K08

1

a) $2x + 1 = x^2 + 2x$

$x^2 = 1$ 1p $| \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 1$ +1p

V: $x = \pm 1$

b)

$2x + y = 1$

$x - y = 0 \Rightarrow y = x$

sij.

$2x + y = 1$

$2x + x = 1$

$3x = 1$ 1p

$x = \frac{1}{3}$

V: $x = y = \frac{1}{3}$ +1p

c) $\frac{5}{7}^{9)} - \frac{6}{9}^{7)} = \frac{45}{63} - \frac{42}{63} = \frac{3}{63}^{(3} = \frac{1}{21}$ 1p

positiivinen, joten $\frac{5}{7}$ on suurempi +1

V: $\frac{5}{7}$ on suurempi

K08

2

a) $5x - (1-x) = 13x$

$5x - 1 + x = 13x$ 1p

$6x - 13x = 1$

$-7x = 1 \quad | : -7$

$x = -\frac{1}{7}$ +1p

V: $x = -\frac{1}{7}$

b)

mediaani

1, 3, 3, 3, 5, 6, 7 +1p

keskiarvo

$\bar{x} = \frac{1+3+3+3+5+6+7}{7} = 4$ +1p

V: Md = 3, $\bar{x} = 4$

c) $\frac{a+3}{a} : \frac{3a+9}{2a}$

$= \frac{a+3}{a} \cdot \frac{2a}{3a+9}$

$= \frac{2a(a+3)}{a(3a+9)}$ +1p

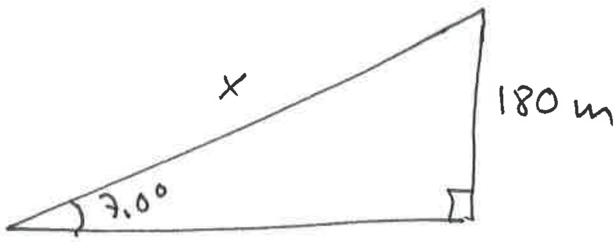
$= \frac{2\cancel{a}(\cancel{a+3})}{3\cancel{a}(\cancel{a+3})} = \frac{2}{3}$ +1p

V: $\frac{2}{3}$

S.08

(3) MAOL S.36

a) $\sin\alpha = \dfrac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$



$\sin 7{,}0° = \dfrac{180}{x}$

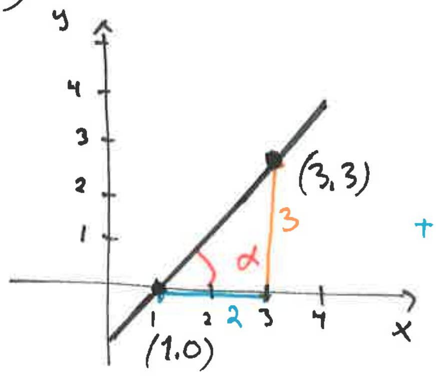
$x = \dfrac{180}{\sin 7} = 1476{,}991\ldots \approx 1477\text{ m}$ 1p

$\text{aika} = \dfrac{1{,}476991\ldots\text{ km}}{6\text{ km/h}} = 0{,}246166\ldots\text{ h}$ +1p

$= 14{,}769\ldots\text{ min} \approx 14\text{ min }46\text{ s}$ +1p

V: 1477 m, 14 min 46 s

b)



+1p

Suuntakulma:

$\tan\alpha = \dfrac{s_y}{s_x}$

kulmakerroin

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

MAOL S.42

$\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$ +1p

$\alpha = \tan^{-1}\left(\tfrac{3}{2}\right) = 56{,}30993\ldots° \approx 56{,}3°$ +1p

TAI

$k = \dfrac{3-0}{3-1} = \dfrac{3}{2}$

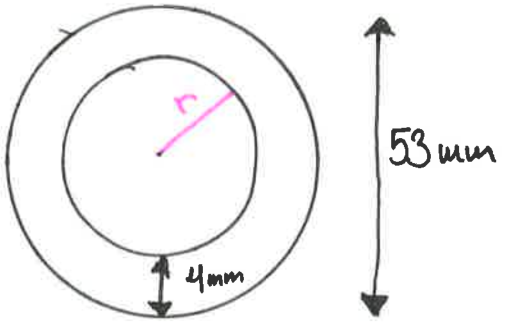
V: $\alpha = 56{,}3°$

$\tan\alpha = k$

$\tan\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 56{,}3°$

K 08

4



$r = \frac{53 - 2 \cdot 4}{2}$ mm $= 22{,}5$ mm 2p

$= 2{,}25$ cm

MAOL s.32

$\boxed{V = Ah}$

$\boxed{A = \pi r^2}$

$\boxed{V = \pi r^2 h} = 3{,}0\ \ell = 3000\ cm^3$

$1\ \ell = 1\ dm^3$

(MAOL s.69)

$h = \frac{V}{r^2 \pi} = \frac{3000\ cm^3}{(2{,}25\ cm)^2\ \pi}$

$= 188{,}628\ldots$ cm +3p ≈ 189 cm +1p

YKSIKKÖMUUNNOKSIIN
ETULIITTEET MAOL S.67

V: 189 cm

seinämänpaksuus huomioitu vain kerran max 4p
säde ja halkaisija sekoitettu —//—
yksikkömuunnosvirhe -2p

K08

5

A: 4 €/kk + 0,09 €/min

B: — + 0,12 €/min

A: $f(x) = 0{,}09x + 4$ 2p

B: $g(x) = 0{,}12x$ +1p

$f(x) = g(x)$

$0{,}09x + 4 = 0{,}12x$ +1p

$0{,}12x - 0{,}09x = 4$

$0{,}03x = 4 \quad | : 0{,}03$

$x = 133{,}333\ldots$ +1p

V: 133 min +1p

K 08

6

intensiteetti	etäisyyden neliö
a	50^2
x	15^2

1p

$$\frac{x}{a} = \frac{50^2}{15^2} \; +1p \; = \frac{2500^{(25}}{225} = \frac{100}{9}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{100}{9} \quad \Big| \cdot a$$

$$x = \underbrace{\frac{100}{9}}_{q} \cdot a \quad +1p$$

HAOL s. 26

$$\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$$

prosentti

korkotekijä = prosenttikerroin

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\frac{p}{100} = q - 1 \quad \Big| \cdot 100$$

$$p = (q - 1) \cdot 100$$

$$p = \left(\frac{100}{9} - 1\right) \cdot 100$$

$$= 1011{,}1111\ldots \quad +1p$$

V: 1011 % + 2p

K08

7 $h(t) = -0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8$

alaspäinaukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin negatiivinen
→ suurin arvo derivaatan nollakohdassa

$h'(t) = -0{,}30t + 2{,}4$ 1p

$h'(t) = 0$ kun $-0{,}30t + 2{,}4 = 0$

$-0{,}30t = -2{,}4 \quad | : -0{,}30$

$t = 8$ +1p

lakikorkeus pallolla, kun $t = 8$ s

$h(8) = -0{,}15 \cdot 8^2 + 2{,}4 \cdot 8 + 1{,}8 = 11{,}4$ +2p (m)

MAOL s. 22

$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$h(t) = 0$ kun $-0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8 = 0$

$$t = \frac{-2{,}4 \pm \sqrt{2{,}4^2 - 4 \cdot (-0{,}15) \cdot 1{,}8}}{2 \cdot (-0{,}15)} = \frac{-2{,}4 \pm \sqrt{5{,}76 + 1{,}08}}{-0{,}30}$$

$$\approx \frac{2{,}4 \pm 2{,}61534\ldots}{0{,}3}$$

$t_1 = 16{,}717\ldots$ +1p

$(t_2 = -0{,}717\ldots)$ ajan oltava positiivinen

laskeva välillä $[8; 16{,}7]$ +1p

V: Pallon lakikorkeus on 11,4 m ja lentorata on laskeva välillä 8 s – 16,7 s

K08

8

$$P_{(\text{viisi mustaa})} = \frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{12}{143} = 0{,}083916\ldots$$ 1p +1p

$$\left(\text{TAI} = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{15}{5}} = \right)$$

$$P_{(\text{viisi punaista})} = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11} = \frac{1}{3003} = 0{,}000333$$ +1p

$$\left(\text{TAI} = \frac{\binom{5}{5}}{\binom{15}{5}} = \right)$$

$$P_{(\text{ainakin yksi punainen})} = 1 - P_{(\text{viisi mustaa})} = 1 - \frac{12}{143} = \frac{131}{143}$$

$$= 0{,}91608\ldots$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}916}}$$ +1p

$$P_{(\text{kaikki saman värisiä})} = P_{(\text{viisi mustaa TAI viisi punaista})}$$

$$= P_{(\text{viisi mustaa})} + P_{(\text{viisi punaista})}$$

$$= \frac{12}{143} + \frac{1}{3003} = \frac{23}{273} = 0{,}084249\ldots$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}084}}$$ +2p

V: ainakin yksi punainen 0,916 todennäköisyys
kaikki saman värisiä 0,084 todennäköisyys

K 08

9

	Hotellikulut	Matkakulut	Pakettiyht.
Alussa	H	M	$H + M$
Muutoksen jälkeen	$0{,}95\,H$	$1{,}18\,M$ 1p	$0{,}95H + 1{,}18\,M$

paketti alussa ja muutoksen jälkeen samanhintainen

eli

$$H + M = 0.95H + 1{,}18\,M \quad + 1p$$

$$H - 0.95\,H = 1{,}18\,M - M$$

$$0{,}05\,H = 0{,}18\,M \quad \Big|: 0{,}05$$

$$H = \frac{0{,}18\,M}{0{,}05} = 3{,}6\,M \quad + 1p$$

matkakustannusten osuus paketista ennen muutosta

$$\frac{M}{M+H} \cdot 100\%$$

$$= \frac{M}{M + 3{,}6\,M} \cdot 100\% = \frac{M}{4{,}6\,M} \cdot 100\% = \frac{1}{4{,}6} \cdot 100\%$$

$$= 21{,}7391\ldots\ \% \quad + 2p$$

$$\approx 21{,}7\ \% \quad + 1p$$

V: Matkakustannukset olivat 21,7 % lomapaketin hinnasta ennen muutosta

K08

10

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

max: $x=0$ $y=-2$
min: $x=2$ $y=1$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

koska $f(0) = -2$
$\Rightarrow$ $a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = -2$
$\underline{\underline{d=-2}}$ 1

koska $f'(0) = 0$
$\Rightarrow$ $3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0$
$\underline{\underline{c=0}}$ +1

sij. d ja c

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 2$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

koska $f(2) = 1$
$\Rightarrow$ $a 2^3 + b 2^2 - 2 = 1$
$8a + 4b - 2 = 1$ +1p
$8a + 4b = 3$

koska $f'(2) = 0$
$\Rightarrow$ $3a2^2 + 2b\cdot 2 = 0$
$3\cdot 4a + 4b = 0$
$12a + 4b = 0$ +1p

$$- \begin{cases} 8a + 4b = 3 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$$

$-4a + 0 = 3$ $\quad |:-4$
$\underline{\underline{a = -\frac{3}{4}}}$ +1p

sij. a
$8a + 4b = 3$
$4b = 3 - 8a$
$4b = 3 - 8\cdot(-\frac{3}{4})$
$4b = 3 + 6$
$4b = 9$ $\quad |:4$
$\underline{\underline{b = \frac{9}{4}}}$ +1p

V: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = 0$, $d = -2$

K 08

11

2006	2007	2008	2009	2010
700	+700 1400	+700 2100	+700 2800	+700 3500

$\longrightarrow$ + korot $\longrightarrow$ + korot $\longrightarrow$ + korot $\longrightarrow$ + korot

MAOL s. 26

$$\boxed{K_n = Kq^n}$$

$$\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$$

$K = 700$ €

$p = 1{,}750$

$$q' = 1 + \frac{1{,}750}{100} = 1{,}0175$$

tilillä rahaa 1. vuoden lopussa $K_1 = Kq'$

2 vuoden lopussa $K_2 = Kq' + Kq'^2 = K(q' + q'^2)$

3 vuoden lopussa $K_3 = Kq' + Kq'^2 + Kq'^3 = K(q' + q'^2 + q'^3)$

n. vuoden lopussa $K_n = Kq' + Kq'^2 + \dots + Kq'^n = K(q' + q'^2 + \dots + q'^n)$

$a_1 = Kq'$

$q = q'$

$n = n$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

MAOL s. 24

kirja s. 30

eli $S_n = 700 \cdot 1{,}0175 \dfrac{1 - 1{,}0175^n}{1 - 1{,}0175}$

2p

Vuoden 2010 lopussa:

$n = 5$

$$S_5 = 700 \cdot 1{,}0175 \frac{1 - 1{,}0175^5}{1 - 1{,}0175} = 3688{,}094\ldots \approx 3688{,}09$$

+ 2p

milloin kertynyt 12 000:

$$S_n = 700 \cdot 1{,}0175 \frac{1 - 1{,}0175^n}{1 - 1{,}0175} = 12000$$

$$712{,}25 \cdot \frac{1 - 1{,}0175^n}{-0{,}0175} = 12000 \quad \Big| : 712{,}25 \quad \cdot -0{,}0175$$

$$1 - 1{,}0175^n = \frac{-0{,}0175}{712{,}25} \cdot 12000$$

K08
11

$$1{,}0175^n = -\frac{0{,}0175}{712{,}25} \cdot 12\,000 - 1$$

$$-1{,}0175^n = -1{,}294802\ldots \quad \Big|\cdot -1 \quad \Big|\ \log$$

$$\boxed{\log x^r = r \log x}$$

HAOL S.23

$$n \log 1{,}0175 = \log 1{,}294802\ldots \quad \Big|:\log 1{,}0175$$

$$n = \frac{\log 1{,}294802\ldots}{\log 1{,}0175}$$

$$n = 14{,}89381\ldots \quad +1p$$

Vuosia kuluu siis 15 (koska korko maksetaan aina vuoden lopussa)

aloittaen 2006 alusta

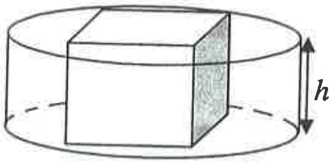
2006 + 15 = 2021 (alkuun mennessä)

eli 2020 vuoden loppuun mennessä
+1p

V: 2010 vuoden lopussa tilillä on rahaa 3688,09 €
12000 on kertynyt vuoden 2020 loppuun mennessä

K 08

12



$d_{allas} = 3{,}5\ m$

$r_{allas} = \frac{3{,}5\ m}{2} = 1{,}75\ m$

$\boxed{V_{lieriö} = Ah}$ MAOL 32.

$\boxed{A = \pi r^2}$ MAOL 31.

$V_{allas} = \pi r^2 h \qquad V_{kuutio} = h^3$

Vesimäärä $v(h) = \pi r^2 h - h^3$ 1p

Tarkasteluväli: $h \geq 0$

$(\frac{1}{2}h)^2 + (\frac{1}{2}h)^2 = r^2$

$\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}h^2 = r^2$

$\frac{1}{2}h^2 = r^2 \quad |\cdot 2$

$h^2 = 2r^2 \quad |\sqrt{\ }$

$h = r\sqrt{2}$

$h \leq r\sqrt{2}$ +1p

Funktion suurin arvo löytyy joko derivaatan nollakohdista tai tarkasteluvälin päätepisteistä

$v'(h) = \pi r^2 - 3h^2$ +1p

$v'(h) = 0$ kun $\pi r^2 - 3h^2 = 0$

$-3h^2 = -\pi r^2 \quad |:-3$

$h^2 = \frac{\pi r^2}{3} \quad |\sqrt{\ }$

$h = \sqrt{\frac{\pi r^2}{3}} = r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ + 1p

$v(0) = \pi r^2 0 - 0^3 = 0$

$v(r\sqrt{2}) = \pi r^2 \cdot r\sqrt{2} - (r\sqrt{2})^3$

$= \pi r^3\sqrt{2} - r^3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}$

$= \pi r^3\sqrt{2} - 2r^3\sqrt{2}$

$= r^3\sqrt{2}(\pi - 2) = 1{,}75^3 \cdot \sqrt{2}(\pi - 2) = 8{,}6924\ldots$ +1p

$v(r\sqrt{\frac{\pi}{3}}) = \pi r^2 \cdot r\sqrt{\frac{\pi}{3}} - (r\sqrt{\frac{\pi}{3}})^3$

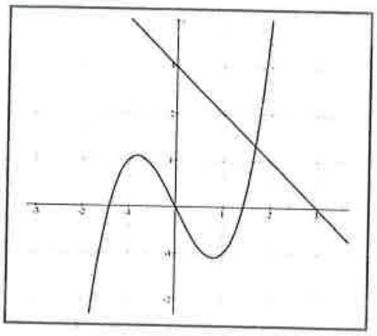
$= \pi r^3\sqrt{\frac{\pi}{3}} - r^3\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{2}{3}\pi r^3\sqrt{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}\pi\, 1{,}75^3\sqrt{\frac{\pi}{3}} = 11{,}4864\ldots$ suurin arvo

$h = r\sqrt{\frac{\pi}{3}} = 1{,}75\sqrt{\frac{\pi}{3}} = 1{,}7908\ldots \approx 1{,}8\ m$ +1p V: veden syvyys 1,8 m

K 08

13



Kuvan piirtämiseksi ääriarvot

$f(x) = x^3 - 2x$

$f'(x) = 3x^2 - 2$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 2 = 0$

$3x^2 = 2 \quad |:3$

$x^2 = \frac{2}{3} \quad | \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0{,}816496$

$y = f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \sqrt{\frac{2}{3}}^3 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} = -1{,}088662..$

$f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = (-\sqrt{\frac{2}{3}})^3 - 2(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = 1{,}088662...$

Ja muutama muu piste

x	$x^3 - 2x = y$
-2	-4
-1,5	-0,375
-1	1
-0,5	0,875
0	0
0,5	-0,875
1	-1
1,5	0,375
2	4

3p

$y = -x + 3$

x	$-x + 3 = y$
0	$0 + 3 = 3$
2	$-2 + 3 = 1$

$x^3 - 2x = -x + 3$

$f(x) = x^3 - x - 3$ + 1p

Haarukoidaan:

x	$x^3 - x - 3$
1.5	$-1{,}125 < 0$
1.8	$1{,}032 > 0$
1.6	$-0{,}504 < 0$
1.7	$0{,}213 > 0$
1.65	$-0{,}157... < 0$

+ 1p

$1.65 < x < 1{,}7$

$x \approx 1{,}7$ + 1p

K 08

14 pääoma $K = 1000$ €

ennen 1.1.05 nettokorkoprosentti (= lähdeveroHuomioitu) 29% : $0{,}71 \cdot 1{,}5\,\% = 1{,}065\,\%$

jälkeen 1.1.05 nettokorkoprosentti (28% lähdevero) : $0{,}72 \cdot 1{,}5\% = 1{,}08\,\%$

näitä vastaavat korkokertoimet

$$\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$$ MAOL s. 26

$$q_1 = 1 + \frac{1{,}065}{100} = 1{,}01065$$

$$q_2 = 1 + \frac{1{,}08}{100} = 1{,}0108$$ 1p

$$\boxed{K_n = K q^n}$$

1.1.2005 kulunut 3 vuotta

$$K_3 = K q_1^3$$

kaksi vuotta myöhemmin

$$K_{(3+2)} = K q_2^2 q_1^3 = 1000 \cdot 1{,}0108^2 \cdot 1{,}01065^3 = 1054{,}709\ldots$$

$$\approx 1054{,}71\,€$$ +2p

Vuoden 2007 rahamäärän arvo vuoden 2002 rahassa:

$$\frac{1548}{1632} = \frac{x}{1054{,}709\ldots} \quad \Big| \cdot 1054{,}709\ldots$$

$$x = \frac{1548}{1632} \cdot 1054{,}709\ldots = 1000{,}4228\ldots$$ +1p

Reaaliarvon kasvaminen

$$\frac{1000{,}4228\ldots - 1000}{1000} \cdot 100\% = 0{,}042286\ldots \approx 0{,}0423\%$$ +1p +1p

V: talletuksen suuruus 1054,71 €
reaaliarvon muutos 0,0423 %

K 08

15 B

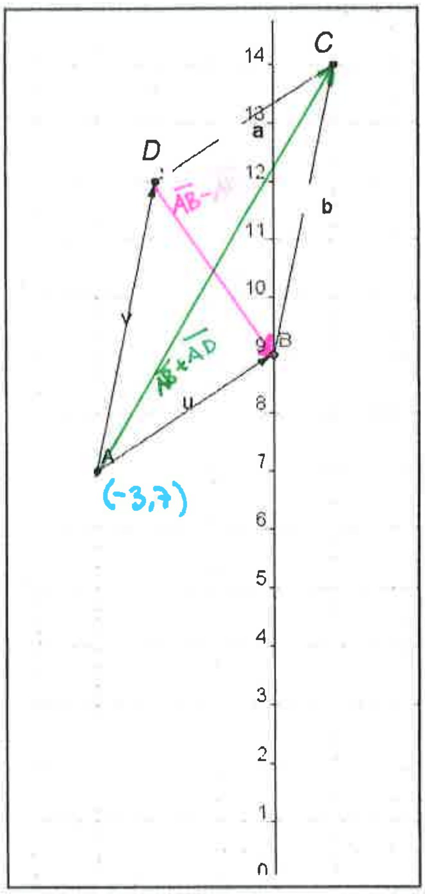
ABCD kärki A $(-3,7)$

$\overrightarrow{AB} = 3\bar{i} + 2\bar{j} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \bar{i} + 5\bar{j} = \overrightarrow{BC}$

MAOL 40–41

Kuva ei välttämätön
(jos paikkavektorit vain kuvasta katsomalla max 4p tehtävästä)



$\boxed{\overrightarrow{OA} = \bar{a}\text{, jos } A = (a_x, a_y, a_z) \quad \bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}}$

$\overrightarrow{OA} = -3\bar{i} + 7\bar{j}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$= -3\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{i} + 2\bar{j} = 9\bar{j}$ 1p

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

$= 9\bar{j} + \bar{i} + 5\bar{j} = \bar{i} + 14\bar{j}$ +1p

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$

$= -3\bar{i} + 7\bar{j} + \bar{i} + 5\bar{j} = -2\bar{i} + 12\bar{j}$ +1p

LÄVISTÄJÄT

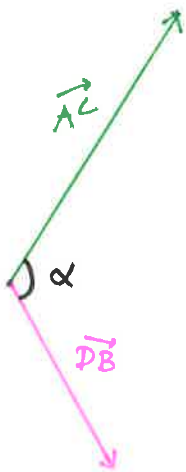
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{i} + 5\bar{j} = 4\bar{i} + 7\bar{j}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$= 3\bar{i} + 2\bar{j} - (\bar{i} + 5\bar{j})$

$= 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{i} - 5\bar{j} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ +1p



$\boxed{\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}}$

$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (4\bar{i} + 7\bar{j}) \cdot (2\bar{i} - 3\bar{j}) = 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) = -13$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\cos\alpha = \dfrac{-13}{\sqrt{65}\sqrt{13}}$ +1p $\left(= \dfrac{-13}{\sqrt{845}} = \dfrac{-13}{\sqrt{169 \cdot 5}} = \dfrac{-13}{\sqrt{169}\sqrt{5}} = \dfrac{-13}{13\sqrt{5}} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \right)$

$(\approx -0{,}447214\ldots)$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right) = 116{,}565\ldots \approx \underline{116{,}6}$ +1p

K08

15

A YKSI OPPILAS:

$$P(\text{opiskelee espanjaa}) = \frac{65}{325} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = p$$

$$P(\text{ei opiskele espanjaa}) = 1 - P(\text{opiskelee espanjaa})$$
$$= 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = q$$

MAOL s. 55

Binomijakauman pistetodennäk.

$$\boxed{P = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

32 OPPILAAN RYHMÄSSÄ 12 OPPILASTA

$n = 32$ $\quad p = 0{,}2$

$k = 12$ $\quad q = 0{,}8$

$$P_{(12\text{ opiskelee})} = \binom{32}{12} \cdot 0{,}2^{12} \cdot 0{,}8^{(32-12)} = 0{,}01066\ldots$$

n oppilasta

$$P_{(n\text{ opiskelee})} = \binom{32}{n} \cdot 0{,}12^{n} \cdot 0{,}8^{(32-n)}$$

MUISTA TAI = + (JA = ·)

$$P_{(\text{korkeintaan 3 opiskelee})} = P_{(0\text{ opiskelee tai 1 opiskelee tai 2 opiskelee tai 3 opiskelee})}$$

$$= P_{(0\text{ opiskelee})} + P_{(1\text{ opiskelee})} + P_{(2\text{ opiskelee})} + P_{(3\text{ opiskelee})}$$

$$= \binom{32}{0} 0{,}2^{0} \cdot 0{,}8^{(32-0)} + \binom{32}{1} 0{,}2^{1} \cdot 0{,}8^{(32-1)} + \binom{32}{2} \cdot 0{,}2^{2} \cdot 0{,}8^{(32-2)} + \binom{32}{3} \cdot 0{,}2^{3} \cdot 0{,}8^{(32-3)}$$

$$= 7{,}92281\ldots \cdot 10^{-4} + 6{,}33825\ldots \cdot 10^{-3} + 0{,}0245607\ldots + 0{,}0614018\ldots$$

$$= 0{,}093093\ldots \approx 0{,}09309$$

$$X \sim Bin\,(32; 0{,}2)$$

$n = 32$

MAOL. s. 55

odotusarvo $\boxed{\mu = np} = 32 \cdot 0{,}2 = 6{,}4$

keskihajonta $\boxed{\sigma = \sqrt{npq}} = \sqrt{32 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 2{,}2627\ldots$

MAOL s. 55

$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma)}$$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

=> normaalijakaumalle $X \sim N(6{,}4; 2{,}262\ldots)$

$P(\text{vähintään 13 opiskelee espanjaa}) \approx P(X \geq 12{,}5) = 1 - P(X < 12{,}5)$

$= 1 - P\left(Z < \frac{12{,}5 - 6{,}4}{2{,}262\ldots}\right) = 1 - P(Z < 2{,}695\ldots)$ JAKAUMATAULUKOSTA: $1 - 0{,}9965 = \underline{0{,}0035}$