K07

1) a)

$$\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{3}{4}x-\frac{3^{(3}}{48}=\frac{3^{(3}}{12}x-\frac{1}{15}$$

$$\frac{3}{4}x-\frac{1}{16}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{15} \qquad 1p$$

$$\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x=-\,{}^{16)}\frac{1}{15}+{}^{15)}\frac{1}{16}$$

$$\frac{2^{(2}}{4}x=-\frac{16}{240}+\frac{15}{240}$$

$$\frac{1}{2}x=-\frac{1}{240}\quad \Big|\cdot 2$$

$$x=-\frac{2^{(2}}{240}=-\frac{1}{120} \qquad +1p$$

V: $x=-\frac{1}{120}$

b)

MAOL s. 22

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$7x(3+7x)-4=0$$

$$21x+49x^2-4=0$$

$$49x^2+21x-4=0$$

$a=49,\ b=21,\ c=-4$

$$x=\frac{-21\pm\sqrt{21^2-4\cdot 49\cdot(-4)}}{2\cdot 49}=\frac{-21\pm\sqrt{441+784}}{98} \qquad +1p$$

$$=\frac{-21\pm\sqrt{1225}}{98}=\frac{-21\pm 35}{98}$$

$$x_1=\frac{-21-35}{98}=\frac{-56}{98}^{(14}=\frac{-4}{7}$$

$$x_2=\frac{-21+35}{98}=\frac{14}{98}^{(14}=\frac{1}{7}$$

V: $x=\frac{-4}{7}$ TAI $x=\frac{1}{7}$ +1p

c) $\dfrac{a(a-1)}{x} + ax \qquad x = a-1$

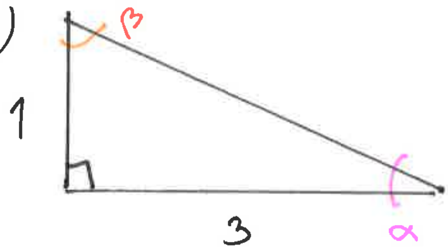
$= \dfrac{a(a-\cancel{1})}{(a\cancel{-}1)} + a(a-1)$

$= a + a^2 - a$ +1p $= a^2$ +1p V: a^2

K07

(2)

a)



MAOL s. 36

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}}$$

$\tan\alpha = \frac{1}{3}$ 1p

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}4349...^\circ \approx 18{,}43^\circ$

$\tan\beta = \frac{3}{1}$

$\beta = \tan^{-1} 3 = 71{,}5650...^\circ \approx 71{,}57^\circ$

V: $\alpha = 18{,}43^\circ$ ja $\beta = 71{,}57^\circ$ + 1p

b)

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{3}$

$f'(x) = x^2 + 3x - 4$ +2p

V: $f'(x) = x^2 + 3x - 4$

c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...$

KIRJA s. 30

$q = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12^{(6}}{18} = \frac{2}{3}$ +1p

MAOL s. 24

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

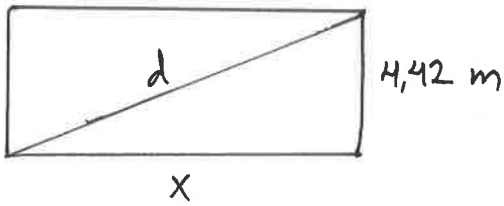
$a_3 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$ + 1p

V: kolmastermi on $\frac{8}{27}$

K07

3

$A = 32{,}20 \text{ m}^2$



MAOL s. 30

$\boxed{A_{\text{suorakulmio}} = \text{kanta} \cdot \text{korkeus}}$

a)

$$4{,}42 \cdot x = 32.20 \quad 1p \quad \big| : 4{,}42$$

$$x = \frac{32.20}{4.42} = 7{,}2850\ldots \overset{+1p}{} \approx 7.29$$

MAOL s. 30

b) $\boxed{\text{Pythagoras} \quad a^2 + b^2 = c^2}$

$$d^2 = x^2 + 4.42^2 \qquad +1p$$

$$d = \sqrt{7{,}2850\ldots^2 + 4.42^2} = 8{,}5210\ldots \approx 8.52 \qquad +1p$$

V: $x \approx 7.29$ m $^{+1p}$ ja $d \approx 8.52$ m $+1p$

jos laatu (m) puuttuu vastauksista $-1p$

jos d:n laskemisessa käytetty pyöristettyä x:n arvoa (7,29) $-1p$

(4) k07

Vuosi	Myyntitulot	Valmistuskustannukset	
2003	a	$0{,}91\,a$	1p
2004	$1{,}05\,a$	$1{,}071 \cdot 0{,}91\,a$	+ 1p
2005	$1{,}03 \cdot 1{,}05\,a$	$1{,}012 \cdot 1{,}071 \cdot 0{,}91\,a$	+ 1p

$$\frac{1{,}03 \cdot 1{,}05\,a}{1{,}012 \cdot 1{,}071 \cdot 0{,}91\,a} = 1{,}09651\ldots \quad + 2p$$

V: $\underline{\underline{9{,}7\ \%}}$ + 1p

Jos a:n tilalla luku $\rightarrow$ $-$ 1p

⑤ k07

MAOL s. 42 MAOL s. 43

a) $\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ $\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$

pisteet (1,2) ja (4,3)

$k = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$ 1p

$y - 2 = \frac{1}{3}(x-1)$ +1p

$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 2$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ +1p V: $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

b) piste (120,40)

sij.

$40 = \frac{1}{3} \cdot 120 + \frac{5}{3}$ +1p

$40 = 41\frac{2}{3}$ ei ole tosi +1p

V: piste ei sijaitse suoralla
+1p

K 07

6

a) $2^x = 1$

MAOL s.18

$x = 0$, koska $2^0 = 1$ 2p

$$\boxed{a^0 = 1}$$

TÄMÄN VOI TODISTAA HALUTESSAAN SEURAAVASTI

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad \square$$

b)

$$2^{x^2-2} = 1$$

$x^2 - 2 = 0$ + 2p

$x^2 = 2 \quad |\sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{2}$ + 2p

jos vastaus vain likiarvona −1p

jos negatiivinen juuri puuttuu −1p

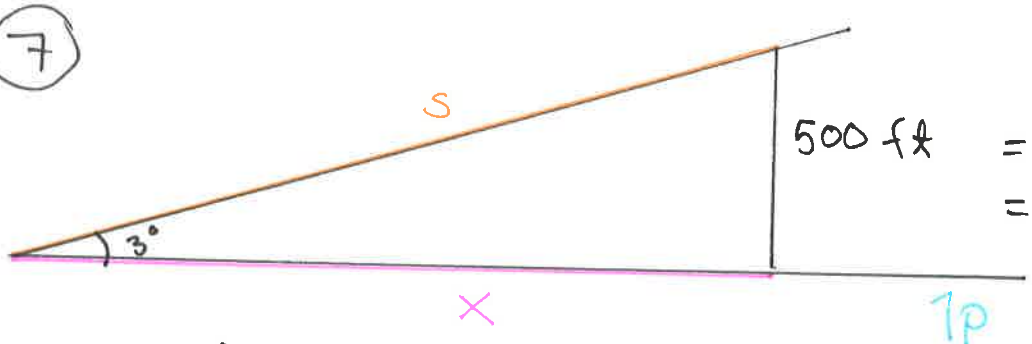
$\log 2^{x^2-2} = \log 1$

$(x^2-2)\cdot\log 2 = \log 1 \quad |:\log 2$

$x^2 - 2 = \dfrac{\log 1}{\log 2} = 0 \qquad x^2 - 2 = 0$

K07

7



$= 500 \cdot 0{,}3048\,m$

$= 152{,}4\ m$

1p

YMAOL s. 36

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\text{vastainen}}{\text{viereinen}}}$$

$$\tan 3^\circ = \frac{152{,}4}{x} \quad +1p$$

$$x = \frac{152{,}4}{\tan 3^\circ} = 2907{,}96523\ldots$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\text{vastainen}}{\text{hypotenuusa}}}$$

$$\sin 3^\circ = \frac{152{,}4}{s}$$

$$s = \frac{152{,}4}{\sin 3^\circ} = 2911{,}95596\ldots \quad +1p$$

etäisyys kiitoradan alkupäästä:

$$x - 300 = 2907{,}96523\ldots$$

$$x = 2607{,}96523\ldots \approx 2608\ m \quad +1p$$

$$v = 270\ km/h = 75\ m/s$$

$$\boxed{v = \frac{s}{t}} \qquad t = \frac{s}{v} \qquad t = \frac{2911{,}95596\ldots\ m}{75\ m/s} = 38{,}8260\ldots\ s$$

$$\approx 39\ s \quad +2p$$

V: etäisyys kiitoradan päästä koneen ollessa 500 ft korkeudessa oli 2608 m ja maakosketukseen kului vielä aikaa 39 s

K07

8

$f(x) = x(3-4x-x^2)$ väli $[-1, 3]$

$f(x) = 3x - 4x^2 - x^3$

$f'(x) = -3x^2 - 8x + 3$ 1p

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ MAOL s. 22

$f'(x) = 0$ kun $-3x^2 - 8x + 3 = 0$

$a = -3 \quad b = -8 \quad c = 3$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3}}{2(-3)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{-6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{-6} = \frac{8 \pm 10}{-6}$$

$x_1 = \frac{8+10}{-6} = \frac{18}{-6} = -3$ EI KUULU TARKASTELUVÄLILLE (jos ei mainittu −1p)

$x_2 = \frac{8-10}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$ +1p

Funktion suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välille sattuvista derivaatan nollakohdista

$f(-1) = 3 \cdot (-1) - 4(-1)^2 - (-1)^3 = -3 - 4 + 3 = \underline{\underline{-4}}$

$f(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 4(\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3})^3 = 1 - 4 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = 1 - {}^{3)}\frac{4}{9} - \frac{1}{27}$

$= \frac{27}{27} - \frac{12}{27} - \frac{1}{27} = \underline{\underline{\frac{14}{27}}}$

$f(3) = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2 - 3^3 = 9 - 36 - 27 = \underline{\underline{-54}}$ + 2p

V: maksimi $f(\frac{1}{3}) = \frac{14}{27}$, minimi $f(3) = -54$ +2p

K07

(9)

Lauran ikä 20 v, Veeran ikä x v

$1{,}25x = 20 \quad | : 1{,}25$

$x = 16$ 2p

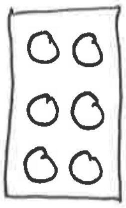
Laura 30 eli 30 − 20 = 10 vuotta vanhempi.
tällöin Veera on 16 + 10 = 26 vuotta. +1p

$\frac{30}{26} = 1{,}15384...$ +1p

Laura on siis 15,4 % vanhempi kuin Veera
+2p

k07

10



Kussakin paikassa kaksi vaihtoehtoa: piste tai ei pistettä

paikkoja on yhteensä 6.

Kaikkiaan eri vaihtoehtoja on olemassa 2^6 kpl, mutta koska ei yhtään pistettä vaihtoehtoa ei oteta huomioon saadaan

$$2^6 - 1 = 63$$

6p

jos −1 puuttuu ⇒ −2p

TAI

MAOL s. 54

n-alkioisesta joukosta voidaan muodostaa k-alkioisia osajoukkoja eli kombinaatioita

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \text{ kpl}$$

(Saadaan suoraan laskimesta: nCr)

Mahdolliset osajoukot voivat koostua 6, 5, 4, 3, 2 tai 1 alkiosta (nolla ei kelpaa)

$$\binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} = 63$$

6p

puutteelliset perustelut −2p

K07

11

a) 1. lääkkeen oton jälkeen 60 mg, josta häviää vuorokaudessa 35% eli jäljelle jää 65% josta prosenttikerroin $q = 0.65$

2. lääkkeen oton jälkeen

$$0.65 \cdot 60 + 60 = 60(0,65+1) = 99$$ 1p

3. lääkkeen oton jälkeen

$$60(0,65^2 + 0,65 + 1)$$

4. lääkkeen oton jälkeen

$$60(0,65^3 + 0,65^2 + 0,65 + 1)$$

5. lääkkeen oton jälkeen

$$60(0,65^4 + 0,65^3 + 0,65^2 + 0,65 + 1) = 151,537855...$$

+1p

V: 2. lääkkeen oton jälkeen 99 mg
5. lääkkeen oton jälkeen 151,5 mg

b) Kyseessä on geometrinen lukujono MAOL s. 24

$$\boxed{a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, (q \neq 1)}$$

n:n lääkkeen oton jälkeen

$$\frac{60(1-0.65^n)}{1-0.65} = \frac{60}{0,35}(1-0.65^n)$$ +1p +1p

$$= 171,428571...(1-0,65^n)$$

V: n:n lääkkeen oton jälkeen $171,4285...(1-0,65^n)$ mg

c) Mitä korkeampaan potenssiin n korottaa 0,65:sta sitä pienemmäksi arvo muuttuu, joten sulkulausekkeen arvo lähenee yhtä ja lääkkeen määrä n:n kasvaessa lähenee 171,4 mg

+2p

k07

12

$y = ax^2 + bx - 3$ huippupiste $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

$y' = 2ax + b$ 1p

Paraabelin huippupiste on derivaatan nollakohdassa

$2ax + b = 0$ sij. tähän x:n arvo $\frac{3}{2}$

$\cancel{2}a \cdot \frac{3}{\cancel{2}} + b = 0$

$3a + b = 0$ +1p

$b = -3a$

paraabeli $y = ax^2 + bx - 3$ kulkee pisteen $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ kautta

sijoitetaan x ja y koordinaatit paraabelin yhtälöön

$a\left(\frac{3}{2}\right)^2 + b\left(\frac{3}{2}\right) - 3 = 1$ sij. $b = -3a$

$a\frac{3^2}{2^2} + (-3a)\frac{3}{2} - 3 = 1$

$\frac{9}{4}a - \frac{9}{2}a - 3 = 1$ +1p

$-\frac{9}{4}a = 4 \quad \Big| : -\frac{9}{4}$

$a = \frac{-16}{9}$

$b = -3a = -3 \cdot \left(-\frac{16}{9}\right) = \frac{16}{3}$

V: $a = \frac{-16}{9}$ ja $b = \frac{16}{3}$ + 3p

K07

13

1 tuuma = 25,40 mm

a)

$d = 26.0$ tuumaa $= 26.0 \cdot 25.40\ \text{mm} = 660,4\ \text{mm}$

MAOL s. 31

$\boxed{\text{Kehänpituus} = 2\pi r}$ $d = 2r$

$L_0 =$ kehän pituus $= \pi d = \pi \cdot 660,4\ \text{mm} = 2074,707\ldots\ \text{mm} \approx 2,075\ \text{m}$

2p

b) $L = 209,5\ \text{cm} = 2,095\ \text{m}$ (syötetty virheellinen kehän pituus)

rengas pyörähtää 20 km matkalla

$$\frac{20000\ \text{m}}{2,074707\ldots\ \text{m}} = 9639,9117\ldots \text{ kertaa}$$

+1p

millä perusteella mittari laskee matkaa kuluneen

$9639,9117\ldots \cdot 2.095\ \text{m} = 20195,615\ldots\ \text{m} \approx 20,196\ \text{km}$

+1p

polkupyörän todellinen nopeus mittarin näyttäessä 30 km/h

$$\frac{2,074707\ldots}{2.095} \cdot 30\ \text{km/h} = 29,7094\ldots\ \text{km/h} \approx 29,71\ \text{km/h}$$

+2p

V: kehän pituus 2.075 m
matka 20,196 km
nopeus 29,71 km/h

K07
14

	(-4)	-3	(0)	1	(2)
$V'(x)$	$-$		$+$		$-$
$V(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
				MAX	

+1p

$V'(x) = \pi(-x^2 + 2x + 3)$

$V'(-4) = \pi(-(-4)^2 - 2\cdot(-4) + 3) = -5\pi < 0$ kulkukaavioon $-$

$V'(0) = \pi(-0^2 - 2\cdot 0 + 3) = 3\pi > 0$ $+$

$V'(2) = \pi(-(2)^2 - 2\cdot 2 + 3) = -5\pi < 0$ $-$

Maksimikohdaksi saadaan $x = 1$

$V(x) = \frac{1}{3}\pi(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)$

$V(1) = \frac{1}{3}\pi(-1^3 - 3\cdot 1^2 + 9\cdot 1 + 27) = \frac{1}{3}\pi \cdot 32 = \frac{32\pi}{3} = 33{,}5103\ldots$

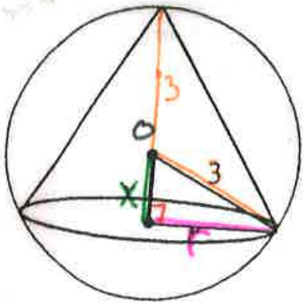
$\approx 33{,}51$ +1p

V: $\frac{32\pi}{3} \approx 33{,}51$

k 07

(14)

O on pallon keskipiste, pallon säde 3



x on kartion pohjan etäisyys ympyrän keskipisteestä

r on kartion pohjaympyrän säde

kartionkorkeus:

$h = 3 + x$

MAOL s. 36

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

pohjaympyränsäde:

$x^2 + r^2 = 3^2$

$r^2 = 3^2 - x^2$

$r = \sqrt{9 - x^2}$

Ympyräkartiolle:

$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

MAOL s. 32

$V(x) = \frac{1}{3}\pi \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 (3+x)$ 1p

$= \frac{1}{3}\pi (9 - x^2)(3+x) = \frac{1}{3}\pi (9 \cdot 3 + 9 \cdot x - x^2 \cdot 3 - x^2 \cdot x)$

$= \frac{1}{3}\pi (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)$

$= \pi \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 9\right)$

"Ääriarvopiste löytyy derivaatan nolla kohdasta!"

$V'(x) = \pi(-x^2 - 2x + 3)$ + 2p

$V'(x) = 0$ kun $-x^2 - 2x + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$

MAOL s. 22

$ax^2 + bx + c = 0$

$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

$x_1 = \frac{-6}{2} = -3$ (periaatteessa tämä ei kelpaa, etäisyys ei voi olla <0)

$x_2 = \frac{2}{2} = 1$ + 1p

K07

15

a) $K = 1200$ €

1. vuosi − 15,6 % $q_1 = 1 + \frac{(-15,6)}{100} = 0,844$

2. vuosi + 8,1 % $q_2 = 1,081$

3. vuosi q_3

$\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$ MAOL s. 26

$q_3 \cdot q_2 \cdot q_1 \cdot K = K$ 1p (voi käyttää myös lukuarvoja)

$q_3 = \frac{K}{q_2 \cdot q_1 \cdot K} = \frac{1}{q_2 \cdot q_1} = \frac{1}{0,844 \cdot 1,081} = 1,096053\ldots$ +1p

$p = (q-1) \cdot 100$ $(1,096053\ldots - 1)\,100 = 9,605\ldots \approx 9,6\,\%$ +1p

b) $P(x \geq 9,605\ldots)$ $\mu = 7,\ \sigma = 5$

eli todennäköisyys sille, että 3 vuonna kurssinousu on sellainen, että osakkeiden arvo on vähintään 1200 €.

$$\boxed{\begin{aligned} &X \sim N(\mu, \sigma) \\ &Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \end{aligned}}$$

MAOL s. 55

KATSO ESIM 3. MAOL s. 63 !

Koska normaalijakaumataulukosta voidaan katsoa $X \leq$ joku arvo

$P(x \geq 9,605) = 1 - P(x \leq 9,605) \overset{+1p}{=} 1 - P(z \leq 0,521)$

$\left[z = \frac{9,605-7}{5} = 0,521 \right]$ +1p

$= 1 - \Phi(0,521)$

$= 1 - 0,6985$

$= 0,3015$

Normaalijakaumataulukosta: $\Phi(0,52) = 0,6985$

MAOL s. 63

$\Rightarrow$ 30 % +1p

V: a) kurssin noustava 9,6 %

b) todennäköisyys on 30 %