A_0 q^x &= 0{,}25 A_0 \quad \| : A_0 \\ q^x &= 0{,}25 \quad \| \lg() \\ x \lg q &= \lg 0{,}25 \quad \| : \lg q \\ x &= \frac{\lg 0{,}25}{\lg q} \\ x &= \frac{\lg 0{,}25}{\lg 0{,}97686\ldots} \\ x &= 59{,}2319\ldots \end{aligned}$$

Aktiivisuus on vähentynyt puoleen 60 vuoden kuluttua, eli vuonna $1987 + 60 = 2047$.
Koska laskeuman radioaktiiviset aineet ovat likimain samoja kaikkialla Suomessa, niin myös aktiivisuuden suhteellinen väheneminen on kaikkialla yhtä nopeaa. Siten myös vaasan seudulla aktiivisuus vähenee puoleen vuoteen 2017 mennessä.

Vastaus: Radioaktiivisuus on vähentynyt puoleen vuonna 2017 kaikilla paikkakunnilla, eli myös Vaasan seudulla ja neljännekseen vuonna 2047.

13. Millä vakion a arvolla yhtälöparilla

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y = 5, \\ 3x + (a-2)y = a \end{cases}$$

ei ole ratkaisua?

Ratkaisu.

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y = 5 & \| \cdot (-3) \\ 3x + (a-2)y = a & \| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{-6x} + (-3a-3)y = -15 \\ \cancel{6x} + (2a-4)y = 2a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (-3a - 3 + 2a - 4)y &= 2a - 15 \\ (-a-7)y &= 2a - 15 \quad \| \cdot (-1) \\ (a+7)y &= 15 - 2a \end{aligned}$$

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, kun yhtälöstä tulee epätosi. Kun sijoitetaan yhtälöön $a = -7$, saadaan

$$\begin{aligned} (-7+7)y &= 15 - 2 \cdot (-7) \\ 0 &= 29, \end{aligned}$$

joka on epätosi.
Tutkitaan, mitä tapahtuu, jos $a \neq -7$.

$$\begin{aligned} (a+7)y &= 15 - 2a \quad \| : (a+7) \\ y &= \frac{15-2a}{a+7} \end{aligned}$$

x saadaan ratkaistua sijoittamalla $y = \frac{15-2a}{a+7}$ jompaan kumpaan alkuperäisistä yhtälöistä. Yhtälöparilla on siis ratkaisu aina, kun $a \neq -7$.

Vastaus: Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, kun $a = -7$.

14. Yrittäjälle myönnetään lupa kalanviljelylaitoksen perustamiseen edellyttäen, että laitoksen toiminnasta koituva haitta korvataan rajanaapureille. Haitan vuotuiseksi arvoksi arvioidaan 7 000 euroa, ja ennen laitoksen käynnistämistä on maksettava tämän nykyarvo kymmenen vuoden ajalta. Paljonko yrittäjän on maksettava haittakorvausta, kun laskennassa käytetään 3,75 prosentin vuotuista korkoa?

Ratkaisu. Oletetaan nykyarvoa laskettaessa, että haitan vuotoinen arvo katsotaan maksettavaksi kunkin vuoden alussa. Yksittäisen vuoden maksun nykyarvo on $V_i = \frac{K_i}{p^i}$, jossa K_n on vuoden n maksuerä, V on maksuerän nykyarvo ja p on korkotekijä. Tässä tapauksessa $K_i = 7\,000$, $p = 1{,}0375$ ja i saa arvot 1, 2, 3, …, 9. Nykyarvo on

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots + V_9 \\ &= \frac{7\,000}{p^0} + \frac{7\,000}{p^1} + \frac{7\,000}{p^2} + \cdots + \frac{7\,000}{p^9} \\ &= 7\,000 + 7\,000 \cdot \left(\tfrac{1}{p}\right)^1 + 7\,000 \cdot \left(\tfrac{1}{p}\right)^2 + \cdots + 7\,000 \cdot \left(\tfrac{1}{p}\right)^9 \end{aligned}$$

Kyseessä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen jäsen, peräkkäisten jäsenten suhde ja jäsenten määrä ovat

$$a_1 = 7\,000, \quad q = \frac{1}{p} = \frac{1}{1{,}0375} \quad \text{ja} \quad n = 10,$$

joten geometrisen summan kaavalla saadaan

$$\begin{aligned} V &= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ &= 7\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}0375}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{1{,}0375}} \\ &\approx 59\,645{,}37\ (€) \end{aligned}$$

Vastaus: Yrittäjän on maksettava haittakorvausta 59 645,37 €.

(Huom! Jos korvaus lasketaan maksettavaksi kunkin vuoden lopussa, niin nykyarvoksi saadaan 57 489,51 €. Luultavasti myös tällä vastauksella voi saada täydet pisteet, koska mikään tehtävänannon tieto ei estä tekemästä tällaista olettamusta.)

15. Jos pistettä (x, y) kierretään origon ympäri kulman α verran, saadaan kierretyn pisteen (x', y') koordinaatit lausekkeista

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Laske sen pisteen koordinaatit, joka saadaan pisteestä $(2, 1)$ kiertämällä $100°$ myötäpäivään. Laske myös sen pisteen koordinaatit, joka saadaan kiertämällä samaa pistettä $100°$ vastapäivään. Ilmoita koordinaatit kahden desimaalin tarkkuudella. Piirrä kuvio, jossa alkuperäinen piste ja kierretyt pisteet ovat näkyvissä.

Ratkaisu. Piste $(2, 1)$, $x = 2$, $y = 1$

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Kierretään $100°$ vastapäivään, $\alpha = 100°$

$$\begin{cases} x' = 2\cdot\cos 100° - 1\cdot\sin 100° \\ y' = 2\cdot\sin 100° + 1\cdot\cos 100° \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -1{,}332\ldots \\ y' = 1{,}795\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' \approx -1{,}33 \\ y' \approx 1{,}80 \end{cases}$$

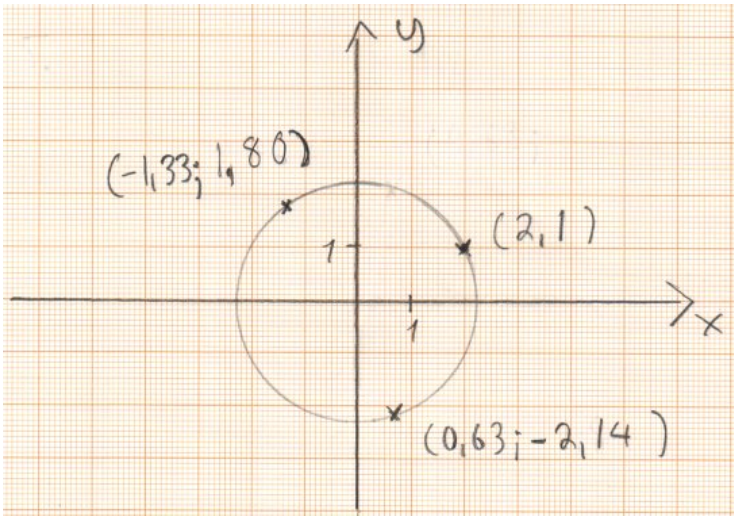
Saadaan piste $(-1{,}33; 1{,}80)$. Kierretään $100°$ myötäpäivään, $\alpha = -100°$

$$\begin{cases} x' = 2\cdot\cos(-100°) - 1\cdot\sin(-100°) \\ y' = 2\cdot\sin(-100°) + 1\cdot\cos(-100°) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 0{,}637\ldots \\ y' = -2{,}143\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' \approx 0{,}64 \\ y' \approx -2{,}14 \end{cases}$$

Saadaan piste $(0{,}64; -2{,}14)$.



Vastaus: Pisteet $(-1{,}33; 1{,}80)$ ja $(0{,}64; -2{,}14)$.