

Lyhyt matematiikka 29.9.2006, ratkaisut:

1. a) $x + 2(4 + x) = -1 \iff 3x = -9 \iff x = -3$.
b) Kertomalla $3x$:llä ja sieventämällä saadaan yhtälö muotoon $2x^2 - 13x - 15 = 0$.
Sen ratkaisu on $x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 + 4 \cdot 2 \cdot 15}}{2} = \frac{13 \pm 17}{2}$ eli $x = \frac{15}{2}$ tai $x = -1$.
Vastaus: a) Ratkaisu on $x = -3$. b) Ratkaisut ovat $x = \frac{15}{2}$ ja $x = -1$.
2. a) Suoran kulmakerroin on $\frac{6+1}{2-1} = 7$. Suoran yhtälö on $y+1 = 7(x-1)$ eli $y = 7x - 8$.
b) Janan AB pituus on $\sqrt{(6+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
c) Keskipiste on $(\frac{2+1}{2}, \frac{6-1}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.
Vastaus: a) $y = 7x - 8$, b) $5\sqrt{2}$, c) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.
3. Jos 0,35-prosenttista liuosta on 500 ml, on siinä desinfektioainetta $0,0035 \cdot 500 = 1,75$ ml. Jos tarvittava määrä 2-prosenttista liuosta on x ml, on $0,02x = 1,75$, josta ratkeaa $x = 87,5$.
Vastaus: 87,5 ml.
4. a) Molemmat toimivat todennäköisyydellä $0,98 \cdot 0,85 = 0,833$.
b) Vain toinen toimii todennäköisyydellä $0,98 \cdot (1 - 0,85) + 0,85 \cdot (1 - 0,98) = 0,164$.
c) Kumpikaan ei toimi todennäköisyydellä $(1 - 0,98)(1 - 0,85) = 0,003$
Vastaus: a) 0,833, b) 0,164, c) 0,003.
5. Olkoon tikkaiden alapää kohdassa A ja yläpää seinällä kohdassa B ja olkoon C seinän kohta, joka on samalla tasolla kuin A . Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on $AB = 5$ m ja $AC = 1,5$ m. Jos $BC = y$ m, on $y^2 = 5^2 - 1,5^2$, josta $y = \sqrt{22,75} \approx 4,7697$. Jos tikkaiden uusi pituus on x m, on $x^2 = 1,5^2 + (1 + \sqrt{22,75})^2 = 26 + 2\sqrt{22,75}$, josta $x \approx 5,9615$. Tarvittava pidennys on $5 - x \approx 0,9615$ m.
Vastaus: 96 cm.
6. Sisälämpötilan 22° ja ulkolämpötilan -2° erotus on 24° . Kun sisälämpötila pudoteetaan 21 asteeseen tulee erotukseksi ulkolämpötilaan 23° . Jos lämmityskustannukset ovat aluksi a ja lopuksi b , on $\frac{b}{a} = \frac{23}{24} = (1 - \frac{1}{24}) \approx (1 - \frac{4,167}{100})$. Näin ollen lämmityskustannukset ovat pienentyneet 4,167 prosenttia.
Vastaus: 4,2 %.
7. Jos kouluun oli matkaa s km, oli Lauran tavallinen nopeus koulumatkalla $v = \frac{s}{15} \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Kyseisenä kertana Laura kulki 95 % matkasta ajassa $15 - 6 = 9$ min. Tällöin hänen nopeutensa oli ollut $v_2 = \frac{0,95s}{9} \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Nopeuksien suhde on $\frac{v_2}{v} = \frac{0,95s}{9} \cdot \frac{15}{s} = \frac{4,75}{3} \approx 1,5833$. Näin ollen Lauran nopeus oli tällä kertaa ollut 58,33 % tavallista suurempi.
Vastaus: 58 %.

8. Kolmion toinen terävä kulma on $90^\circ - 64,5^\circ = 25,5^\circ$ eli on pienempi kuin $64,5^\circ$. Näin ollen kolmio pyörähtää kulmaa $64,5^\circ$ vastaavan kateetin ympäri. Syntyneen kartion korkeus h on pitemmän kateetin pituus ja säde r lyhyemmän kateetin pituus. Kartion sivujana on kolmion hypotenuusa. Näin ollen $h = 12,4 \sin 64,5^\circ \approx 11,1921$ cm ja $r = 12,4 \cos 64,5^\circ \approx 5,3383$ cm. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \approx 334,0032$ cm³ ja vaipan ala $A = \pi r s \approx 207,9589$ cm².

Vastaus: Kartion tilavuus on 334,0 cm³ ja vaipan ala 208,0 cm².

9. a) Funktion $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 9x = 3x(x - 3)$. Derivaatta on nolla, kun $x = 0$ tai $x = 3$. Koska $f(-1) = 0$, $f(0) = \frac{11}{2}$, $f(3) = -8$ ja $f(4) = -\frac{5}{2}$, on funktion suurin arvo $f(0)$ ja pienin $f(3)$.

b) Tangentin kulmakerroin $k(x) = f'(x) = 3x^2 - 9x$. Sen derivaatta on $k'(x) = 6x - 9$. Derivaatta on nolla, kun $x = \frac{3}{2}$. Koska $k(-1) = 12$, $k(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{4}$ ja $k(4) = 12$, on kulmakertoimen suurin arvo $k(-1) = k(4)$ ja pienin $k(\frac{3}{2})$.

Vastaus: a) Suurin arvo on $f(0) = \frac{11}{2}$ ja pienin $f(3) = -8$. b) Suurin arvo on $f'(-1) = f'(4) = 12$ ja pienin $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{4}$.

10. Koska polynomien kuvaaja kulkee origon kautta, on $0 = y(0) = c$. Koska kuvaaja kulkee pisteiden $(1, 2)$ ja $(4, 3)$ kautta, saadaan kertoimille a ja b yhtälöt $a + b = 2$ ja $16a + 4b = 3$. Näistä saadaan $12a = -5$ eli $a = -\frac{5}{12}$ ja $b = 2 - a = \frac{29}{12}$. Polynomi on siis $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{29}{12}x$. Polynomien derivaatta on $y' = -\frac{10}{12}x + \frac{29}{12}$. Derivaatan arvo kohdassa $x = 2$ on $y'(2) = -\frac{10}{12} \cdot 2 + \frac{29}{12} = \frac{3}{4}$.

Vastaus: $y = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{29}{12}x$ ja $y'(2) = \frac{3}{4}$.

11. a) Erilaisia istumajärjestyksiä on $30! \approx 2,65 \cdot 10^{32}$.

b) Kolme tyhjää pulpettia voidaan valita $\binom{30}{3} = 4060$ eri tavalla. Istumajärjestyksiä tässä luokassa on $\frac{1}{6} \cdot 30! \approx 4,42 \cdot 10^{31}$.

c) Tietokoneelta kuluu istumajärjestyksiin $\frac{30!}{10^{12} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365,25} \approx 8,4 \cdot 10^{12}$ vuotta.

Vastaus: a) $2,65 \cdot 10^{32}$ järjestystä, b) 4060 tavalla, $4,42 \cdot 10^{31}$ järjestystä, c) $8,4 \cdot 10^{12}$ vuotta.

12. Olkoon $q = 1 - \frac{0,043}{100} = 0,99957$. Jos ainetta on aluksi a , on sitä vuoden päästä qa , kahden vuoden q^2a ja n vuoden päästä $q^n a$. Jos n on puoliintumisaika, on $q^n a = 0,5a$ eli $q^n = 0,5$. Tästä saadaan $n \log q = \log 0,5$, joten $n = \frac{\log 0,5}{q} \approx 1611,62$.

Vastaus: 1610 vuotta.

13. Jos tuotteen hinta oli alunperin h , oli se p % korotuksen jälkeen $(1 + \frac{p}{100})h$. Tuotteen hinta oli $2p$ % suuruisen alennuksen jälkeen $(1 - \frac{2p}{100})(1 + \frac{p}{100})h$. Tästä saadaan p :lle yhtälö $(1 - \frac{2p}{100})(1 + \frac{p}{100})h = (1 - \frac{5,5}{100})h$. Sievennyksen jälkeen yhtälö saadaan muotoon $\frac{2}{100}p^2 + p - 5,5 = 0$ eli $p^2 + 50p - 275 = 0$. Tämän ratkaisu on

$p = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 275}}{2} = \frac{-50 \pm 60}{2}$ eli $p = -55$ tai $p = 5$. Ratkaisuista vain jälkimmäinen toteuttaa tehtävän ehdot.

Vastaus: $p = 5$.

14. Olkoon $p = 1,5$ ja $q = 1 + \frac{1,5}{100} = 1,015$. Joka toinen kuukausi tapahtuva 7 euron talletus tuottaa vuodessa korkoa $\frac{7p}{100} \cdot \frac{1}{12}(12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = \frac{7p \cdot 42}{1200} = 0,37$ euroa. Vuoden jälkeen tilillä on rahaa $a = 6 \cdot 7 + 0,37 = 42,37$ euroa. Kahden vuoden jälkeen tilillä on rahaa $a + qa$ euroa, kolmen vuoden jälkeen $a + qa + q^2a$ euroa ja lopulta 40 vuoden jälkeen $a + qa + q^2a + \dots + q^{39}a$ euroa. Kyseessä on geometrinen sarja, jonka summa on $a \frac{1 - q^{40}}{1 - q} = 2299,33$ euroa.

Vastaus: 2299,33 euroa.

15. a) Nopeuden keskiarvon 95 % luottamusväli on $[\bar{x} - 1,96 \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 1,96 \frac{s}{\sqrt{n}}]$. Sijoittamalla siihen $n = 4190$, $\bar{x} = 97,75$ ja $s = 10,70$ saadaan väliksi $[97,4260; 98,0740]$.
- b) Nopeudet v noudattavat jakaumaa $N(97,75; 10,70)$, missä yksikkönä on km/h. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0, 1)$ muunnoksella $z = \frac{v - 97,75}{10,70}$, $z_0 = \frac{90 - 97,75}{10,70} \approx -0,72430$. Todennäköisyys ylittää 90 km/h on $\Phi(-z_0) \approx \Phi(0,7243) \approx 0,7655$. Näin ollen voidaan arvioida, että seuraavista tuhannesta ajoneuvosta 766 ylittää nopeuden 90 km/h.

Vastaus: a) $[97,426; 98,074]$. b) Noin 766.