Lyhyt matematiikka 20.3.2009, ratkaisut:

1. **a)** Summa on $-x^2+2x+2x^2-3x+1 = x^2-x+1$. Tulo on $(-x^2+2x)(2x^2-3x+1) = -2x^4+(3+4)x^3+(-1-6)x^2+2x = -2x^4+7x^3-7x^2+2x$.

b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3} = x-1 \Longleftrightarrow 3x-2x = 6(x-1) \Longleftrightarrow 5x = 6 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{5}$.

c) Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $2x = 3$ eli $x = \frac{3}{2}$. Edelleen, $y = 1-x = -\frac{1}{2}$.

Vastaus: **b)** $x = \frac{6}{5}$, **c)** $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

2. **a)** Suoraan verrannollisuuden mukaan $\dfrac{y}{x}$ on vakio. Siis $\dfrac{y}{7} = \dfrac{5}{2}$, josta $y = \dfrac{35}{2}$.

b) Derivaatta $f'(x) = 3x^2-12x = 3x(x-4)$ on nolla, kun $x = 0$ tai $x = 4$.

c) Arvo on $\dfrac{2\cdot\frac{5}{8}-1}{\frac{5}{8}+1} = \dfrac{2\cdot 5-8}{5+8} = \dfrac{2}{13}$.

Vastaus: **a)** $y = \frac{35}{2}$, **b)** $x = 0$ tai $x = 4$, **c)** $\frac{2}{13}$.

3. **a)** Yhtälö on $y-2 = -\frac{1}{3}(x+1)$ eli $y = -\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

b) Polynomin nollakohdat ovat $\dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{-5\pm 7}{4}$ eli $x = -3$ tai $x = \frac{1}{2}$. Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa negatiivisia arvoja, kun $-3 < x < \frac{1}{2}$.

4. Tehtävään vastasi kaikkiaan 9300 kokelasta. Eri pistemäärien prosenttiosuudet ja sektoridiagrammin keskuskulmat ovat seuraavat:

pisteitä	0	1	2	3	4	5	6
%-osuus	21,8	13,4	23,5	8,5	7,2	9,8	15,8
kulma	78°	48°	85°	31°	26°	35°	57°

5. Olkoon Alpon ajoaika kohtaamispisteeseen t tuntia. Koska Berit lähtee 15 min Alpon jälkeen, on hänen ajoaikansa $t-\frac{1}{4}$ tuntia. Koska matka = nopeus x aika, saadaan yhtälö $120t+105(t-\frac{1}{4}) = 170$ eli $225t = 170+\frac{1}{4}\cdot 105$. Tästä ratkeaa $t = \frac{157}{180}$ tuntia eli $t = 52$ min 20 s. Alpo on siten kohtaamispaikassa kello 9.12.20. Alpon ajomatka kohtaamispisteeseen on $120\cdot\dfrac{157}{180} = 104\frac{2}{3}$ (km).

Vastaus: Alpo ja Berit kohtaavat 104,7 km A:sta kello 9.12.

6. Pallon säteelle r pätee $2\pi r = 64{,}2$, joten $r = \frac{32{,}1}{\pi} \approx 10{,}2177$ (cm). Pallon tilavuus $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\frac{32{,}1}{\pi})^3 \approx 4468{,}421$ (cm^3). Jos pallo on kokonaan kuparia, sen massa on $8{,}96V \approx 40037$ (g) eli 40,037 kg. Tämä on enemmän kuin pallon massa 37,9 kg.

Vastaus: Pallon sisällä on tyhjää tilaa.

7. Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja puolittavat toisensa. Jos pitemmän lävistäjän pituus on $2x$, on Pythagoraan mukaan $x^2+2^2 = 8^2$, josta $x = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$. Pitemmän lävistäjän pituus on $2x = 4\sqrt{15} \approx 15{,}4919$ (cm).

Vastaus: 15,5 cm.

8. Tarkastellaan x euron suuruista palkkatuloa ja 1500 euron opintorahaa. Jos $x \leq 700$, on puhdas ansiotulo korkeintaan 2200 euroa ja opintorahavähennys on 1500 euroa.

Jos $x > 700$, vähennys pienenee määrällä $0{,}5(1500 + x - 2200) = 0{,}5x - 350$ (euroa). Vähennykseksi tulee ohjeen mukaan pienempi luvuista $2200-(0{,}5x-350) = 2550-0{,}5x$ ja 1500. Koska $2550 - 0{,}5x < 1500$, kun $x > 2100$ (euroa), on vähennys 1500 euroa, kun $x \leq 2100$ ja $2550 - 0{,}5x$ sen jälkeen.

Vähennys ei voi olla negatiivinen, joten on oltava $2550 - 0{,}5x \geq 0$. Näin on, kun $x \leq 5100$ (euroa). Tätä 5100 euroa suuremmilla palkkatuloilla ei enää saa vähennystä.

Kysytty vähennyksen kuvaaja $y = f(x)$ on murtoviiva, missä

$$f(x) = \begin{cases} 1500, & \text{kun } 0 \leq x \leq 2100, \\ 2550 - 0{,}5x, & \text{kun } 2100 < x < 5100, \\ 0, & \text{kun } x \geq 5100. \end{cases}$$

9. Merkitään kolmion kärkiä $A = (-6, 1)$, $B = (0, 0)$ ja $C = (4, 9)$. Piirretään kolmion ABC ympäri suorakulmio, jonka kärjet ovat $D = (-6, 0)$, $E = (4, 0)$, C ja $F = (-6, 9)$.

a) Määritetään kolmion kulmat syntyneiden apukolmioiden kulmien avulla. Kulmalle $\alpha = \angle EBC$ pätee $\tan\alpha = \frac{9}{4}$, joten $\alpha \approx 66{,}0375^o$. Kulmalle $\beta = \angle ABD$ pätee $\tan\beta = \frac{1}{6}$, joten $\beta \approx 9{,}4623^o$. Näin ollen kolmion ABC kulma $\gamma_1 = \angle ABC = 180^o - \alpha - \beta \approx 104{,}5002^o$.
Kulmalle $\delta = \angle ACF$ pätee $\tan\delta = \frac{8}{10}$, joten $\delta \approx 38{,}6598^o$. Näin ollen kolmion ABC kulma $\gamma_2 = \angle ACB = 90^o - (90^o - \alpha) - \delta = \alpha - \delta \approx 27{,}3777^o$.
Kolmion kolmas kulma $\gamma_3 = \angle BAC = 180^o - \gamma_1 - \gamma_2 \approx 48{,}1221^o$.
b) Suorakulmion $DECF$ ala on $9 \cdot 10 = 90$. Apukolmion BEC ala on $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18$. Apukolmion ADB ala on $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3$. Apukolmion ACF ala on $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40$. Kolmion ABC ala on siten $90 - 18 - 3 - 40 = 29$.

Vastaus: **a)** Kolmion kulmat ovat $104{,}5^o$, $27{,}4^o$ ja $48{,}1^o$. **b)** Kolmion pinta-ala on 29.

10. Suorakulmion kolmas kärki on $(x, 4x - x^2)$ ja neljäs $(0, 4x - x^2)$. Suorakulmion ala $f(x) = x(4x-x^2) = 4x^2-x^3$. Alan derivaatta $f'(x) = 8x-3x^2 = x(8-3x)$. Derivaatta häviää, kun $x = 0$ tai $x = \frac{8}{3}$. Alan suurin arvo on joko derivaatan nollakohdassa tai määrittelyvälin $[0, 4]$ päätepisteissä. Koska $f(0) = f(4) = 0$ ja $f(\frac{8}{3}) = \frac{256}{27} \approx 9{,}48$, antaa derivaatan nollakohta suurimman arvon.

Vastaus: Alan lauseke on $4x^2 - x^3$ ja sen suurin arvo on $\frac{256}{27}$.

11. Olkoon ryhmässä n henkilöä. Todennäköisyys sille, ettei ryhmässä ole yhtään vasenkätistä, on $0{,}9^n$. Todennäköisyys sille, että ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen, on $1-0{,}9^n$. Tästä saadaan ehto $1-0{,}9^n = 0{,}8$ eli $0{,}9^n = 0{,}2$. Edelleen, $n\log 0{,}9 = \log 0{,}2$, josta $n = \dfrac{\log 0{,}2}{\log 0{,}9} \approx 15{,}2755$.

Vastaus: Vähintään 16 henkilöä.

12. Epäyhtälöiden määrittelemä alue on nelikulmio, jonka kärkipisteet ovat origo O, suorien $y = 0$ ja $5x+3y = 30$ leikkauspiste $A = (6, 0)$, suorien $2x+3y = 24$ ja $5x+3y = 30$ leikkauspiste $B = (2, \frac{20}{3})$ sekä suorien $x = 0$ ja $2x + 3y = 24$ leikkauspiste $C = (0, 8)$. Esimerkiksi nelikulmion sisäpiste $(1, 1)$ toteuttaa kaikki epäyhtälöt.

On löydettävä suurin arvo t, jolla suoralla $x + y = t$ ja nelikulmiolla on yhteisiä pisteitä. Mahdollisia pisteitä ovat nelikulmion kärkipisteet. Origossa $t = 0 + 0 = 0$, A:ssa $t = 6 + 0 = 6$, B:ssä $t = 2 + \frac{20}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$ ja C:ssä $t = 0 + 8 = 8$. Näistä suurin t:n arvo on $\frac{26}{3}$.

Vastaus: Kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(2, \frac{20}{3})$ ja $(0, 8)$. Suurin arvo on $\frac{26}{3}$.

13. Aritmeettisesta summasta saadaan termien lukumäärälle n yhtälö $n\dfrac{1+61}{2} = 961$. Tästä ratkeaa $n = 31$. Jos jonon toinen termi on $1+d$, saadaan d:lle jonon määritelmästä yhtälö $61 = 1 + (31 - 1)d$. Tämän ratkaisu on $d = 2$. Jonon toinen termi on siis 3.

Vastaus: 3.

14. **a)** Talletuksen lähdeverotettu korko on $0{,}71 \cdot 1{,}50 = 1{,}065$, joten lähdeverotettu korkotekijä on $q = 1{,}01065$. Kymmenen vuoden kuluttua rahaa on tilillä $q^{10} \cdot 1000 \approx 1111{,}7517$ (euroa).

b) Jos talletus a kaksinkertaistuu n vuodessa, on $q^n a = 2a$ eli $q^n = 2$. Tästä saadaan $n = \dfrac{\log 2}{\log q} \approx 65{,}4302$.

Vastaus: **a)** 1111,75 euroa, **b)** 66 vuoden kuluttua.

15. **a)** $\overline{b} - \overline{a} = (2 + 2)\overline{i} + (-1 + 5)\overline{j} = 4\overline{i} + 4\overline{j}$.

b) Vektorin $\overline{a}$ päätepiste on $(-2, -5)$, vektorin $\overline{b}$ on $(2, -1)$ ja vektorin $\overline{b} - \overline{a}$ on $(4{,}4)$.

c) Vektorin $\overline{a}$ pituus $|\overline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ ja vektorin $\overline{b}$ pituus $|\overline{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Vektoreiden pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b} = (-2) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = 1$. Välisen kulman α kosini $\cos\alpha = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{29}\sqrt{5}} \approx 0{,}083045$. Tästä saadaan $\alpha \approx 85{,}23636^\circ \approx 85{,}24^\circ$.