

1.1 Lukujonot ja summat: Aritmeettinen

1.1 Aritmeettinen ja geometrinen lukujono ja niiden summat

Aritmeettinen

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

missä a_n yleinen jäsen eli n:s jäsen

a_1 ensimmäinen jäsen

$$d \text{ erotusluku (esim. } d = a_2 - a_1 \text{, } d = \frac{a_5 - a_2}{3} \text{)}$$

n jäsenen järjestysnumero

summa

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_{eka} + a_{vika})$$

missä S_n on yhteenlaskettavien summa

n yhteenlaskettavien määrä

a_{eka} ja a_{vika} ensimmäistä ja viimeistä yhteenlaskettavaa jäsentä

Geometrinen

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

missä a_n yleinen jäsen eli n:s jäsen

a_1 ensimmäinen jäsen

n jäsennumero

$$q \text{ suhdeluku (} q = \frac{a_2}{a_1} \text{)}$$

summa

$$S_n = a_{eka} \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

missä S_n summa

a_{eka} ensimmäinen yhteenlaskettava

q suhdeluku

n yhteenlaskettavien määrä

ESIM 1.

Aritmeettinen lukujono alkaa 4, 7, 10, ...

a) Määritä lukujonon yleinen jäsen ja laske 20. jäsen a_{20} .

b) Laske lukujonon 20 ensimmäisen jäsenen summa.

c) Kuinka monta jäsentä lukujonon alusta lähtien on laskettava yhteen, jotta summa on 1425?

TAPA 1 kaavoilla

a)

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \parallel \quad a_1 = 4, \quad d = 7 - 4$$

$$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 4 + 3n - 3 = 1 + 3n$$

$$a_{20} = 1 + 3 \cdot 20 = 61$$

b)

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_{eka} + a_{vika}) \quad \parallel \quad n = 20, \quad a_{eka} = 4, \quad a_{vika} = 61$$

$$= \frac{20}{2} \cdot (4 + 61) = 10 \cdot 65 = 650$$

c)

$$S_n = 1425$$

$$1425 = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \parallel \quad a_n = 1 + 3n$$

$$1425 = \frac{n}{2}(4 + (1 + 3n))$$

$$1425 = \frac{n}{2}(5 + 3n)$$

$$1425 = \frac{5n}{2} + \frac{3n^2}{2} \quad || \cdot 2$$

$$2850 = 5n + 3n^2$$

$$5n + 3n^2 - 2850 = 0$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2850)}}{2 \cdot 3} = 30$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2850)}}{2 \cdot 3} = -31,666666666666666666666666666667$$

$n = 30$ (negatiivisia jäsennumeroita ei ole)

Vastaus: Kun n on 30, niin n ensimmäisen jäsenen summa on tasan 1425.

TAPA2 Calcissa

	A	B
1	1	4
2	2	7
3	3	10
4	4	13
18	18	55
19	19	58
20	20	61
21	21	64
22	22	67
23	23	70

c)

	A	B	C
1	1	4	4
2	2	7	7
28	28	85	1246
29	29	88	1334
30	30	91	1425

30 jäsentä täytyy laskea yhteen.

ESIM2.

Geometrinen lukujono alkaa 2800, 2100, 1575, ...

a) Määritä lukujonon yleinen jäsen ja laske 7. jäsen a_7 .

b) Laske lukujonon 7 ensimmäisen jäsenen summa kokonaislukujen tarkkuudella.

c) Kuinka monta jäsentä lukujonon alusta lähtien on laskettava yhteen, jotta summa ylittää 11 000?

TAPA1 kaavoilla

a)

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad || \quad a_1 = 2800, \quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2100}{2800} = 0,75$$

$$a_n = 2800 \cdot 0,75^{n-1}$$

$$a_7 = 2800 \cdot 0,75^{7-1} = 2800 \cdot 0,75^6 = 498,339843...$$

b)

$$S_n = a_{eka} \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} \quad || \quad a_{eka} = a_1 = 2800, \quad q = 0,75, \quad n = 7 \text{ (kpl)}$$

$$S_n = 2800 \cdot \frac{(1 - 0,75^7)}{(1 - 0,75)} \approx 9704$$

$$2800 \cdot (1 - 0,75^7) / (1 - 0,75) = 9704,98046875$$

TAPA2 Calcissa

C	D	A	B	C	D	E
#	2800	1###			2800	
#	2100	2###			2100	
#	1575	3###			1575	
#	1181,25	4###			1181,25	
#	885,9375	5###			885,9375	
#	664,453125	6###			664,453125	
#	498,3398438	7###			498,3398438	9704,980469