

4052008

① a) $4x^2 + 9 = -12x$

MAOK S.22

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a=4, b=12, c=9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$

1p

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-12 \pm 0}{8}$$

$$x = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

1p

$$\text{V: } x = -\frac{3}{2}$$

b) $x = \frac{x^2 + 3}{x - 1} \quad | \cdot (x - 1)$

$$x(x - 1) = x^2 + 3$$

$$x^2 - x = x^2 + 3$$

1p

$$-x = 3 \quad | \cdot -1$$

$$x = -3$$

1p

$$\text{V: } x = 3$$

40508 + 1.

$$c) \frac{\overset{2)}{(5x + 3y)}}{3} + \frac{\overset{3)}{(x - 6y)}}{2} =$$

$$= \frac{10x + 6y}{6} + \frac{3x - 18y}{6} \quad 1p$$

$$= \frac{10x + 6y + 3x - 18y}{6}$$

$$= \frac{13x - 12y}{6} \quad + 1p \quad = \frac{13}{6}x - 2y$$

$$N: \underline{\underline{\frac{13}{6}x - 2y}}$$

② $(-2, 0)$ ja $(1, 7)$

a)

$$k = \frac{7 - 0}{1 - (-2)} = \frac{7}{3} \quad 1p$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

MAOL
s. 42

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

MAOL
s. 43
1.

$$y - 0 = \frac{7}{3}(x - (-2))$$

$$y = \frac{7}{3}(x + 2) = \frac{7}{3}x + \frac{14}{3} \quad 1p$$

$$V: \underline{y = \frac{7}{3}x + \frac{14}{3}}$$

b)

$$V = 1000 \text{ m}^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

MAOL
s. 33

$$1000 = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad | : \frac{4}{3} \quad (\text{sama kuin } \cdot \frac{3}{4})$$

$$\frac{3}{4} \cdot 1000 = \pi r^3$$

$$\frac{3000}{4} = \pi r^3$$

$$750 = \pi r^3 \quad | \pi$$

$$r^3 = \frac{750}{\pi} \quad 1p \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}} = 6,20350 \dots \approx 6,20 \quad 1p$$

$$V: \underline{6,20 \text{ m}}$$

väärä tarkkuus -1p

508
2

$$c) \quad 2^x = 1024 \quad | \log$$

$$\log x^r = r \log x$$

MAOH
S 23

$$\log 2^x = \log 1024$$

$$x \log 2 = \log 1024 \quad | : \log 2$$

$$x = \frac{\log 1024}{\log 2} = 10$$

$$\underline{V: x = 10}$$

n alkioita \Rightarrow permutaatioiden eli järjestyksen määrä $n!$ kpl

MAGL S. 54

3)

a) A, B, C, D 4 kpl

KIRJA S. 122

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$V: \underline{24} \quad 3p$$

jos luetteloinnalla tehty, luettelointi järjessä mutta vastaus on väärä max 1p

b)

$$x = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$x = 5 \Rightarrow y = ?$$

kääntäen venähdällisyys

KIRJA S. 80

x	y
2	3
5	y

↓

↑

$$\frac{2}{5} = \frac{y}{3} \quad 1p \quad | \cdot 3$$

$$y = \overset{+1p}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \quad 1p \quad V: \underline{y = \frac{6}{5}}$$

(4)

	kustannukset		kokonaishiinta
	polttoaine	muut	
Vanha	$0,35a$	$a - 0,35a$ $= 0,65a$	a
Uusi	$x \cdot 0,35a$	$0,65a$	$1,10a$

1 p

$$x \cdot 0,35a + 0,65a = 1,10a + 2p$$

$$x \cdot 0,35a = 1,10a - 0,65a$$

$$x \cdot 0,35a = 0,45a \quad | \cdot 0,35a$$

$$x = \frac{0,45a}{0,35a}$$

$$x = 1,28571 \dots \stackrel{+1p}{\approx} 1,286 \Rightarrow 28,6\% \stackrel{+2p}{\approx}$$

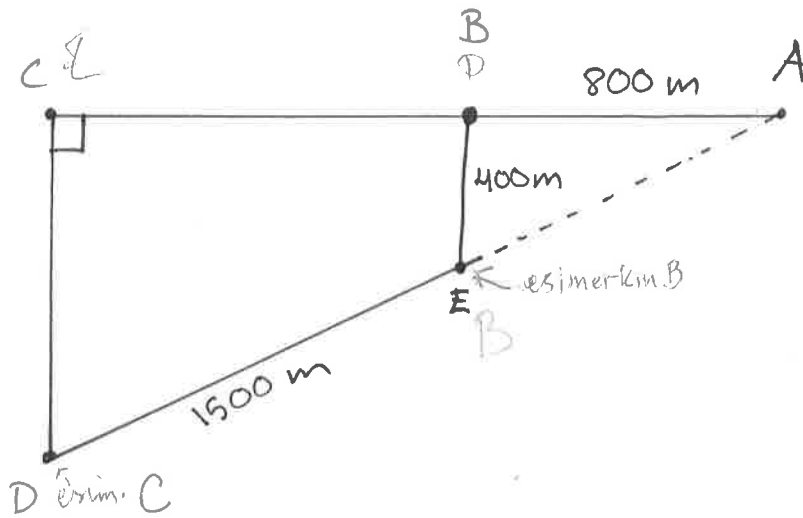
promille = 0,001 MAOL S. 16

$$V: \underline{28,6\%}$$

a puuttuu -2 p

väärä tarkkuus -1 p

(5.)



$$t_{\text{Liisa}} = 20 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$t_{\text{Pia}} = 20 \text{ min } 30 \text{ s} + 3 \text{ min } 20 \text{ s} \\ = 23 \text{ min } 50 \text{ s}$$

Liisan matka:

$$800 \text{ m} + 400 \text{ m} + 1500 \text{ m} = 2700 \text{ m} = 2.7 \text{ km} \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{aika} \quad 20 \text{ min } 30 \text{ s} = \frac{20 \text{ min}}{60 \text{ min/h}} + \frac{30 \text{ s}}{3600 \text{ s/h}} \\ = 0.341666... \text{ h} \quad +1$$

nopeus

$$\text{MAOH S. 116} \quad v = \frac{\text{matka}}{\text{aika}} = \frac{2.700 \text{ km}}{0.341666... \text{ h}} = 7.9024... \text{ km/h} \\ \approx 7.9 \text{ km/h} \quad +1 \text{ p}$$

Pian

$$AE = \sqrt{800^2 + 400^2} = 894.42...$$

$$AD = 1500 + 894.42... = 2394.42...$$

YHDEKSMUOTOISET KOLMIOT

KIRJA S. 48

ACD ja ABE

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{AC}{2394.42...} = \frac{800}{894.42...} \Rightarrow AC = \frac{800 \cdot 2394.42...}{894.42...} \\ = 2141.6...$$

$$\frac{DC}{AC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{DC}{2141.6...} = \frac{400}{800} \Rightarrow DC = \frac{400 \cdot 2141.6...}{800} \\ = 1070.82... \quad +1 \text{ p}$$

S 08
5

matka

$$2141,64... + 1070,82... = 3212,46 \approx 3,2 \text{ km} + 1 \text{ p}$$

aika

$$23 \text{ min } 50 \text{ s} = 0,39722... \text{ h}$$

nopeus

$$\frac{3,212... \text{ km}}{0,39722... \text{ h}} = 8,087... \text{ km/h} \approx 8,1 \text{ km/h} + 1 \text{ p}$$

✓: Liisan matka 2,7 km ja keskinopeus 7,9 km/h
Pian matka 3,2 km ja keskinopeus 8,1 km/h

vastauksissa liian suuri tarkkuus - 1 p

S. 08

6

	seoksen määrä (g)	nikkelin (g) määrä	
Seos 1	x	0,25x	
seos 2	y	0,20y	
YHT.	300	0,22 · 300 = 66	1p

$$\begin{cases} X + y = 300 \\ 0,25x + 0,20y = 66 \end{cases} \quad +2p \Rightarrow y = 300 - x$$

YHTÄLÖPARIT
KIRJA S. 12

$$0,25x + 0,20(300 - x) = 66 \quad +1p$$

$$0,25x + 60 - 0,20x = 66$$

$$0,25x - 0,20x = 66 - 60$$

$$0,05x = 6 \quad |:0,05$$

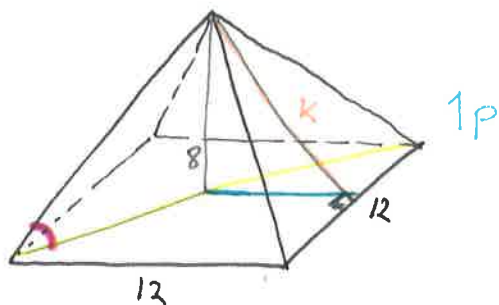
$$x = 120g \quad +1p$$

$$y = 300 - x = 300 - 120 = 180$$

$$y = 180g \quad +1p$$

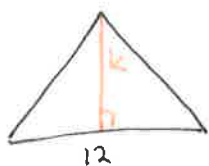
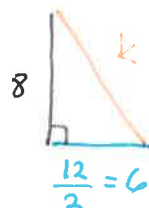
V: 1. seosta tarvitaan 120g ja 2. seosta 180g

7



Sivutahtkon korkeus

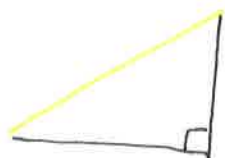
$$k = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \quad +1p$$



Sivutahtkon ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60 \quad +1p$$

$$A = \frac{1}{2} ah \quad \text{MAOL S 29}$$



pohjatahtkon läuistäjä

$$d = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{2 \cdot 12^2} = 12\sqrt{2} = 16,97056... \quad +1p$$



$$\tan \alpha = \frac{\text{Vastainen kateetti}}{\text{Viereinen kateetti}}$$

MAOL S.36

$$\tan \alpha = \frac{8}{\frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2}} = 0,9428... \quad +1p$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0,9428... = 43,3138... \approx 43,31^\circ \quad +1p$$

MUISTA!
LASKIMEN
KULMA YKSIKÖ
DEG
KUN LASKET
ASTEITA

V: Sivutahtkon ala 60 pinta-ala yksikössä
Kysytty kulma on $43,31^\circ$

väärä tarkkuus -1p

MaB 40508

8

$a = ?$

$$y = -3x + 2$$

$$y = ax + 6$$

x-akselilla
janan pituus 3

Janan toinen päätepiste

$$y = -3x + 2$$

$$y = 0 \text{ kun } -3x + 2 = 0$$

$$-3x = -2 \quad | : -3$$

$$x = \frac{2}{3} \quad 1p$$

Janan toinen päätepiste

$$y = ax + 6$$

$$y = 0 \text{ kun } ax + 6 = 0$$

$$ax = -6 \quad | : a$$

$$x = \frac{-6}{a} \quad +1p$$

ratkaistaan a :

koska janan pituus on 3

on toinen päätepiste ensimmäisen
avulle lausuttuna

$$x = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3} \quad \text{TAI} \quad x = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3} \quad +2p$$

toisesta päätepisteestä:

$$x = \frac{-6}{a} \Rightarrow a = \frac{-6}{x}$$

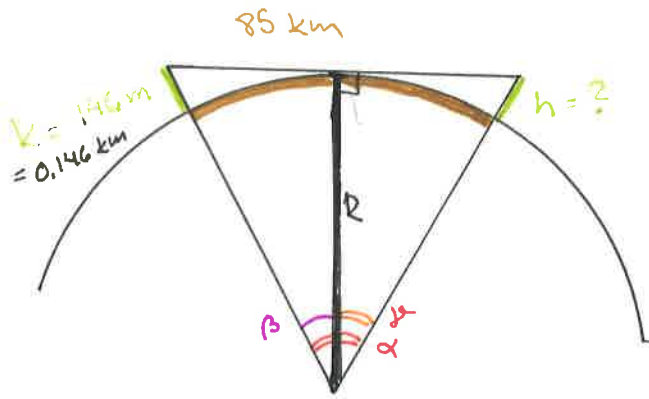
$$a = \frac{-6}{\frac{11}{3}} = -6 \cdot \frac{3}{11} = -\frac{18}{11}$$

TAI

$$a = \frac{-6}{-\frac{7}{3}} = -6 \left(\frac{3}{-7} \right) = \frac{18}{7} \quad +2p$$

\therefore a :n arvoilla $-\frac{18}{11}$ ja $\frac{18}{7}$

MAOL s. 31



YMPYRÄÄ

$$\text{Kehän pituus} = 2\pi r$$

$$\text{Sektorin kaaren pituus} = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r$$

$$2\pi R = 40000 \quad | : 2\pi$$

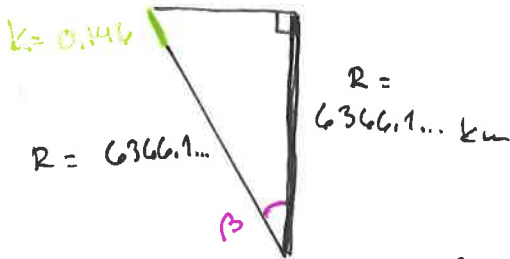
$$R = \frac{40000}{2\pi} = 6366.1... \text{ km}$$

Taulukko arvon käyttö maapallon säteelle hyväksytään

$$\frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi R = 85 \quad | : 2\pi R$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{85}{2\pi R} \quad | \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{85 \cdot 360^\circ}{2\pi \frac{40000}{2\pi}} = \frac{85 \cdot 360^\circ}{40000} = 0.765^\circ \quad 1p$$



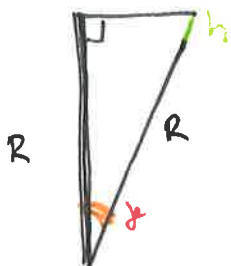
$$\cos \beta = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

MAOL s. 36

$$\cos \beta = \frac{R}{R+k} = \frac{6366.1...}{6366.1... + 0.146} = 0.999977...$$

$$\beta = \cos^{-1} 0.999977... = 0.388034...^\circ + 2p$$

$$\gamma = \alpha - \beta = 0.765^\circ - 0.388034...^\circ = 0.376965...^\circ + 1p$$



$$\cos \gamma = \frac{R}{R+h} \quad | \cdot (R+h)$$

$$\quad \quad \quad | : \cos \gamma$$

$$R+h = \frac{R}{\cos \gamma}$$

$$h = \frac{R}{\cos \gamma} - R = \frac{6366.1...}{\cos 0.376965...} - 6366.1... = 0.137787... \approx 138 \text{ m} \quad +1p$$

138 m

S.08

(10)

$$1000 \text{ miljoonaa} = 10^9$$

$$a_1 = 2 \quad \text{1. termi}$$

$$q = 1.05 \text{ +1p} \quad \text{peräkkäisten termien suhde}$$

Kirja
S. 30

MAOL
S. 24
koluta 5.

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{yleinen termi}$$

$$a_n = 2 \cdot 1.05^{n-1} < 10^9 \text{ +1p} \quad | : 2$$

$$1.05^{n-1} < \frac{10^9}{2} = 5 \cdot 10^8 \quad | \log$$

$$\log 1.05^{n-1} < \log 5 \cdot 10^8$$

$$(n-1) \log 1.05 < \log 5 \cdot 10^8 \quad | : \log 1.05 > 0$$

$$n-1 < \frac{\log 5 \cdot 10^8}{\log 1.05}$$

jaettaessa merkin suunta ei muutu

$$n < \frac{\log 5 \cdot 10^8}{\log 1.05} + 1 = 411,53599 \dots$$

$$n < \underline{411} \text{ termiä +1p}$$

siis 411 termiä pienempiä kuin 10^9

MAOL
S. 24

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1 \quad \text{geometrisen summa}$$

$$S_{411} = \frac{2(1-1.05^{411})}{1-1.05} \text{ +1p} = 2,04579 \dots \cdot 10^{10} \approx 20,5 \cdot 10^9 \text{ +1p}$$

↑: 411 termiä on pienempiä kuin 1000 miljoonaa termien summa on $20,5 \cdot 10^9$

11) yksisiemen:

$$P(\text{itää}) = 0,6$$

$$P(\text{ei idä}) = 1 - P(\text{itää}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

a) sicmenet:

$$\begin{aligned} P(\text{mikään ei idä}) &= P(\text{1. ei idä}) \cdot P(\text{2. ei idä}) \cdot P(\text{3. ei idä}) \\ &= 0,4^3 = 0,064 \quad 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi itää}) &= 1 - P(\text{mikään ei idä}) \\ &= 1 - 0,064 = 0,936 \quad +1 \end{aligned}$$

1: mikään ei idä +n 6,4%, ainakin yksi itää 93,6%

b)

$P(\text{jokaisessa rukkussa ainakin yksi itää})$

$$\begin{aligned} &= P(\text{ainakin yksi itää}) \cdot P(\text{ainakin yksi itää}) \cdot \dots \cdot P(\text{ainakin yksi itää}) \\ &\quad \text{1. rukkussa} \quad \text{2. rukkussa} \quad \text{5. rukkussa} \\ &= 0,936^5 = 0,718421\dots \approx 0,718 \quad +3 \end{aligned}$$

1: jokaisessa rukkussa ainakin yksi itää 71,8% +n

jos vastauksessa lisää merkittäviä numeroita -1p

$$(12) \quad f(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 41x + 50 \quad [0, 10]$$

$$f'(x) = -3x^2 + 27x - 41 \quad 1p.$$

MAOL s. 22

$$f'(x) = 0 \quad \text{kun} \quad -3x^2 + 27x - 41 = 0$$

$$a = -3, \quad b = 27, \quad c = -41$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-41)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$= \frac{-27 \pm \sqrt{729 - 492}}{-6} = \frac{-27 \pm \sqrt{237}}{-6}$$

$$x = 7.065800... \quad \text{TAI} \quad x = 1.934199... \quad +1p$$

Suurin arvo löytyy välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nolla kohdista

$$f(0) = -0^3 + 13,5 \cdot 0^2 - 41 \cdot 0 + 50 = 50$$

$$f(1.934199...) = 13.96695...$$

$$\text{Suurin arvo } f(7.066) \approx 81.533$$

$$f(7.065800...) = 81.53304...$$

+2p

$$f(10) = -10$$

funktio kasvaa nopeimmin kohdassa, missä derivaatta saa suurimman arvonsa eli derivaatan derivaatan nolla kohdassa (toinen derivaatta)

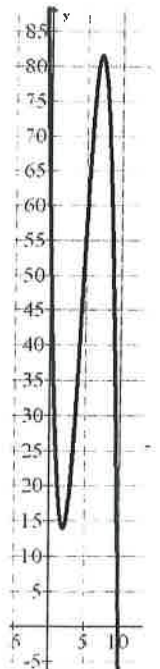
$$f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$$

$$f''(x) = -6x + 27$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{kun} \quad -6x + 27 = 0$$

$$-6x = -27 \quad | : -6$$

$$x = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,500 \quad +1p$$

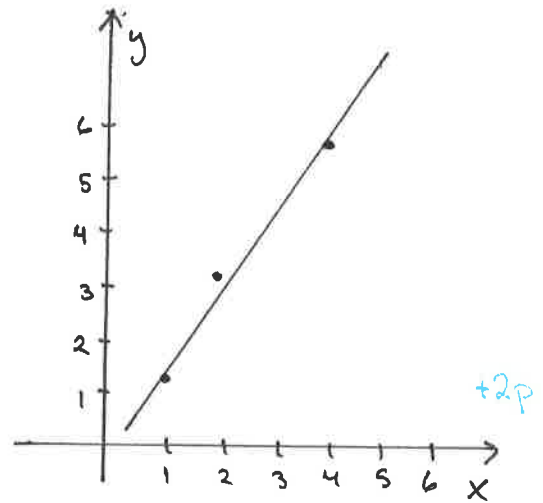


✓ Suurin arvo $f(7.066) \approx 81.533$
 Nopein kasvu kun $x = 4.500$

+1p

(13)

PNS-menetelmä: valitse k siten, että
 $(k \cdot 1 - 1,2)^2 + (k \cdot 2 - 3,1)^2 + (k \cdot 4 - 5,5)^2$
 on mahdollisimman pieni.



$$\begin{aligned}
 f(k) &= (k - 1,2)^2 + (2k - 3,1)^2 + (4k - 5,5)^2 \\
 &= (k - 1,2)(k - 1,2) + (2k - 3,1)(2k - 3,1) + (4k - 5,5)(4k - 5,5) \\
 &= k^2 - 2 \cdot 1,2k + 1,2^2 + 4k^2 - 2 \cdot 2k \cdot 3,1 + 3,1^2 + 16k^2 - 2 \cdot 4k \cdot 5,5 + 5,5^2 \\
 &= k^2 + 4k^2 + 16k^2 - 2,4k - 12,4k - 44k + 1,44 + 9,61 + 30,25 \\
 &= 21k^2 - 58,8k + 41,3 \quad 1p
 \end{aligned}$$

$$f'(k) = 42k - 58,8 \quad +1p$$

$$\begin{aligned}
 f'(k) &= 0 \quad \text{kun} \quad 42k - 58,8 = 0 \\
 42k &= 58,8 \quad | :42 \\
 k &= 1,4
 \end{aligned}$$

funktio $f(k)$ on ylöspäin aukeava paraabeli
 koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen
 paraabelin pienin arvo on derivaatan nollakohdassa MAOL s. 45 +2p

V: Arvolla $k = 1,4$

S.08

14

Korko 2.2% lähdevero 28%

Veroton korko $(1-0.28) \cdot 2.2\% = 1.584\%$

MAOL
s.26

$$q = 1 + \frac{P}{100}$$

$$q = 1 + \frac{1.584}{100} = 1.01584 \quad 1p$$

Vuotuinen takaisinmaksu 2500

nykyarvon laskeminen 5:lle erälle
 $n = 1-5$

$$K_n = Kq^n$$

MAOL s.26

$$K = \frac{K_n}{q^n} = K_n q^{-n}$$

$$K = K_n (q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + q^{-4} + q^{-5}) + 2p$$

$$K = 2500 (1.01584^{-1} + 1.01584^{-2} + \dots + 1.01584^{-5})$$

$$= 2500 \cdot 4.77051121, \dots$$

$$= 11927,27804, \dots \approx 11927,28 + 2p$$

∴ 11927,28 € valintaan + 1p

508

15
A

$$\bar{X} = 253 \text{ h}$$

$$n = 50$$

$$s = 12 \text{ h}$$

95% luottamusväli

$$\left[\bar{X} - 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}} \right] 1p$$

MAOL
s. 56

luottamusväliksi saadaan tunteina

$$\begin{aligned} & \left[253 - 1.96 \frac{12}{\sqrt{50}}, 253 + 1.96 \frac{12}{\sqrt{50}} \right] \\ & = \left[253 - 3.32623\dots; 253 + 3.32623\dots \right] = \left[249.674; 256.326 \right] \end{aligned} \quad +2p$$

Jotta välinpituus olisi 2 on n arvon oltava

$$2 \cdot 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}} = 2 \quad +1p$$

$$2 \cdot 1.96 \frac{12}{\sqrt{n}} = 2 \quad +1p$$

$$\sqrt{n} = 1.96 \cdot 12 \quad | (\)^2$$

$$n = (1.96 \cdot 12)^2 = 553.1904$$

$$N: n. 550 \text{ kpl} \quad (553 \text{ kpl}) \quad +1p$$

15
B

$$y = A \sin(bt) \quad A = 1, b = 2$$

$$y = \sin 2t$$

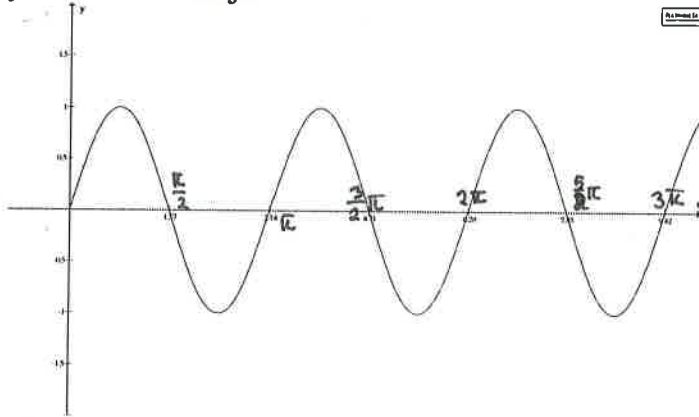
nollakohdat

$$bx = n \cdot \pi$$

$$x = \frac{n\pi}{b}$$

$$\Rightarrow f = \frac{n\pi}{2}$$

$y = \sin 2t$ kuvaaja



- kuvaajassa vähintään kahden jakson pituus
- akselit asteikkoineen
- huiput ja nollakohdat likimain oikeissa kohdissa

1p
+1p
+1p

$y = A \sin(bt)$ on jaksollinen

jos alin asema saavutetaan hetkellä t ,
on seuraava alin asema hetkellä $t + 3,2$

+1p

Sinin jakso on 2π

$$\Rightarrow b(t + 3,2) - bt = 2\pi$$

$$bt + 3,2b - bt = 2\pi$$

$$3,2b = 2\pi \quad | : 3,2$$

+1p

$$b = \frac{2\pi}{3,2} \approx 1,9634954$$

✓: $b \approx 1,96350$ +1p