Lyhyt matematiikka, kevät 2010

Mallivastaukset

Mallivastausten laatimisesta ovat vastanneet filosofian maisteri Teemu Kekkonen ja diplomi-insinööri Antti Suominen. Teemu Kekkonen opettaa lukiossa pitkää ja lyhyttä matematiikkaa sekä fysiikkaa. Hän on tarkastanut matematiikan ja fysiikan yo-kokeita neljän vuoden ajan. Teemu Kekkonen ja Antti Suominen toimivat opettajina MA-FY Valmennus Oy:ssä. Nämä mallivastaukset ovat MA-FY Valmennus Oy:n omaisuutta.

MA-FY Valmennus Oy on Helsingissä toimiva, matematiikan ja fysiikan valmennuskursseihin erikoistunut yritys. Palveluitamme ovat

- TKK-pääsykoekurssit
- abikurssit
- yksityisopetus

Tästä keväästä alkaen olemme julkaisseet internet-sivuillamme kaiken palautteen, jonka asiakkaat antavat kursseistamme. Näin varmistamme, että palveluistamme kiinnostuneilla ihmisillä on mahdollisuus saada tarkka ja rehellinen kuva siitä, mitä meiltä voi odottaa.

MA-FY Valmennus Oy:n yhteystiedot:

internet:	www.mafyvalmennus.fi
s-posti:	info@mafyvalmennus.fi
puhelin:	050 338 7098

1. a) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}(3x-2)=\frac{1}{3}(2x+3)$.

b) Ratkaise yhtälö $(x+2)(x-2)=5$.

c) Määritä suorien $x+y=2$ ja $2x-y=5$ leikkauspiste.

Ratkaisu. a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(3x-2) &= \frac{1}{3}(2x+3) \quad \| \cdot 6\\
\frac{6}{2}(3x-2) &= \frac{6}{3}(2x+3)\\
3(3x-2) &= 2(2x+3)\\
9x-6 &= 4x+6\\
5x &= 12 \quad \| : 5\\
x &= \frac{12}{5}\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 2\frac{2}{5}}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(x+2)(x-2) &= 5\\
x^2-4 &= 5\\
x^2 &= 9 \quad \| \sqrt{()}\\
x &= \pm\sqrt{9}\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= \pm 3}}
\end{aligned}$$

c) Leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} x+y=2\\ 2x-y=5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
3x &= 7 \quad \| : 3\\
x &= \frac{7}{3}\\
\xRightarrow{\text{Sij.}} \quad \frac{7}{3}+y &= 2\\
y &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

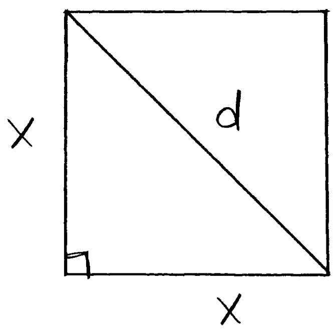
V: Leikkauspiste $\left(2\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2. a) Neliön pinta-ala on $1{,}20\,\mathrm{m}^2$. Laske neliön lävistäjän pituus senttimetrin tarkkuudella.

b) Mille positiiviselle luvulle x pätee $x^4 = 17$? Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

c) Sievennä $4^0 - 3^{-1} + 2^{-2} - 1^{-3}$. Anna vastaus murtolukuna.

Ratkaisu. a)



Pinta-ala:

$$\begin{aligned} A &= 1{,}20\,\mathrm{m}^2 \\ A &= x^2 \\ x^2 &= 1{,}20 \end{aligned}$$

Lävistäjä:

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + x^2 \\ d^2 &= 2 \cdot x^2 \\ d^2 &= 2 \cdot 1{,}2 \\ d^2 &= 2{,}4 \quad \| \sqrt{()} \\ d &= \underset{(-)}{+}\sqrt{2{,}4} \\ d &= 1{,}5491\ldots \\ d &\approx 1{,}55\,(\mathrm{m}) \end{aligned}$$

V: Lävistäjän pituus on 155 cm.

b)

$$\begin{aligned} x^4 &= 17 \quad \| \sqrt[4]{()},\ x > 0 \\ x &= \underset{(-)}{+}\sqrt[4]{17} \\ x &= 2{,}0305\ldots \\ x &\approx 2{,}031 \end{aligned}$$

V: Luku on 2,031

c)

$$\begin{aligned}
4^0 - 3^{-1} + 2^{-2} - 1^{-3} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - 1 \\
&= -{}^{4)}\frac{1}{3} + {}^{3)}\frac{1}{4} \\
&= -\frac{4}{12} + \frac{3}{12} \\
&= \underline{\underline{-\frac{1}{12}}}
\end{aligned}$$

3. Oheisessa kuviossa on erään funktion kuvaaja. Määritä kuvion perusteella

a) funktion nollakohdat,

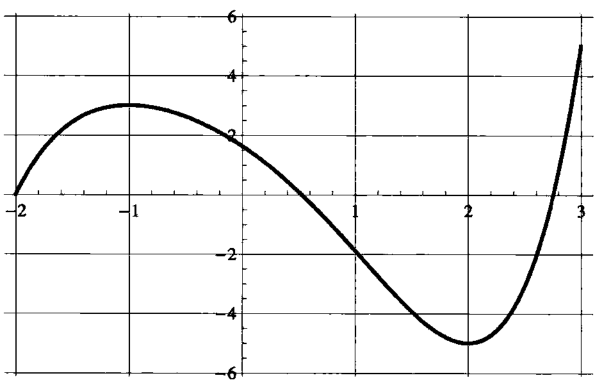
b) funktion derivaatan nollakohdat,

c) funktion suurin arvo välillä $[-2, 3]$,

d) funktion pienin arvo välillä $[-2, 3]$,

e) välit, joilla funktio on kasvava, ja

f) väli, jolla funktio on vähenevä.



Ratkaisu. a) Käyrä leikkaa x-akselin, kun $f(x) = 0$.
Nollakohdat: $\underline{\underline{x = -2 \text{ tai } x = 0{,}5 \text{ tai } x = 2{,}8.}}$

b) $f'(x) = 0$ kohdissa, joissa käyrän tangentti on vaakasuora.
Derivaatan nollakohdat: $\underline{\underline{x = -1 \text{ tai } x = 2.}}$

c) Suurin arvo: $\underline{\underline{5}}$

d) Pienin arvo: $\underline{\underline{-5}}$

e) $f(x)$ kasvaa, $\underline{\underline{\text{kun } -2 \le x \le -1 \text{ tai } 2 \le x \le 3.}}$

f) $f(x)$ vähenee, $\underline{\underline{\text{kun } -1 \le x \le 2}}$

4. Kuinka monta litraa 12-prosenttista suolaliuosta on lisättävä kolmeen litraan 5-prosenttista suolaliuosta, jotta saadaan 8-prosenttinen suolaliuos?

Ratkaisu. Olkoon 12-prosenttisen liuoksen määrä a. Suolan määrä liuoksessa on $0{,}12a$.
5-prosenttista suolaliuosta on $3\,\mathrm{l}$. Suolan määrä liuoksessa on $0{,}05 \cdot 3\,\mathrm{l} = 0{,}15\,\mathrm{l}$.
Haluttu liuos 8-prosenttista:

$$
\begin{aligned}
\frac{0{,}12a + 0{,}15}{a+3} &= 0{,}08 \quad \| \cdot (a+3),\; a \neq -3 \\
0{,}12a + 0{,}15 &= 0{,}08(a+3) \\
0{,}12a + 0{,}15 &= 0{,}08a + 0{,}24 \\
0{,}04a &= 0{,}09 \quad \| : 0{,}04 \\
a &= \frac{0{,}09}{0{,}04} \\
a &= 2{,}25
\end{aligned}
$$

V: 12-prosenttista liuosta on lisättävä 2,25 l.

Vastauksen voi ilmoittaa myös kahden merkitsevän numeron tarkkuudella eli 2,3 l.

5. Tuhat euroa talletetaan viiden prosentin korolla 50 vuodeksi. Korko liitetään pääomaan vuosittain. Laadi pylväsdiagrammi, joka kuvaa talletuksen arvoa viiden vuoden välein. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

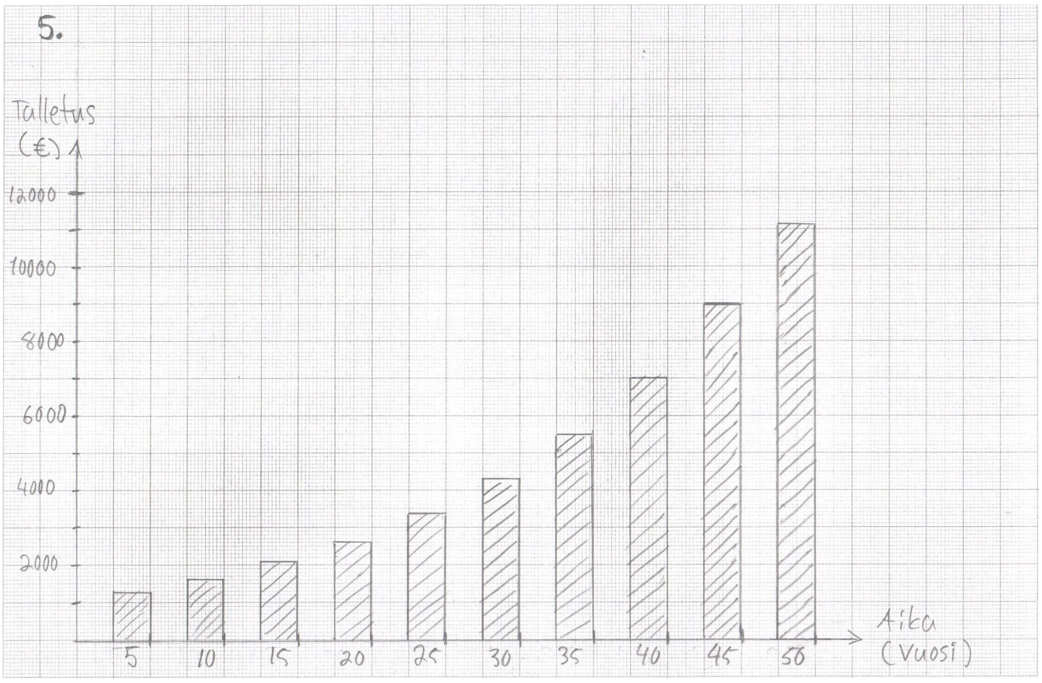
Ratkaisu. $k = 1000\,€$

$q = 1{,}05, \quad (\text{korko } 5\,\%)$

Talletus n-vuoden jälkeen:

$$
\begin{aligned}
k_n &= q^n k \\
k_n &= 1{,}05^n \cdot 1000 \\
k_5 &= 1276{,}281\ldots \\
&\approx 1276{,}28\,(€) \\
k_{10} &= 1628{,}894\ldots \\
&\approx 1628{,}89\,(€) \\
k_{15} &= 2078{,}928\ldots \\
&\approx 2078{,}93\,(€) \\
k_{20} &= 2653{,}297\ldots \\
&\approx 2653{,}30\,(€) \\
k_{25} &= 3386{,}354\ldots \\
&\approx 3386{,}35\,(€) \\
k_{30} &= 4321{,}942\ldots \\
&\approx 4321{,}94\,(€) \\
k_{35} &= 5516{,}015\ldots \\
&\approx 5516{,}02\,(€) \\
k_{40} &= 7039{,}988\ldots \\
&\approx 7039{,}99\,(€) \\
k_{45} &= 8985{,}007\ldots \\
&\approx 8985{,}01\,(€) \\
k_{50} &= 11467{,}399\ldots \\
&\approx 11467{,}40\,(€)
\end{aligned}
$$

Pylväsdiagrammi seuraavalla sivulla


5.
Talletus
(€)
12000
10000
8000
6000
4000
2000
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
Aika
(vuosi)

6. Määritä funktion $f(x) = (x-2)(3-x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 3]$.

Ratkaisu. $f(x) = (x-2)(3-x)$
$f(x) = 3x - x^2 - 6 + 2x$
$f(x) = -x^2 + 5x - 6$
Funktio on jatkuva ja derivoituva. Funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-3, 3]$ löytyvät välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + 5 \\ f'(x) &= 0 \\ -2x + 5 &= 0 \\ 2x &= 5 \quad \| : 2 \\ x &= \frac{5}{2} \\ x &= 2{,}5 \end{aligned}$$

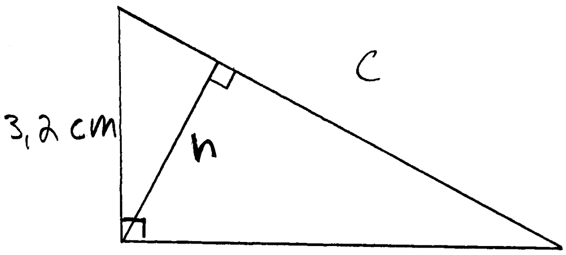
Lasketaan em. arvot:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3-2) \cdot \big(3 - (-3)\big) = -30 \quad \leftarrow \quad \text{pienin} \\ f(2{,}5) &= (2{,}5 - 2) \cdot (3 - 2{,}5) = 0{,}25 = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \quad \text{suurin} \\ f(3) &= (3-2) \cdot (3-3) = 0 \end{aligned}$$

V: Suurin arvo $f(2{,}5) = \frac{1}{4}$,
pienin arvo $f(-3) = -30$.

7. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,2 cm ja 5,7 cm. Laske hypotenuusan pituus ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta.

Ratkaisu.



$$
\begin{aligned}
c^2 &= 3{,}2^2 + 5{,}7^2 \\
c^2 &= 42{,}73 \quad \| \sqrt{()} \\
c &= \underset{(-)}{+}\sqrt{42{,}73} \\
c &= 6{,}53\ldots \\
c &\approx 6{,}5\,(\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

Kolmion pinta-ala:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}ch, \quad \text{toisaalta} \\
A &= \frac{1}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 5{,}7 \\
\frac{1}{2}ch &= \frac{1}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 5{,}7 \quad \| \cdot 2 \\
ch &= 3{,}2 \cdot 5{,}7 \quad \| : c \\
h &= \frac{3{,}2 \cdot 5{,}7}{c} \\
h &= \frac{3{,}2 \cdot 5{,}7}{6{,}53\ldots} \\
h &= 2{,}79\ldots \\
h &\approx 2{,}8\,(\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

V: Hypotenuusa: 6,5 cm.
Suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta: 2,8 cm.

8. Tiedonsiirtojärjestelmässä havaittiin yksittäisen bitin saapuvan virheellisenä vastaanottajalle todennäköisyydellä 0,00015. Yksittäisten bittien siirtojen oletetaan olevan toisistaan riippumattomia.

a) Millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuvassa 16 bitin jonossa on ainakin yksi virheellinen bitti?

b) Jos lähetetään 32 kappaletta 16 bitin jonoja, niin millä tödennäköisyydellä vastaanottajalle saapuu ainakin yksi virheellinen jono?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{Virhe}) &= \mathrm{P}(V) = 0{,}00015 \\ \mathrm{P}(\text{Ei virhettä}) &= \mathrm{P}(\overline{V}) = 1 - \mathrm{P}(V) = 0{,}99985 \end{aligned}$$

a) A: ”ainakin yksi virhe”

$\overline{A}$: ”ei yhtään virhettä”

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\underbrace{\overline{V} \text{ ja } \overline{V} \text{ ja } \ldots \text{ ja } \overline{V}}_{16 \text{ kpl}}) = \mathrm{P}(\overline{V})^{16}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \mathrm{P}(\overline{V})^{16} \\ &= 1 - 0{,}99985^{16} \\ &= 0{,}00239\ldots \\ &\approx 0{,}24\,\% \end{aligned}$$

V: Todennäköisyys on 0,24 %.

b) B: ”on ainakin yksi virheellinen jono”

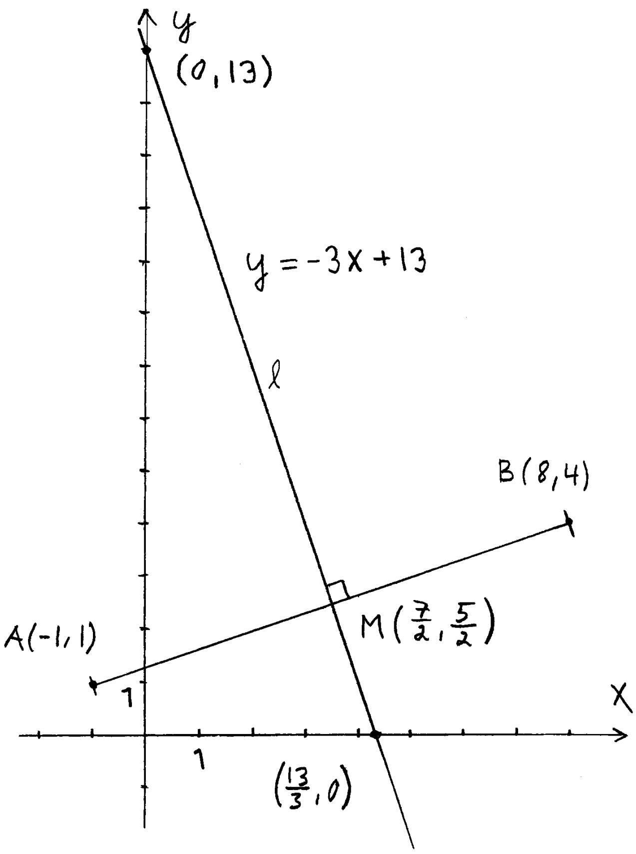
$\overline{B}$: ”ei yhtään virheellistä jonoa”

$$\mathrm{P}(\overline{B}) = \mathrm{P}(\underbrace{\overline{A} \text{ ja } \overline{A} \text{ ja } \ldots \text{ ja } \overline{A}}_{32 \text{ kpl}}) = \mathrm{P}(\overline{A})^{32}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= 1 - \mathrm{P}(\overline{B}) \\ \mathrm{P}(B) &= 1 - \mathrm{P}(\overline{A})^{32} \\ \mathrm{P}(B) &= 1 - (\mathrm{P}(\overline{V})^{16})^{32} \\ \mathrm{P}(B) &= 1 - (0{,}99985^{16})^{32} \\ \mathrm{P}(B) &= 0{,}0739\ldots \\ \mathrm{P}(B) &\approx 7{,}4\,\% \end{aligned}$$

9. Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $A = (-1, 1)$ ja $B = (8, 4)$ yhdysjanan keskipisteen kautta kautta ja on kohtisuorassa tätä janaa vastaan. Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit? Piirrä kuvio.

Ratkaisu.



Janan AB keskipiste:

$$M = \left(\frac{-1+8}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Janan AB kulmakerroin:

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$
$$k_1 = \frac{4-1}{8-(-1)}$$
$$k_1 = \frac{1}{3}$$

Suoran l kulmakerroin k_2:

$$\begin{aligned}
k_1 \cdot k_2 &= -1 \qquad \text{(kohtisuoruus)}\\
k_2 &= -\frac{1}{k_1}\\
k_2 &= -\frac{1}{\frac{1}{3}}\\
k_2 &= -3
\end{aligned}$$

Suoran yhtälö: $y_0 = \frac{5}{2}$, $x_0 = \frac{7}{2}$

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= k(x - x_0)\\
y - \frac{5}{2} &= -3\left(x - \frac{7}{2}\right)\\
y &= -3x + \frac{21}{2} + \frac{5}{2}\\
y &= -3x + 13
\end{aligned}$$

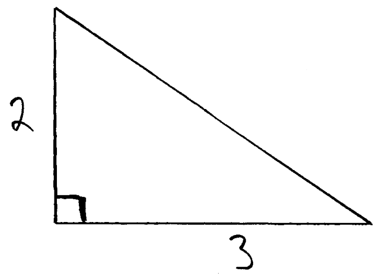
y-akselin leikkauspiste voidaan lukea suoran yhtälön vakiotermistä ja leikkauspiste on $(0, 13)$.
Tutkitaan, missä kohdassa suora leikkaa x-akselin:

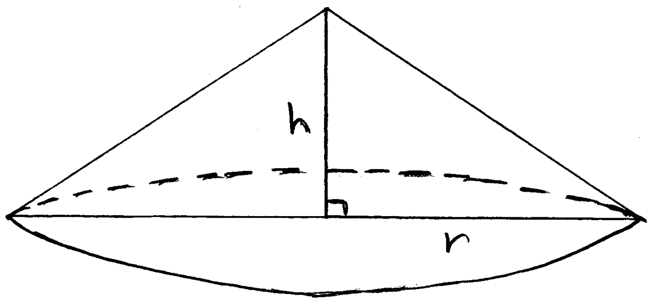
$$\begin{aligned}
-3x + 13 &= 0\\
-3x &= -13 \qquad \| : (-3)\\
x &= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = -3x + 13$.
x-akselin leikkauspiste on $\left(\frac{13}{3}, 0\right)$ ja y-akselin leikkauspiste $(0, 13)$.

10. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Kolmio pyörähtää täyden kierroksen lyhyemmän kateettinsa ympäri, jolloin syntyy avaruuskappale. Piirrä kappaleen kuva ja laske sen tilavuus.

Ratkaisu.





$h = 2$, $r = 3$, suora ympyräkartio
Tilavuus:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V = \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\pi \cdot 3^{\overset{1}{\cancel{2}}} \cdot 2$$
$$V = 6\pi$$

V: Kappaleen tilavuus on 6π.

11. Lukujonon seuraava termi a_{n+1} lasketaan edellisen termin a_n avulla kaavan

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

mukaisesti. Laske desimaalilukuina riittävällä tarkkuudella lukujonon termit a_1, a_2, a_3 ja a_4, kun

a) $a_0 = 3$ ja b) $a_0 = 8$.

Laske molemmissa tapauksissa, kuinka monta prosenttia termi a_4 poikkeaa luvusta $\sqrt{2}$.

Ratkaisu. $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$

a)

$$\begin{aligned}
a_0 &= 3\\
a_1 &= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{2}{3}\right)\\
a_1 &= \frac{11}{6} = 1{,}833333333\ldots \approx 1{,}8333333\\
a_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{6} + \frac{2}{\frac{11}{6}}\right)\\
a_2 &= \frac{193}{132} = 1{,}462121212\ldots \approx 1{,}46212121\\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{193}{132} + \frac{2}{\frac{193}{132}}\right)\\
a_3 &= 1{,}41499843\ldots \approx 1{,}4149984\\
a_4 &= \frac{1}{2}\left(1{,}41499843\ldots + \frac{2}{1{,}41499843\ldots}\right)\\
a_4 &= 1{,}41421378\ldots \approx 1{,}4142138
\end{aligned}$$

Prosentuaalinen poikkeama luvusta $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1{,}4142\ldots - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} &= 1{,}5388\ldots \cdot 10^{-7}\\
&= 0{,}000015388\ldots\,\%\\
&\approx 0{,}000015\,\%
\end{aligned}$$

V: $a_1 = 1{,}8333333$, $a_2 = 1{,}46212121$, $a_3 = 1{,}4149984$, $a_4 = 1{,}4142138$
Poikkeama luvusta $\sqrt{2}$ on $0{,}000015\,\%$

b)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 8\\
a_1 &= \frac{1}{2}\left(8+\frac{2}{8}\right)\\
a_1 &= 4{,}125\\
a_2 &= \frac{1}{2}\left(4{,}125+\frac{2}{4{,}125}\right)\\
a_2 &= 2{,}304924242\ldots \approx 2{,}3049242\\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(2{,}304924242\ldots+\frac{2}{2{,}304924242\ldots}\right)\\
a_3 &= 1{,}58631586\ldots \approx 1{,}5863159\\
a_4 &= \frac{1}{2}\left(1{,}58631586\ldots+\frac{2}{1{,}58631586\ldots}\right)\\
a_4 &= 1{,}423549408\ldots \approx 1{,}4235494
\end{aligned}
$$

Prosentuaalinen poikkeama luvusta $\sqrt{2}$:

$$\frac{1{,}4235\ldots-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0{,}0066014\ldots \approx 0{,}66\,\%$$

V: $a_1 = 4{,}125$, $a_2 = 2{,}3049242$, $a_3 = 1{,}5863159$, $a_4 = 1{,}4235494$
Poikkeama luvusta $\sqrt{2}$ on $0{,}66\,\%$

12. Määritä sellaiset luvut a, h ja k, että paraabelin $y = 2x^2 - 4x - 1$ yhtälö saa muodon $y - k = a(x - h)^2$. Mitkä ovat paraabelin huipun koordinaatit? Piirrä kuvio.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x - 1 \\ y + 1 &= 2x^2 - 4x \\ y + 1 &= 2(x^2 - 2x) \quad \| + 2, \text{ muistikaava: } (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ y + 3 &= 2(x^2 - 2x) + 2 \\ y + 3 &= 2(x^2 - 2x + 1) \\ y + 3 &= 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) \\ y - (-3) &= 2(x - 1)^2 \end{aligned}$$

$a = 2$, $n = 1$ ja $k = -3$
Paraabelin huippu on derivaatan nollakohdassa:

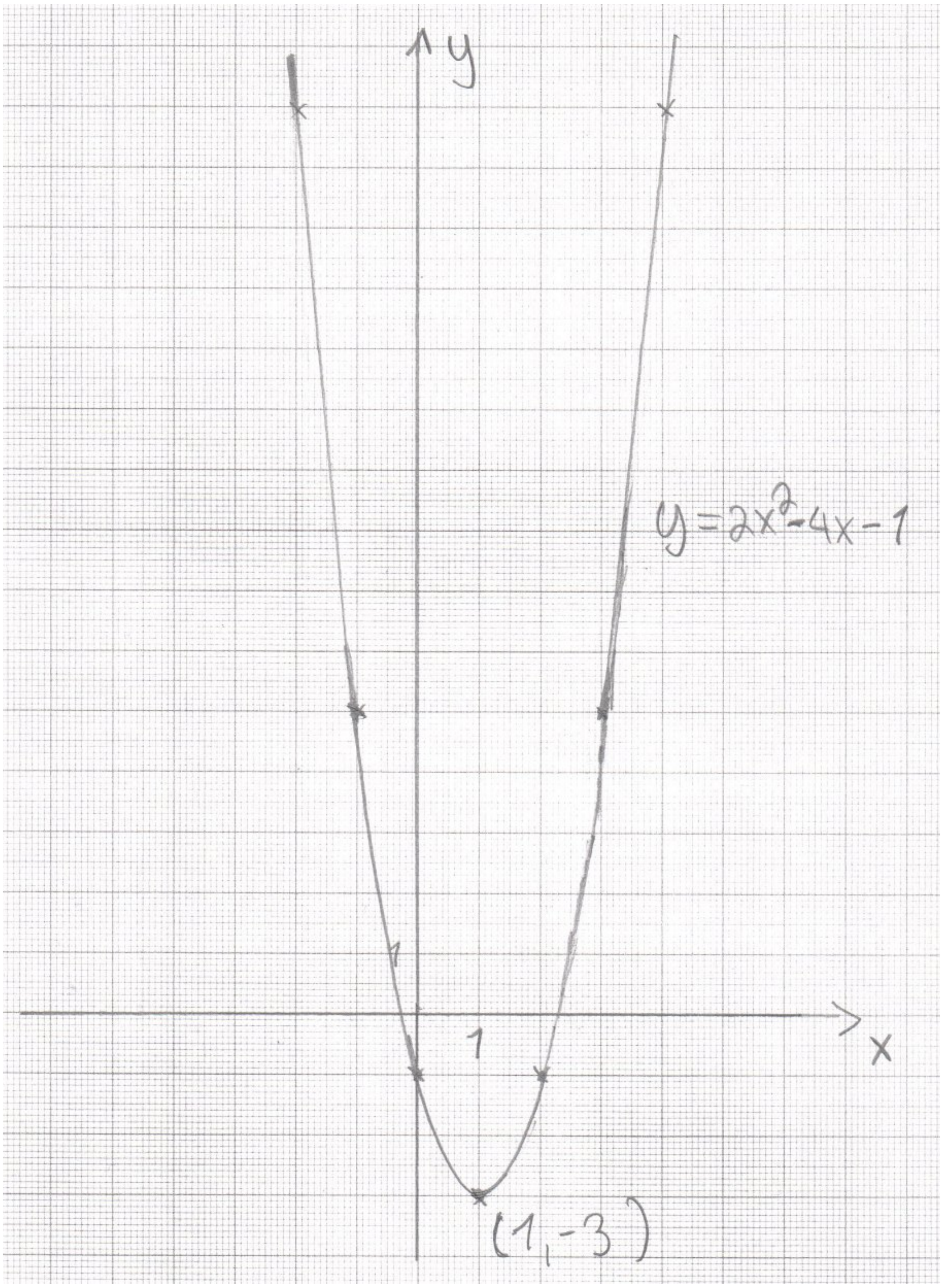
$$\begin{aligned} y'(x) &= 4x - 4 \\ y'(x) &= 0 \\ 4x - 4 &= 0 \\ x &= 1 \\ y(1) &= 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Huippu $(1, -3)$

x	y
-2	$2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 1 = 15$
-1	5
0	-1
1	-3
2	-1
3	5
4	15

Kuva seuraavalla sivulla

V: $a = 2$, $n = 1$ ja $k = -3$
Huippu $(1, -3)$


y
x
1
1
$y=2x^2-4x-1$
(1,-3)

13. Lahjavero määräytyy ensimmäisessä veroluokassa seuraavasti:

Verotettavan osuuden arvo, euroa	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla, euroa	Veroprosentti ylimenevästä osasta
4 000–17 000	100	7
17 000–50 000	1 010	10
50 000–	4 310	13

Lähde: www.vero.fi
(26.5.2009)

a) Kuinka paljon veroa menee 30 000 euron lahjoituksesta?

b) Piirrä sen funktion kuvaaja, joka esittää lahjaveron riippuvuutta lahjan arvosta (so. verotettavan osuuden arvosta).

Ratkaisu. a) 30000 € on välissä 17000–50000.
Vakioerä: $r_1 = 1010$ €
Ylimenevästä osasta 10 %: $r_2 = (30000\,€ - 17000\,€) \cdot 0{,}1 = 1300\,€$
Yhteensä $r = r_1 + r_2 = 1010\,€ + 1300\,€ = 2310\,€$.

V: Veroa menee 2310 €.

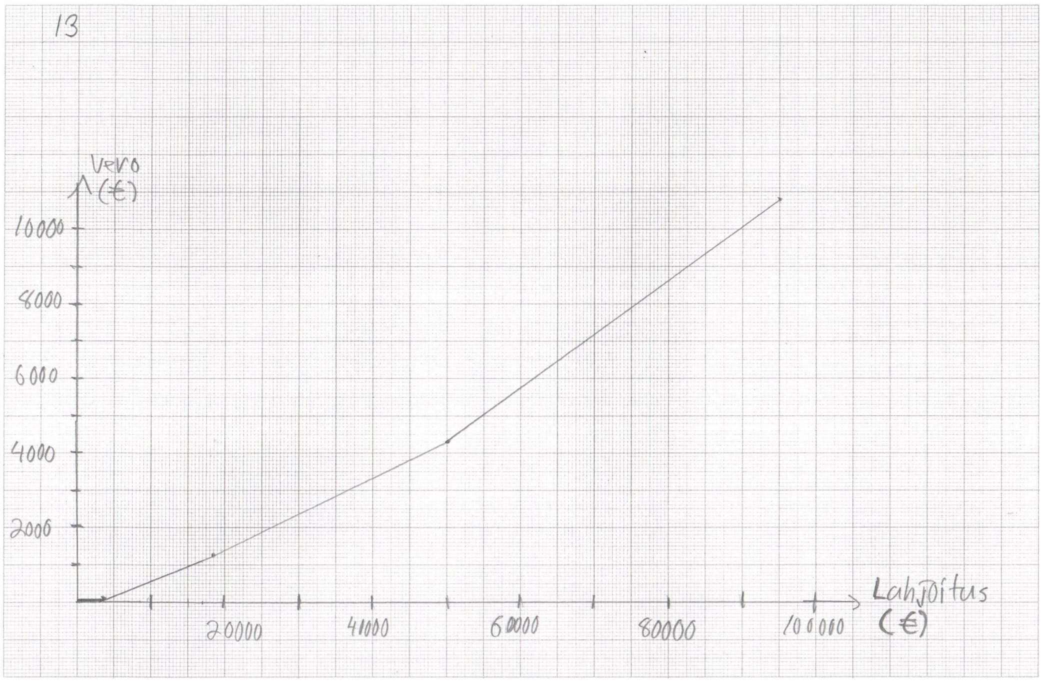
b) x on lahjoitus. y on veron määrä.

$$
\begin{aligned}
0\text{–}4000\,€: &\quad y_1 = 0 \\
4000\text{–}17000\,€: &\quad y_2 = 0{,}07(x - 4000) + 100 \\
&\quad y_2 = 0{,}07x - 180 \\
17000\text{–}50000\,€: &\quad y_3 = 0{,}1(x - 17000) + 1010 \\
&\quad y_3 = 0{,}1x - 690 \\
50000\,€\text{–} \quad : &\quad y_4 = 0{,}13(x - 50000) + 4310 \\
&\quad y_4 = 0{,}13x - 2190
\end{aligned}
$$

Kuvaajat ovat suoria. Lasketaan alku- ja loppupisteet.

$$
\begin{aligned}
y_2(4000) &= 100 \\
y_2(17000) &= 1010 = y_3(17000) \\
y_3(50000) &= 4310 = y_4(50000) \\
y_4(100000) &= 10810
\end{aligned}
$$

Kuvaaja seuraavalla sivulla.


13
Vero (€)
10000
8000
6000
4000
2000
20000
40000
60000
80000
100000
Lahjoitus (€)

14. Sanomalehden tilaushinta vuodeksi 2003 oli 194,26 € ja vuodeksi 2009 vastaavasti 249 €. Kuinka monen prosentin vuosittaista hinnankorotusta tämä vastaa, kun oletetaan, että prosentti on jokaisena vuonna ollut sama?

Ratkaisu. V. 2003: $k = 194{,}26\,€$

V. 2009: $k_6 = 249\,€$

Jos hinta kasvaa saman prosenttiosuuden vuosittain, on kyseessä eksponentiaalinen kasvu:

$$k_n = q^n k, \quad q \text{ on korkotekijä.}$$

$$\begin{aligned} k_6 &= 249 \\ q^6 \cdot 194{,}26 &= 249 \quad \| : 194{,}26 \\ q^6 &= \frac{249}{194{,}26} \quad \| \sqrt[6]{()} \\ q &= \underset{(-)}{+} \sqrt[6]{\frac{249}{194{,}26}} \\ q &= 1{,}04224\ldots \end{aligned}$$

Korkoprosentti:

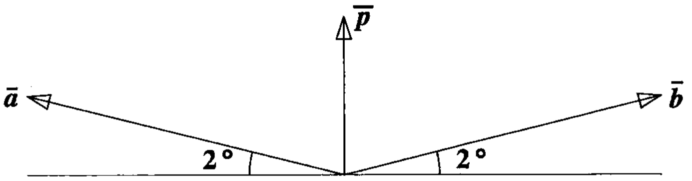
$$\begin{aligned} q - 1 &= 1{,}04224\ldots - 1 \\ &= 0{,}04224\ldots \\ &\approx 4{,}2\,\% \end{aligned}$$

V: Vuosittainen hinnankorotus on ollut 4,2 %

15. Pystysuora vektori $\bar{p} = 5\bar{j}$ esitetään kahden vektorin

$$\bar{a} = -x\bar{i} + y\bar{j} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

summana. Miten on x ja y valittava, kun vaatimuksena on, että sekä vektorin $\bar{a}$ että vektorin $\bar{b}$ kulma x-akseliin nähden on $2°$?

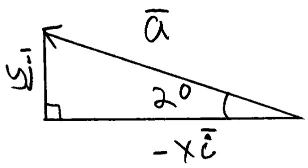


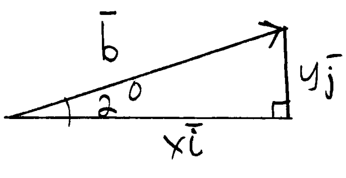
Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\bar{p} &= 5\bar{j} \\
\bar{a} &= -x\bar{i} + y\bar{j}, \quad \bar{b} = x\bar{i} + y\bar{j} \\
\bar{p} &= \bar{a} + \bar{b} \\
5\bar{j} &= -x\bar{i} + y\bar{j} + (x\bar{i} + y\bar{j}) \\
5\bar{j} &= 2y\bar{j},
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
2y &= 5 \quad \| : 2 \\
y &= 2{,}5
\end{aligned}$$





Molemmille vektoreille $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pätee:

$$\begin{aligned}
\tan 2° &= \frac{y}{x} \\
x &= \frac{y}{\tan 2°} \\
x &= 71{,}5906\ldots \\
x &\approx 71{,}6
\end{aligned}$$

V: $x = 71{,}6$ ja $y = 2{,}5$.

x:n arvo voidaan antaa myös kahden numeron tarkkuudella, eli $x = 72$ tai tarkkana arvona, eli $x = \frac{5}{2\tan 2°}$.