

**Lyhyt matematiikka 30.3.2005, ratkaisut:**

- a) Yhtälö  $3x + 2 = x - 4(5x - 1)$  sievennyy muotoon  $22x = 2$ . Ratkaisu on  $x = \frac{1}{11}$ .

b) Kertomalla puolittain 30:llä saadaan yhtälö muotoon  $3x + 2x = 30x + 30$  eli  $25x = -30$ . Tämän ratkaisu on  $x = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5}$ .

Vastaus: a)  $x = \frac{1}{11}$ , b)  $x = -\frac{6}{5}$ .
- Pythagoraan lauseen mukaan  $x^2 + (3x + 3)^2 = 25^2$ . Tämä on toisen asteen yhtälö  $10x^2 + 18x - 616 = 0$ . Sen ratkaisu on  $x = \frac{1}{20}(-18 \pm \sqrt{324 + 24640}) = \frac{1}{20}(-18 \pm 158)$  eli  $x = -8,8$  tai  $x = 7$ . Koska kateetin pituus on positiivinen, vain jälkimmäinen ratkaisu kelpaa. Toisen kateetin pituus on  $3x + 3 = 24$ . Vastaus: 7 ja 24.
- Yhdentoista ensimmäisen kuukauden menot ovat  $11 \cdot 1651,20 = 18163,20$ , joten koko vuoden menojen kuukausikeskiarvo on  $\frac{1}{12}(18163,20 + 1814,88) = 1664,84$ . Vastaus: 1664,84 euroa.
- a) Anestusnopeus 75 kg potilaalle on 750  $\mu\text{g}/\text{min}$ . Tiputusliuosta on minuutissa annettava  $750/500 = 1,5$  millilitraa. b) 465 ml:n tiputus kestää  $465 \cdot 500/750 = 310$  minuuttia eli 5 h 10 min. Vastaus: a) 1,5 millilitraa, b) 5 h 10 min.
- Olkkoon neljäkäs  $ABCD$ , missä kulma  $\angle DAB = 81^\circ$  ja olkkoon  $h = DE$  neljäkkään korkeus. Tällöin kolmio  $AED$  on suorakulmainen ja  $h = 98,5 \sin 81^\circ = 97,2873$  m. Neljäkkään ala on  $a = AB \cdot h = 98,5h = 9582,7992 \text{ m}^2 = 0,9582$  ha. Tontin neliömetrihinta on  $10000/a = 1,0435$  euroa. Vastaus: Pinta-ala on 0,958 ha ja neliömetrihintaa 1,04 euroa.
- Porausreiän tilavuus  $V = \pi r^2 h$ , missä reiän säde  $r = 7,0$  cm ja syvyys  $h = 5720$  cm. Polkujen pinta-ala  $A = pd$ , missä pituus  $p = 7250$  cm ja leveys  $d = 45$  cm. Poluille levitettävän kerroksen paksuus  $x = \frac{V}{A} = \frac{\pi 7^2 \cdot 5720}{7250 \cdot 45} \approx 2,6989$  cm. Vastaus: 2,7 cm.
- Funktion  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$  derivaatta  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ .  $f'(x) = 2$ , kun  $3x^2 - 4x + 1 = 0$ . Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisu on  $x = \frac{1}{6}(4 \pm \sqrt{16 - 12}) = \frac{1}{6}(4 \pm 2)$  eli  $x = 1$  tai  $x = \frac{1}{3}$ . Vastaus: Kohdissa  $x = 1$  ja  $x = \frac{1}{3}$ .
- Uusi ennakonpidätysprosentti on  $100 - 73 - 0,8 = 26,2$  eli käteen jää 73,8 % palkasta. Jos vanha palkka on  $a$ , niin palkankorotuksen ja pidätysprosentin muuttumisen jälkeen jää käteen  $0,738(a + 45)$ . Tästä saadaan yhtälö  $0,738(a + 45) - 0,73a = 49,60$  eli  $0,08a = 16,39$ , jonka ratkaisu on  $a = 2048,75$ . Vastaus: Uusi ennakonpidätysprosentti on 26,2 ja uusi palkka 2093,75 euroa.
- a) Kuvio koostuu janoista  $AD$  ja  $BC$ , jotka leikkaavat  $BC$ :n ja  $AD$ :n yhteisessä keskipisteessä  $E$ . b) Piste  $E$  koordinaatit ovat  $(\frac{1}{2}(357 + 471), \frac{1}{2}(519 + 125)) = (414, 322)$ . c)  $E$  on myös janan  $AD$  keskipiste. Jos piste  $D$  on  $(x, y)$ , on  $\frac{1}{2}(132 + x) = 414$  ja  $\frac{1}{2}(247 + y) = 322$ . Näistä saadaan  $x = 696$  ja  $y = 397$ . Vastaus: b)  $(414, 322)$ , c)  $(696, 397)$ .

10. a) Todennäköisyys 20 peräkkäiselle häviölle on  $(\frac{1}{2})^{20} \approx 0,000000953 = 0,953 \cdot 10^{-6}$ .  
 b) Yhteensä pelaaja on menettänyt  $n$  häviön jälkeen  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$  euroa. Tämän geometrisen summan arvo on  $2^n - 1$  euroa. Siis, jos pelaaja häviää 20 kertaa peräkkäin ja voittaa 21. kerralla, on hänen voittonsa  $2^{20} - (2^{20} - 1) = 1$  euro. Vastaus: a)  $0,953 \cdot 10^{-6}$ , b) 1 euro.
11. Paraabelin pisteessä  $(x, x^2 + 2x - 1)$  on koordinaattien summa  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ . Tämä kuvaa edelleen ylöspäin aukeavaa paraabelia, joten sen pienin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta.  $f'(x) = 2x + 3 = 0$ , kun  $x = -\frac{3}{2}$ . Tällä arvolla  $y = \frac{9}{4} - 3 - 1 = -\frac{7}{4}$ . Vastaus: Pisteessä  $(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4})$ .
12. a) Oikean lämpötilan  $y$  ja mitatun lämpötilan  $x$  välinen yhteys on  $y = ax + b$ . Kertoimet  $a$  ja  $b$  määräytyvät ehdoista  $-9,2 = -9,9a + b$  ja  $18,1 = 18,5a + b$ . Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan, että  $28,4a = 27,3$  eli  $a \approx 0,961268$ , josta  $b \approx 0,316549$ .  
 b) Jos lämpömittari näyttää oikein lämpötilassa  $x$ , on  $x = 0,961268x + 0,316549$ . Tästä saadaan  $x \approx 8,173$ . Vastaus: a)  $y = 0,9613x + 0,3165$ , b)  $8,2^\circ$ .
13. Jos Richterin asteikossa voimakkuudeltaan 6,8 olevassa järjestyksessä vapautuu energia  $E_1$ , niin  $\log_{10} E_1 = 11,8 + 1,5 \cdot 6,8 = 22,0$ . Tästä saadaan  $E_1 = 10^{22}$ . Energia, joka on 50 % suurempi, on  $E_2 = 1,5 \cdot 10^{22}$ . Jos tätä vastaava Richterin asteikon lukema on  $M$ , on  $\log_{10} E_2 = 11,8 + 1,5M$ . Tästä saadaan  $M = \frac{1}{1,5}(\log_{10}(1,5 \cdot 10^{22}) - 11,8) = \frac{1}{1,5}(\log_{10} 1,5 + 10,2) \approx 6,9174$ . Vastaus: 6,9.
14. a) Lainan kuukausierä ilman lisämaksua saadaan kaavasta  $A_1 = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$ , missä  $K$  on lainasumma,  $q$  korkotekijä ja  $n$  lyhennysten lukumäärä. Sijoittamalla  $K = 1200$  euroa ja  $q = 1,019$  saadaan, että  $A_1 \approx 112,77579$  euroa. Tähän on vielä lisättävä lisämaksu  $A_2 = 0,004K = 4,8$  euroa, joten kokonaiskuukausierä  $A = A_1 + A_2 = 117,57579$  euroa. Lainan kokonaiskustannus on  $12A = 1410,90948$  euroa. Vastaus: Kuukausierä on 118 euroa ja lainan kokonaiskustannukset 1411 euroa.  
 b) Jos tasaerälainan vuosikorko on 31 %, on kuukausierän korkotekijä  $r = 1 + \frac{1}{12} \cdot 0,31$ . Kuukausierän suuruus on nyt  $1200r^n \frac{1-r}{1-r^n} \approx 117,57560$  euroa, mikä on sentin tarkkuudella sama kuin a)-kohdan kuukausierä  $A$ . Tämä todistaa väitteen.
15. Jos  $x_0$  on koneelle asetettu paino ja  $x$  pussin massa, on määrättävä  $x_0$  niin, että  $P(x \geq 1000) = 0,95$  normaalijakaumassa  $N(x_0, 8)$ . Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan  $N(0, 1)$  muunnoksella  $z = \frac{x - x_0}{8}$ ,  $z_0 = \frac{1000 - x_0}{8}$ . Tällöin  $0,95 = P(x \geq 1000) = P(z \geq z_0) = P(z \leq -z_0) = \Phi(-z_0)$ . Taulukon mukaan  $-z_0 = 1,645$  eli  $\frac{1000 - x_0}{8} = -1,645$ . Tästä saadaan  $x_0 = 1013,16$ . Vastaus: Koneelle asetetaan painoksi 1013 g.