

Lyhyt matematiikka 19.3.2004, ratkaisut:

1. a) $x(x+1) = 156$ on toisen asteen yhtälö $x^2 + x - 156 = 0$. Ratkaisu on $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 156}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 25)$. Vastaus: x on -13 tai 12 .
 b) Vähentämällä toinen ensimmäisestä saadaan yhtälö $4y = -12$, josta $y = -3$. Sijoittamalla tämä toiseen saadaan $x = \frac{1}{2}(4 - 3) = \frac{1}{2}$. Vastaus: $x = \frac{1}{2}$, $y = -3$.
2. a) Tavaramäärä on yhteensä 1479 tuhatta tonnia vastaten sektoridiagrammissa 360° . Siten prosenttiosuuksiksi (%) ja sektoreiden keskuskulmiksi (α) saadaan
- | Toimiala | % | α |
|---------------------------------|-------|----------|
| Elintarvikkeet | 12,58 | 45,3 |
| Kemian teollisuuden tuotteet | 7,51 | 27,0 |
| Radio-,TV- ja tietokonelaitteet | 6,96 | 25,1 |
| Muut koneet ja laitteet | 13,25 | 47,7 |
| Muut | 30,22 | 108,8 |
| Erittelemätön | 29,48 | 106,1 |
- b) Jos koko kauttakulkuviennin arvo on x miljardia euroa, on $0,28x = 3,5$, josta $x = 12,5$. Vastaus: 12,5 miljardia euroa.
3. Jos miehiä on x , on naisia $1,25x$. Tästä saadaan yhtälö $x + 1,25x = 207$, josta $x = 92$ ja $1,25x = 115$. Vastaus: Naisopiskelijoita 115 ja miesopiskelijoita 92.
4. Yksi cm kartalla on 200 m luonnossa. Näin ollen kartalla $2,9 \text{ cm}^2$ palsta on luonnossa $2,9 \cdot 200^2 \text{ m}^2 = 2,9 \cdot 4 \text{ ha} = 11,6 \text{ ha}$. Maksimivirhe on $0,1 \cdot 4 \text{ ha} = 0,4 \text{ ha}$.
5. Junien A ja B etäisyys on $12 \cdot 85/60 \text{ km} = 17 \text{ km}$. Kun C kohtaa A:n, on B siis 17 km päässä. Junat lähestyvät toisiaan nopeudella $(85+105) \text{ km/h} = 190 \text{ km/h}$. Koh- taamiseen menee aikaa $60 \cdot 17/190 \text{ min} = 5,37 \text{ min}$. Vastaus: 5,4 minuutin kuluttua.
6. a) Alkeistapauksia on $6 \cdot 6 = 36$. Suotuisia ovat parit $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$, $(5,4)$, $(5,5)$, $(5,6)$, $(4,5)$, $(4,6)$ ja $(3,6)$, joita on 10. Todennäköisyys on $10/36 = 5/18$. b) Kahdesti heitettäessä todennäköisyys on $(5/18)^2 = 25/324$. Vastaus: a) $\frac{5}{18}$, b) $\frac{25}{324}$.
7. Yhteisten pisteiden x -koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2 + 4x + 5 = -x^2 + 3$ eli $2x^2 + 4x + 2 = 0$ eli $2(x+1)^2 = 0$. Ratkaisuja on vain yksi, $x = -1$, joten yhteisiä pisteitä on vain yksi, $(-1, y(-1)) = (-1, 2)$. Koska $\frac{d}{dx}(-x^2 + 3) = -2x$, on pisteeseen $(-1, 2)$ asetetun tangentin kulmakerroin $k = -2(-1) = 2$. Tangentin yhtälö on siten $y - 2 = 2(x + 1)$ eli $y = 2x + 4$.
8. Olkoon vuosittainen lainasumma a ja korkotekijä q . Velkaa on ensimmäisen vuoden jälkeen qa , toisen $q^2a + qa$, kolmannen $q^3a + q^2a + qa$ ja lopulta kahdennentoista jälkeen $q^{12}a + q^{11}a + \dots + qa$. Tämä on geometrinen sarja, jonka summa on $S = aq \frac{1 - q^{12}}{1 - q}$. Sijoittamalla summakaavaan arvot $a = 4000$ euroa ja $q = 1,04$ saadaan, että $S = 62\,507,35$ euroa. Vastaus: Velkaa on 62 507,35 euroa.
9. Olkoon $BP = x$ ja $QD = y$. Suorakulmion ala on ab . Kolmion ABP alan on oltava sen kolmasosa, joten $\frac{1}{2}xa = \frac{1}{3}ab$, josta $x = \frac{2}{3}b$. Vastaavasti saadaan kolmiosta ADQ , että $\frac{1}{2}yb = \frac{1}{3}ab$, josta $y = \frac{2}{3}a$. Vastaus: $BP = \frac{2}{3}b$ ja $QD = \frac{2}{3}a$.

10. Luku $a \geq 0$ on luvun b neliöjuuri, jos $a^2 = b$. Koska $3 - \sqrt{5} \geq 0$ ja $(3 - \sqrt{5})^2 = 3^2 - 6\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$, on $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}$.
11. Olkoon kone Kalajärven yläpuolella pisteessä A ja viiden kilometrin päässä pisteessä B ja olkoon piste C 1100 jalkaa pisteen B alapuolella. Tällöin ABC on suorakulmainen kolmio, missä kateetti $AC = 5,0$ km ja kateetti $BC = 1100$ jalkaa $= 335,5$ m. Kone nousi kulmassa $\alpha = \angle BAC$, jolle $\tan \alpha = 335,5/5000 = 0,0671$. Näin ollen $\alpha \approx 3,84^\circ$. Koneen nopeus maahan nähden oli $1,852 \cdot 285$ km/h $= 527,82$ km/h, joten se kulki 5,0 km matkaa $3600 \cdot 5,0/527,82$ s $\approx 34,10$ s. Vastaus: Kone nousi $3,8^\circ$ kulmassa ja välin lento kesti 34 s.
12. a) Asutuksen ikä 7500 vuotta on $x = 7500/5730 \approx 1,30890$ kertaa C-14:n puoliintumisaika. Jos C-14 isotoopin määrä oli alussa m , on se nyt $(0,5)^x m \approx 0,40363m$. Vähentyminen on prosentteissa $100(1 - 0,40363) \approx 59,637$. b) Jos C-14 määrä m alentuu 30 prosenttiin $t = 5730y$ vuodessa, on $(0,5)^y m = 0,3m$. Tällöin $y = \frac{\ln 0,3}{\ln 0,5}$ ja $t = 5730y \approx 9952,8 = 7500 + 2452,8$ vuotta. Vastaus: a) 59,6 %, b) 2450 vuotta lisää.
13. Olkoon pohjan sivun pituus x cm ja laatikon korkeus h cm, jolloin tilavuus on V cm³ $= hx^2$ cm³. Nyt $x^2 + 4hx = 1200$, josta $h = \frac{1}{4x}(1200 - x^2)$. Tilavuus on x :n funktiona $V = \frac{1}{4}(1200x - x^3)$. Derivaatta $V' = \frac{1}{4}(1200 - 3x^2) = 0$, kun $x^2 = 400$ eli $x = 20$. Koska $V' > 0$, kun $0 < x < 20$ ja $V' < 0$, kun $x > 20$, saavuttaa V kohdassa $x = 20$ suurimman arvonsa. Tällöin $h = \frac{1}{80}(1200 - 400) = 10$ ja $V = 10 \cdot 20^2 = 4000$. Vastaus: Tilavuus on 4000 cm³, korkeus 10 cm ja pohjan sivun pituus 20 cm.
14. Jos h on pituus, on määrättävä $P(h > 200)$ normaalijakaumassa $N(180,0; 5,8)$. Siirrytään normitettuun jakaumaan $N(0,1)$ muunnoksella $z = \frac{h - 180}{5,8}$ ja $z_0 = \frac{200 - 180}{5,8} \approx 3,448$. Tällöin $P(h > 200) = P(z > z_0) = 1 - P(z \leq z_0)$. Taulukon mukaan $P(z \leq z_0) = \Phi(3,448) = 0,9997$, joten $P(h > 200) = 0,0003$. Vastaus: 0,03 %.
15. Tasaerälainassa kertalyhennys $A = Kq^n \frac{q - 1}{q^n - 1}$, missä K on lainamäärä, q korkotekijä ja n lyhennysten lukumäärä. Sijoittamalla kaavaan $K = 40\,000$ euroa, $q = 1,04$ ja $n = 10$ saadaan, että $A \approx 4931,638$ euroa. Lainaa on jäljellä k vuoden jälkeen $V_k = Kq^k - A \frac{q^k - 1}{q - 1}$. Jos K , A ja q ovat kuten edellä, on lainaa viiden vuoden jälkeen jäljellä $V_5 = 21\,954,76$ euroa. Jos nyt korkotekijä nousee määrään $r = 1,06$, lyhenee laina seuraavien viiden vuoden aikana määrään $V_{10} = V_5 r^5 - A \frac{r^5 - 1}{r - 1} = 1580,31$ euroa. Tämä kasvaa lainan 11. vuonna eli vuonna 2013 määrään $rV_{10} = 1675,13$ euroa ja maksetaan vuoden lopussa kokonaan pois. Vastaus: Erän suuruus on 4931,64 euroa, viimeinen erä on 1675,13 euroa ja se maksetaan vuoden 2013 lopussa.