Lyhyt matematiikka 24.3.2006, ratkaisut:

1. a) $20x^2 - 49x + 9 = 0$, kun $x = \dfrac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 20 \cdot 9}}{40} = \dfrac{49 \pm 41}{40}$ eli $x = \frac{9}{4}$ tai $x = \frac{1}{5}$.

   b) Kertomalla kuudella saadaan yhtälö muotoon $2x+4 = 3x$, jonka ratkaisu on $x = 4$.

   Vastaus: **a)** Ratkaisut ovat $x = \frac{9}{4}$ ja $x = \frac{1}{5}$. **b)** Ratkaisu on $x = 4$.

2. a) $\dfrac{x^2}{3x} + \dfrac{2(1-x)}{6} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{x+1-x}{3} = \dfrac{1}{3}$.

   b) $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2-4} = \dfrac{x^2-4}{x^2-4} = 1$.

   c) $\dfrac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7} = x^{3+n+4+n-7} = x^{2n}$.

3. a) Kolmiosta ADE saadaan neliön sivun pituudelle x yhtälö $x^2 + 1 = 3^2$ eli $x^2 = 8$, jonka ratkaisu on $x = 2\sqrt{2}$.

   b) Neliön pinta-ala on $x^2 = 8$.

   c) Kolmiosta ABD saadaan neliön lävistäjän pituudelle d yhtälö $d^2 = 8 + 8$, jonka ratkaisu on $d = 4$.

   Vastaus: **a)** $2\sqrt{2}$, **b)** 8, **c)** 4.

4. Kappaleen painon lauseke on $m = \dfrac{a}{r^2}$, missä r on etäisyys maan keskipisteestä ja a verrannollisuuskerroin. Lentokoneen painosta maan pinnalla saadaan $56 = \dfrac{a}{6370^2}$, josta ratkeaa $a = 56 \cdot 6370^2$. Koneen painoksi 10 kilometrin korkeudessa saadaan siten $m_{10} = \dfrac{56 \cdot 6370^2}{(6370+10)^2} \approx 55{,}8246$.

   Vastaus: 55,8 tonnia.

5. Jos kokonaisvienti vuonna 2003 oli $100a$, oli puu- ja paperiteollisuuden vienti $25{,}4a$. Vuonna 2004 se oli $1{,}136 \cdot 25{,}4a = 28{,}854a$. Vastavasti saadaan vuoden 2004 muut vientimäärät oheiseen taulukkoon.

Toimiala	Määrä 2003	Kerroin	Määrä 2004	Jakauma 2004 (%)
Puu- ja paperiteollisuus	$25{,}4a$	1,136	$28{,}854a$	27,3
Kemianteollisuus	$8{,}7a$	1,044	$9{,}083a$	8,6
Kone- ja metalliteollisuus	$25{,}1a$	0,956	$23{,}996a$	22,7
Sähkötekninen teollisuus	$24{,}3a$	1,019	$24{,}762a$	23,4
Muut	$16{,}5a$	1,146	$18{,}909a$	17,9
Vienti yhteensä	$100a$		$105{,}604a$	100

   a) Yhteensä saadaan vuoden 2004 kokonaisvienniksi $105{,}603a$. Se on kasvanut edellisestä vuodesta 5,6 %.

   b) Käyttäen vuoden 2004 kokonaisvientiä kantalukuna saadaan viennin prosentuaalinen jakauma toimialoittain viimeiseen sarakkeeseen.

6. Moottoritien pituus on 75 km - 28 km = 47 km. Jos keskinopeus siellä oli x km/h, on $\frac{28}{80}+\frac{47}{x}=\frac{75}{100}$ eli $(\frac{75}{100}-\frac{28}{80})x=47$ eli $0{,}4x=47$, jonka ratkaisu on $x=117{,}5$.
Vastaus: 117,5 km/h.

7. Funktion $f(x)=x^3-27x+2$ derivaatta $f'(x)=3x^2-27$. $f'(x)=0$, kun $x=\pm 3$. Koska f':n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, on $f'(x)>0$, kun $x<-3$ tai $x>3$ ja $f'(x)<0$, kun $-3<x<3$.
Vastaus: Funktio $f(x)$ on kasvava, kun $x<-3$ tai $x>3$ ja vähenevä, kun $-3\leq x\leq 3$.

8. **a)** Olkoon a päästömäärä alussa ja p tavoiteltu vähennysprosentti sekä $q=1-\frac{1}{100}p$. Tällöin $q^4a=0{,}8a$, josta $q=\sqrt[4]{0{,}8}$ ja edelleen $p=100(1-\sqrt[4]{0{,}8})\approx 5{,}4258$.

b) Jos kysytty vuosimäärä on n, on oltava $(\sqrt[4]{0{,}8})^n a\leq 0{,}5a$. Ottamalla logaritmit saadaan $n\log\sqrt[4]{0{,}8}\leq\log 0{,}5$, josta $n\geq\dfrac{\log 0{,}5}{\log\sqrt[4]{0{,}8}}\approx 12{,}425$.

Vastaus: **a)** 5,4 %, **b)** 13 vuoden kuluttua.

9. **a)** Binomitodennäköisyyden kaavan mukaan täsmälleen kahden kuutosen todennäköisyys on $\binom{5}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3\approx 0{,}160751$.

b) Vastaavasti saadaan enintään yhden kuutosen todennäköisyydeksi $\binom{5}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^5+\binom{5}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^4\approx 0{,}803755$. Kysytty vähintään kahden kuutosen tapaus on tämän komplementtitapaus. Sen todennäköisyys on $1-0{,}803755=0{,}196245$.
Vastaus: **a)** 0,1608, **b)** 0,1962.

10. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\dfrac{-1+2}{6-1}=\dfrac{1}{5}$, joten suoran yhtälö on $y+2=\frac{1}{5}(x-1)$ eli $x-5y-11=0$. Pisteen D etäisyys A:n ja B:n kautta kulkevasta suorasta on $d=\dfrac{|2-5-11|}{\sqrt{1+25}}=\dfrac{14}{\sqrt{26}}$. Tämä on samalla suunnikkaan korkeusjanan DE pituus. Suunnikkaan kannan pituus $AB=\sqrt{(6-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{26}$. Suunnikkaan ala on $AB\cdot d=14$. Pisteessä A olevan kulman α suuruus saadaan kolmiosta ADE, jossa $AD=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$ ja $DE=d$. Näin ollen $\sin\alpha=\dfrac{14}{\sqrt{10}\sqrt{26}}\approx 0{,}8682431$, josta $\alpha\approx 60{,}2551^\circ$. Tämä on samalla C:ssä olevan kulman suuruus. Muut kaksi kulmaa ovat suuruudeltaan $180^0-\alpha\approx 119{,}7449^\circ$.
Vastaus: Pinta-ala on 14 sekä kulmat A ja C 60,3° sekä B ja D 119,7°.

11. Aritmeettisen jonon $a_1, a_2, ..., a_n$ termit ovat muotoa $a_2=a_1+d$, $a_3=a_1+2d, ..., a_n=a_1+(n-1)d$. Nyt $d=a_2-a_1=7-\frac{3}{2}=5{,}5$. Edelleen $117=a_n=\frac{3}{2}+(n-1)5{,}5$, josta saadaan, että $n=22$. Aritmeettisen jonon summa on siten $n\frac{1}{2}(a_1+a_n)=22\cdot\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+117)=1303{,}5$.
Vastaus: 1303,5.

12. $(x+y)^2 = x^2 + y^2 \iff x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 \iff xy = 0$. Viimeinen yhtälö toteutuu, jos $x = 0$ tai $y = 0$ (tai molemmat ovat nolla).
$(x-y)^2 = x^2 - y^2 \iff x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - y^2 \iff 2y^2 - 2xy = 0 \iff y(y-x) = 0$. Tämä toteutuu, jos $y = 0$ tai $y = x$. Näin ollen esimerkiksi lukupari $x = 1$, $y = 1$ toteuttaa jälkimmäisen kaavan, muttei edellistä, koska kumpikaan ei ole nolla.

13. Jos kartion korkeus on h cm ja pohjaympyrän säde r cm, on $h + 2r = 18{,}6$ eli $h = 18{,}6 - 2r$. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2(18{,}6 - 2r) = \frac{1}{3}\pi(18{,}6r^2 - 2r^3)$. Tilavuuden $V(r)$ derivaatta $V'(r) = \frac{1}{3}\pi(37{,}2r - 6r^2) = 0$, kun $r = 0$ tai $37{,}2 - 6r = 0$ eli $r = 6{,}2$. Arvo $r = 0$ ei tule kysymykseen. Koska $V'(r)$:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on $V'(r) > 0$, kun $0 < r < 6{,}2$ ja $V'(r) < 0$, kun $r > 6{,}2$. Näin ollen $r = 6{,}2$ antaa tilavuuden suurimman arvon, joka on $V(6{,}2) = \frac{1}{3}\pi 6{,}2^2(18{,}6 - 2\cdot 6{,}2) \approx 249{,}576$.
Vastaus: Kun säde on 6,2 cm, saadaan suurin tilavuus 249,6 cm^3.

14. Puolivuotislainan annuiteetin kaava on $A = Kq^n\dfrac{1-q}{1-q^n}$, missä $K = 120\,000$ euroa, $q = 1 + \frac{1}{200}3{,}70 = 1{,}0185$ korkotekijä ja n hoitomaksujen määrä.
a) Nyt $n = 44$ ja $A = 120\,000 \cdot 1{,}0185^{44}\dfrac{0{,}0185}{1{,}0185^{44} - 1} \approx 4010{,}044$.
b) Nyt $n = 120$. Sijoittamalla se em. kaavaan arvon 44 tilalle saadaan $A \approx 2496{,}72$. Kun edellinen laina on maksettu loppuun 22 vuoden kuluttua, saadaan jälkimmäisen jäljellä oleva määrä kaavasta
$V = 120\,000 \cdot 1{,}0185^{44} - 2496{,}72\dfrac{1 - 1{,}0185^{44}}{1 - 1{,}0185} \approx 101\,449{,}39$
Vastaus: Annuiteetti on **a)** 4010,04 euroa **b)** 2496,72 euroa. Edellisen loputtua on jälkimmäistä jäljellä 101 449,39 euroa.

15. Ilpon säädöllä leikkauskohta x noudattaa normaalijakaumaa $N(2000; 0{,}19)$. Tällöin $z = \dfrac{x - 2000}{0{,}19}$ noudattaa normitettua normaalijakaumaa $N(0,1)$. Hyväksyttävien profiilien todennäköisyys on
$P(1999{,}6 < x < 2000{,}4) = P(\dfrac{1999{,}6 - 2000}{0{,}19} < z < \dfrac{2000{,}4 - 2000}{0{,}19}) =$
$P(-2{,}105 < z < 2{,}105) = 2\Phi(2{,}105) - 1 = 2 \cdot 0{,}9824 - 1 = 0{,}9648$.
Hukkakappaleiden todennäköisyys on siten Ilpolla $1 - 0{,}9648 = 0{,}0352$.
Vastaavasti Anteron säädöllä leikkauskohta $x \sim N(2000; 0{,}24)$ ja $z = \dfrac{x - 2000}{0{,}24} \sim N(0,1)$. Hyväksyttävien profiilien todennäköisyys on
$P(1999{,}6 < x < 2000{,}4) = P(\dfrac{1999{,}6 - 2000}{0{,}24} < z < \dfrac{2000{,}4 - 2000}{0{,}24}) =$
$P(-1{,}667 < z < 1{,}667) = 2\Phi(1{,}667) - 1 = 2 \cdot 0{,}9522 - 1 = 0{,}9044$.
Hukkakappaleiden todennäköisyys on Anterolla $1 - 0{,}9044 = 0{,}0956$.
Anteron säädöillä hukkakappaleita tulee enemmän luvun ollessa prosenteissa
$100 \cdot \dfrac{0{,}0956 - 0{,}0352}{0{,}0352} \approx 171{,}6$.
Vastaus: Anteron säädöillä tulee keskimäärin 172 % enemmän hukkakkappaleita.