Lyhyt matematiikka 24.9.2004, ratkaisut:

1. $x^2 - 3{,}1x - 1{,}4 = 0$, kun $x = \frac{1}{2}(3{,}1 \pm \sqrt{3{,}1^2 + 4 \cdot 1{,}4}) = \frac{1}{2}(3{,}1 \pm 3{,}9)$ eli $x = -0{,}4$ tai $x = 3{,}5$. Koska $f(x)$:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa negatiivisia arvoja välillä $]-0{,}4;\ 3{,}5[$.

2. Nyt $a = 26 \cdot 10^{10} = 2{,}6 \cdot 10^{11}$, $b = 780 \cdot 10^{10} = 7{,}8 \cdot 10^{12}$, $c = 3900 \cdot 10^{10} = 3{,}9 \cdot 10^{13}$. Siis $\dfrac{a+b+c}{a} = \dfrac{(26 + 780 + 3900) \cdot 10^{10}}{26 \cdot 10^{10}} = \dfrac{4706}{26} = 181$ ja

$$\frac{ab}{c} = \frac{2{,}6 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{23}}{3{,}9 \cdot 10^{13}} = \frac{2{,}6 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{10}}{3{,}9} = 5{,}2 \cdot 10^{10}.$$

3. Kuvaajan perusteella vastaukset ovat osapuilleen: **a)** 44 vuotta, **b)** 36 vuotta, **c)** 51 vuotta, **d)** 63 %, **e)** $100\dfrac{21a - 14a}{14a} = 50$ % (lääkäreitä $100a$).

4. Jos vanhempia kutsutaan x henkeä ja muita y henkeä, niin pätee $0{,}65x + 0{,}45y = 260$ ja $0{,}65x = 0{,}75 \cdot 260$. Jälkimmäisestä saadaan, että $x = 300$. Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saadaan, että $y = \dfrac{260 - 0{,}65 \cdot 300}{0{,}45} = \dfrac{13}{0{,}09} \approx 144{,}44$. Vastaus: Kutsuttava vanhempia 300 ja muita henkilöitä 144.

5. Lautoihin vinoon lyöty naula on hypotenuusana suorakulmaisessa kolmiossa ABC, missä A on naulan kanta, B naulan kärki ja C laudan pinnalla pystysuoraan B:n yläpuolella. Jos α on naulan ja laudan välinen kulma, on $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$. **a)** Pienin kaltevuuskulma syntyy, kun naula tunkeutuu alempaan lautaan vain 8 mm syvyyteen. Tällöin $\sin\alpha = \frac{14+8}{30} = \frac{22}{30}$, josta $\alpha \approx 47{,}17^\circ$. **b)** Suurin kaltevuuskulma syntyy, kun naula tunkeutuu alempaan lautaan lähes 14 mm syvyyteen. Tällöin $\sin\alpha = \frac{28}{30}$, josta $\alpha \approx 68{,}96^\circ$. Vastaus: **a)** 47°, **b)** 69°.

6. Geometrisen jonon ensimmäinen termi $a = \frac{1}{2}$ ja suhde $q = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$. Siten n:n ensimmäisen termin summa on $S_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 - 3^n}{1 - 3} = \dfrac{1}{4}(3^n - 1)$. Tämän perusteella

$$S_n > 10^6 \Leftrightarrow 3^n - 1 > 4 \cdot 10^6 \Leftrightarrow n \ln 3 > \ln(4 \cdot 10^6 + 1) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(4 \cdot 10^6 + 1)}{\ln 3} \approx 13{,}837.$$

Vastaus: Arvosta $n = 14$.

7. Alustavasti sovittu hinta urakalle oli $h = 156 \cdot 14 + 89{,}4 \cdot 9{,}2 = 3006{,}48$ euroa. Uusi hinta x euroa on arvonlisäveroineen $1{,}22x$ euroa. Sopimuksen mukaan $1{,}22x - h = h - x$. Siten $2{,}22x = 2h$ eli $x = \frac{1}{1{,}11}h = 2708{,}5405$. Arvonlisäveroineen maksu on $1{,}22x \approx 3304{,}419$ euroa. Vastaus: 3304,42 euroa.

8. Jos pellon sivun pituus on x m, on sen ala x^2 m^2 ja piiri $4x$ m. Tästä saadaan x:lle ehto $\frac{128}{10\,000}x^2 + 0{,}2 \cdot 4x = 550$ eli $0{,}0128x^2 + 0{,}8x - 550 = 0$. Tämän ratkaisu on $x = \dfrac{-0{,}8 \pm \sqrt{28{,}8}}{0{,}0256}$. Ainoa positiivinen ratkaisu on $x = 178{,}3814$, jolloin $x^2 = 31819{,}9$. Vastaus: Pellon sivu on 178 m ja ala 3,18 ha.

9. Merkitään korkeuseroa $d = 20$ cm $= 0{,}0002$ km ja maapallon sädettä $R = \frac{1}{2\pi} \cdot 40\,000$ km. Olkoon uimari pisteessä A, vastarannan lähin kohta B, maapallon keskipiste O sekä $\angle AOB = 2\alpha$. Tällöin $\cos\alpha = \dfrac{R-d}{R} \approx 0{,}9999999686$, josta $\alpha \approx= 0{,}0143619°$. Kaaren AB pituus $s = 40\,000 \cdot \dfrac{2\alpha}{360} \approx 3{,}19154$ km. Vastaus: Vähintään 3,2 km.

10. Funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x) = -12x^2 = 0$, kun $x = 0$. Koska $f'(x) < 0$, kun $x \neq 0$, ei $f(x)$:llä ole ääriarvoa, vaan se on aidosti vähenevä kaikkialla. Funktion $g(x)$ derivaatta $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ kaikkialla, joten $g(x)$ on kaikkialla aidosti kasvava, eikä sillä ole ääriarvoa. Summafunktio on $h(x) = f(x) + g(x) = -3x^3 + x$. Sen derivaatta $h'(x) = -9x^2 + 1 = 0$, kun $x = \pm\frac{1}{3}$. Edelleen, $h'(x) > 0$, kun $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ ja $h'(x) < 0$, kun $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > \frac{1}{3}$. Näin ollen pisteessä $x = -\frac{1}{3}$ on funktiolla paikallinen minimi $h(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{9}$ ja pisteessä $x = \frac{1}{3}$ paikallinen maksimi $h(\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$.

11. Jos kaksinumeroiset luvut ovat $m = 10k + y$ ja $n = 10k + (10 - y)$, on väite, että $mn = 100k(k+1) + y(10-y)$. Suora lasku antaa, että $mn = (10k+y)(10k+(10-y)) = 100k^2 + 100k + 10y - y^2 = 100k(k+1) + y(10-y)$, mikä oli juuri väite.

12. Jos aineen alkumäärä on K ja puoliintumisaika on t_p tuntia, on ainetta $5t_p$:n jälkeen vielä jäljellä $(\frac{1}{2})^5 K = \frac{1}{32}K = 0{,}03125K$ eli 3,125 %. Olkoon lääkeaineesta poistunut 99 % ajan xt_p kuluttua. Tällöin on oltava $(\frac{1}{2})^x K = \frac{1}{100}K \Leftrightarrow x \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{100}$. Siis $x = \dfrac{-\ln 100}{-\ln 2} \approx 6{,}64386$. Koska $15 \leq t_p \leq 18$, on $6{,}64386 \cdot 15 \leq xt_p \leq 6{,}64386 \cdot 18$ eli $99{,}658 \leq xt_p \leq 119{,}589$. Vastaus: Lääkeainetta on $5t_p$:n jälkeen jäljellä 3 % ja 99 % poistumiseen on odotettava 100 – 120 h.

13. Halkaisijan pituus on $d = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$. Määritelmän mukaan ympyrän keskipiste $O = (\frac{1}{2}(3+1), \frac{1}{2}(3-1)) = (2,1)$ ja säde $r = \frac{1}{2}d = \sqrt{5}$. Piste (x,y) on ympyrän piste, jos sen etäisyys O:stä on r eli jos $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5}$. Korottamalla toiseen saadaan ympyrän yhtälöksi $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Pisteen $(4,1)$ etäisyys keskipisteestä O on $\sqrt{(4-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4} \neq \sqrt{5}$, joten piste ei ole ympyrän kehällä.

14. Korkoprosentti $p = 2$ ja korkotekijä $q = 1{,}02$. Lähdeveron vähennyksen jälkeen korosta jää 71 % eli "verottomaksi korkotekijäksi" saadaan $q_0 = 1 + 0{,}71 \cdot 0{,}02 = 1{,}0142$. Ensimmäinen talletus K kasvaa 7 vuodessa määrään $q_0^7 K$. Toinen talletus on $K + 0{,}02K = qK$. Se kasvaa jäljellä olevassa 6 vuodessa määrään $q_0^6 qK$. Kolmas talletus on $qK + 0{,}02qK = q^2K$. Se kasvaa jäljellä olevassa 5 vuodessa määrään $q_0^5 q^2 K$. Neljäs talletus on $q^2K + 0{,}02q^2K = q^3K$. Se kasvaa jäljellä olevassa 4 vuodessa määrään $q_0^4 q^3 K$. Lopulta seitsemäs talletus on $q^5K + 0{,}02q^5K = q^6K$. Se kasvaa jäljellä olevan vuoden aikana määrään $q_0 q^6 K$. Laskemalla yhteen saadaan, että säästösumma $S = (q_0^7 + q_0^6 q + q_0^5 q^2 + \ldots + q_0 q^6)K$. Suluissa oleva lauseke on geometrinen summa, missä suhdeluku on $\dfrac{q}{q_0}$. Siten $S = q_0^7 \dfrac{1 - (\frac{q}{q_0})^7}{1 - \frac{q}{q_0}} K = q_0 \dfrac{q^7 - q_0^7}{q - q_0} K \approx 7{,}859976K$. Kun $K = 500$ euroa, tulee säästösummaksi $S \approx 3929{,}988$ euroa eli 3929,99 euroa.

15. Poissonin jakaumassa todennäköisyys n asiakkaaseen minuutissa on $P(n) = \frac{k^n}{n!}e^{-k}$, missä k on keskimääräinen asiakasmäärä. Siten todennäköisyys, että minuutissa on korkeintaan neljä asiakasta on $p = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$. Sijoittamalla edelliseen kaavaan $k = 3$ saadaan $p = (1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!})e^{-3} \approx 0{,}81526$. Kysytty todennäköisyys on $1 - p \approx 0{,}18474$. Vastaus: 0,185 eli 18,5 %.