

10. Kerto- ja jakolaskuja

- * Kerto- ja jakolaskun käsitteistä
- * Multiplikare
- * Kertolaatikot
- * Lyhyet kertotaulut
- * Laskujärjestys

Aiheesta muualla:

Luku 14: Algoritmien konkretisointia s. 87

Luku 15: Ajan laskeminen s. 103

KYMPPI-filmit 4, 5, 8, 9, 13, 14 ja 15

Liite 1: 100-helmitaulu piirroksena s. 145

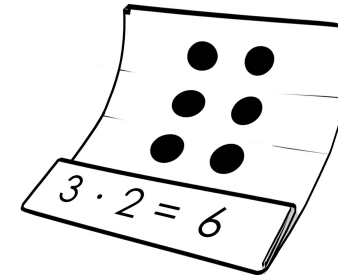
Liite 5: 100-ruudukko ja tyhjät ruudut s. 162

Liite 6: Kertolaatikoita s. 164

Liite 7: Päässäkulomakkeet 4 – 13 s. 174

Liite 11: Matematiikan välineitä s. 204

KYMPPI-kartoitus



Mitkä jakolaskut saadaan tästä kertolaskusta?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11					16				20
21			24						30
31	32								40
41							48		50
51					56				60
61			64						70
71	72								80
81							88		90
91					96				100

8:n kertotaulu 100-ruudukossa
(ks. s. 162 ja s. 173)

Kerto- ja jakolaskun käsitteistä

Kertolasku $3 \cdot 2 = 6$ perustuu toistuvaan yhteenlaskuun $2 + 2 + 2 = 6$.

Kertotaulujen tuloista muodostuu **lukujonoja**, joita kannattaa harjoitella jo ennen kertolaskun opiskelua: 0, 2, 4, 6, jne.

o	o	o
o	o	o

Ositusjakolaskulla $6 : 2 = 3$ saadaan selville yhden osan suuruus. Tämä on on tuttua arjesta, jossa jotain jaetaan tasan henkilöiden kesken ja mietitään, kuinka paljon jokainen saa. Esimerkiksi 6 karkkia jaetaan 2:lle ja kumpikin saa 3 karkkia. Jakolaskuna tämä merkitään $6 : 2 = 3$ ja kertolaskuna $2 \cdot 3 = 6$.

o	o	o
o	o	o

Sisältöjakolasku $6 : 2 = 3$ perustuu toistuvaan vähennyslaskuun

$6 - 2 - 2 - 2 = 0$. Siis 6:sta voidaan ottaa kakkonen 3 kertaa. Voidaan myös kysyä: Kuinka monta kakkosta sisältyy 6:een?

Sisältöjakolaskulla otetaan siis selville, kuinka monelle riittää, kun jotain jaetaan jollekin tietty määrä kerrallaan.

Esimerkiksi 6 karkkia jaetaan niin, että jokainen saa 2 karkkia. Silloin karkit riittävät 3:lle.

Jakolaskuna tämä merkitään $6 : 2 = 3$ ja kertolaskuna $3 \cdot 2 = 6$.

o	o	o
o	o	o

Kertotaulujen opettelua helpottaa, kun käsitettä harjoitellaan samoilla välineillä kuin kertotauluja:

- * Multiplikare
- * nopat
- * linkkikuutiot
- * värisauvat
- * 100-helminauha ja pyykkipojat
- * 100-helmitaulu
- * 10-järjestelmävälineet ja desimaaliosat

KYMPPI-kirjassa olevilla keinoilla varmennetaan kerto- ja jakolaskun käsitteiden hallinta sekä opetellaan kertotauluja uusin keinoin.

Kertotaulujen tuloista saadaan säännöllinen **kuvio**, kun ne väritetään 100-ruudukkoon. Sivulla 54 on 8:n kertotaulu.

Työskentelyperiaatteita

- * Tutkiminen, nimeäminen, näyttäminen ja piirtäminen (s. 9).
- * On tärkeää, että oppilas saa onnistumisen kokemuksia.
- * Välineitä ja työskentelytapaa vaihtamalla voidaan saada oppimistilanne motivoivaksi.
- * Oppilasta pyydetään selittämään suullisesti, miten hän ratkaisee tehtävän.
- * Oppilasta pyydetään lukemaan ääneen luvut ja laskut.
- * Konkreettisten välineiden avulla käydään tehtävä läpi.
- * Välineillä työskentelyn rinnalle kannattaa tehdä selostus piirtäen, koska on tilanteita, joissa välineitä ei ole saatavilla.
- * Taidot voidaan tarkistaa KYMPPI-kartoituksella.

Multiplikare

Andreij Dunkelsin kehittämä Multiplikare-menetelmä sopii sekä kerto- ja jakolaskun käsitteiden opiskeluun että kertotaulujen opettelemiseen.

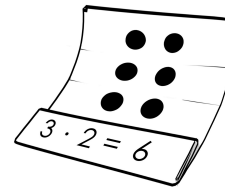
Multi tarkoittaa monta ja **plikare** taittaa.

Tarvitaan paperisuikale, joka on laskukonenauhaa tai muuta paperia. Paperisuikaleta taitetaan aloittaen alhaalta, aina ylöspäin kääntäen ja 1,5 cm kerrallaan. Taitokset tehdään napakasti. Tästä muodostuu litteä rulla.

Esimerkkinä 2:n kertotaulu.

1. Avataan rullaa yhden taitoksen verran, piirretään ylös avautuneeseen tyhjään tilaan 2-nopan pisteet. Rullan päälle, pisteiden alapuolelle, kirjoitetaan $1 \cdot 2 = 2$.
2. Avataan rullaa taas yhden taitoksen verran, piirretään avautuneeseen tyhjään tilaan taas 2-nopan pisteet. Rullan päälle kirjoitetaan $2 \cdot 2 = 4$.
3. Jatketaan niin kauan, että saadaan kirjoitettua $10 \cdot 2 = 20$. Voidaan jatkaa myös paperisuikaleen loppuun.

..
$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 2 = 8$	$5 \cdot 2 = 10$	$6 \cdot 2 = 12$



Kertolaskusta saadaan jakolaskuja kertomalla tarinoita.

* Lautasella oli kuusi pullaa. Liisa, Lasse ja mummo halusivat saada yhtä monta. Kuinka monta jokainen sai? Kaksi pullaa.

Jakolaskuna $6 : 3 = 2$ ja kertolaskuna $3 \cdot 2 = 6$.

* Korissa oli kuusi sämpylää. Isä halusi laittaa ne pusseissa pakastimeen niin, että jokaiseen pussiin tulisi 2 sämpylää.

Kuinka monta pussia tarvittiin? Kolme pussia.

Jakolaskuna $6 : 2 = 3$ ja kertolaskuna $3 \cdot 2 = 6$.

* Entä jos isä olisi laittanut 6 sämpylää pusseihin niin, että joka pussiin tuli 3 sämpylää, kuinka monta pussia silloin tarvittiin?

Kaksi pussia. Jakolaskuna $6 : 3 = 2$ ja kertolaskuna $2 \cdot 3 = 6$.

Tämä tarina ei liity yllä olevaan kuvaan, jossa on lasku $3 \cdot 2 = 6$.

Muiden kertolaskujen Multiplikare-piirroksat voivat olla myös noppien kuvia. Yhdellä nopalla saadaan 3:n, 4:n ja 5:n kertotaulujen kuvat, mutta kahden nopan kuvat tarvitaan kertotauluissa 6 – 10. Näitä kuvia löytyy sivuilta 168 – 172.

Kertomattoja värisauvoilla

Värisauvoilla voidaan tehdä moniin eri lukuihin liittyviä kertomattoja. Niistä löytyvät kertolaskuja vastaavat ositus- ja sisältöjakolaskut.

						$6 = 1 \cdot 6$
						$6 = 2 \cdot 3$
						$6 = 3 \cdot 2$
						$6 = 6 \cdot 1$

6:n kertomatosta löytyvät ositusjakolaskut:

						$6 : 1 = 6$
						$6 : 2 = 3$
						$6 : 3 = 2$
						$6 : 6 = 1$

6:n kertomatosta löytyvät sisältöjakolaskut:

						$6 : 6 = 1$
						$6 : 3 = 2$
						$6 : 2 = 3$
						$6 : 1 = 6$

Kertolaatikoita

Kertolaatikat sisältävät strategioita, jotka helpottavat kertotaulujen opiskelua:

- * lukujen suhteet toisiinsa saman kertotaulun sisällä
- * lukujen suhteet toisiinsa eri kertotaulujen välillä.

Kertolaatikoita voi käyttää esimerkiksi seuraavilla välineillä:

- 6:1 – 6:4 kertotaulut uraviivaimilla ja värisauvoilla
- 6:1 ja 6:2 lyhyet kertotaulut uraviivaimilla ja värisauvoilla
- 6:5 ja 6:6 kertotaulut nopilla ja rahoilla
- 6:7 – 6:9 kertotaulut nopilla ja muilla keinoilla

Ks. sivut 164 – 172.

Kertolaatikat, uraviivaimet ja värisauvat

Filmillä 4 näkyy, kun oppilas tekee 5:n ja 10:n sekä 2:n, 4:n ja 8:n kertotauluja värisauvoilla uraviivaimille. Tästä filmistä on selostus sivulla 123.

Kertotaulut voidaan kirjata kertolaatikoihin, joko samanaikaisesti työskennellessä tai jälkepäin (ks. s. 164 - 172).

Kuinka hyvin osaat?

Päässäkulomakkeissa nro 4 – 13 liitteessä 7 on kerto- ja jakolaskuja. Ne selvittävät näiden taitojen hallintaa sekä luokka- että yksilötasolla. Ohje lomakkeiden käytöstä on sivuilla 174 – 175.

Kertolaatikot, nopat ja rahat



Kertotaulut 2 – 9 voidaan tehdä heittämällä noppia, kuten filmissä nro 4, jossa 5:n kertotaulu tehdään nopilla. 10:n kertotaulun opettelussa 10 sentin kolikot auttavat.

Kertolaatikoihin voidaan merkitä myös noppien ja kolikoiden kuvia, kuten sivuilla 168-172 on tehty.

9:n kertotaulu kannattaa opettaa myös sormilla sen jälkeen, kun käsite “9 kertaa” on muilla tavoilla konkretisoitu. Tämä sormilla tekeminen on ainoastaan muistisääntö, mutta hauska sellainen.

7:n kertotaulun kaikki muut kertolaskut paitsi $7 \cdot 7$ ovat esiintyneet muiden kertotaulujen yhteydessä. Kun vaihdannaisuus otetaan huomioon näiden kohdalla, niin ulkoa voidaan haluttaessa opetella vain $7 \cdot 7 = 49$.

Meillä on hyviä kokemuksia siitä, että kertotaulut opetellaan seuraavassa järjestyksessä: 5, 10, 2, 4, 8, 3, 6, 9 ja 7. Tässä järjestyksessä ne ovat myös kaikissa kertolaatikoissa liitteessä 6 s. 164-172.

Miksi kertolaatikoissa on myös 11 kertaa? Kun tiedetään, kuinka paljon 10 kertaa jokin luku on, niin 11 kertaa se sama luku saadaan lisäämällä vielä yhden kerran tämä luku. Laskeminen on helppoa ja tämä vahvistaa kertolaskun käsitettä.

3:n kertotaulu	nopat
$11 \cdot 3 =$...
$10 \cdot 3 = 30$...
$9 \cdot 3 =$...
$8 \cdot 3 =$...
$7 \cdot 3 =$...
$6 \cdot 3 =$...
$5 \cdot 3 = 15$...
$4 \cdot 3 =$...
$3 \cdot 3 =$...
$2 \cdot 3 = 6$...
$1 \cdot 3 = 3$...

6:n kertotaulu	nopat
$11 \cdot 6 =$...
$10 \cdot 6 = 60$...
$9 \cdot 6 =$...
$8 \cdot 6 =$...
$7 \cdot 6 =$...
$6 \cdot 6 =$...
$5 \cdot 6 = 30$...
$4 \cdot 6 =$...
$3 \cdot 6 =$...
$2 \cdot 6 = 12$...
$1 \cdot 6 = 6$...

Osa liitteestä 6:8 sivulla 171.

Lyhyet kertotaulut

Lyhyet kertotaulut on Marja Drägerin kehittämä menetelmä niitä oppilaita varten, joille kertolaskut tuottavat erittäin paljon vaikeuksia. Näistä ovat hyötynneet monet muutkin oppilaat.

Lyhyet kertotaulut ovat kertotaulun tukipilarit.

Ensin opetellaan **viiden** kertotaulusta vain 1, 2, 5 ja 10 kertaa 5. Huomataan, että

- * 5 on puolet 10:stä ja 10 on 2 kertaa 5
- * 25 on puolet 50:stä ja 50 on 2 kertaa 25.

Lyhyet kertotaulut opetellaan ulkoa ”kopittelemalla”

eli heittämällä pareittain palloa, pussia tms.

Ensin kopitellaan eteenpäin:

$$1 \cdot 5 = 5, 2 \cdot 5 = 10, 5 \cdot 5 = 25, 10 \cdot 5 = 50$$

ja sen jälkeen takaperin:

$$10 \cdot 5 = 50, 5 \cdot 5 = 25, 2 \cdot 5 = 10, 1 \cdot 5 = 5.$$

Kun nämä hallitaan, sanotaan vain tulot:

$$5, 10, 25, 50 \text{ ja } 50, 25, 10, 5.$$

Koko 5:n kertotaulu kirjoitetaan käyttäen hyväksi edellä opittuja lyhyitä kertotauluja eli tukipilareita:

1 · 5 = 5	
2 · 5 = 10	
3 · 5 = 15	Lukuun 10 lisätään 5.
4 · 5 = 20	Luvusta 25 otetaan pois 5.
5 · 5 = 25	
6 · 5 = 30	Lukuun 25 lisätään 5.
7 · 5 = 35	Lukuun 25 lisätään 2 · 5 = 10.
8 · 5 = 40	50:stä otetaan pois 2 · 5 = 10.
9 · 5 = 45	50:stä otetaan pois 5.
10 · 5 = 50	

Lyhyet kertotaulut uraviivaimella ja värisauvoilla

Lyhyet 5:n kertotaulut tehdään värisauvoilla uraviivaimelle näin:

Laita keltainen sauva uraviivaimelle, josta näkyy, että se on 5 cm pitkä; siksi puhutaan 5-sauvoista. Laita toinen sauva sen perään syrjälleen, että se erottuu edellisestä saman värisestä sauvasta. Saadaan $2 \cdot 5 = 10$. Sitten laitetaan lisää sauvoja, kunnes on $10 \cdot 5 = 50$. Missä on tästä puolet? 25:n kohdalla. Kuinka monta viitosta tarvitaan 25:een? 5. Siis $5 \cdot 5 = 25$.

Näihin tukipilareihin tukeutuen opetellaan muut kertolaskut värisauvoilla ja uraviivaimella seuraavasti:

- * Laita uraviivaimelle $2 \cdot 5 = 10$. Miten saat $3 \cdot 5$?
Laitan yhden 5-sauvan lisää ja saan 15.
- * Laita uraviivaimelle $5 \cdot 5 = 25$. Miten saat $4 \cdot 5$?
Otan yhden 5-sauvan pois ja saan 20.
- * Laita takaisin $5 \cdot 5$. Miten saat $6 \cdot 5$?
Laitan yhden 5-sauvan lisää ja saan 30.
Laita $5 \cdot 5 = 25$. Miten saat $7 \cdot 5$? Laitan kaksi 5-sauvaa lisää eli 10 ja saan 35.
- * Laita $10 \cdot 5 = 50$. Miten saat $11 \cdot 5$?
Laitan yhden 5-sauvan lisää ja saan 55.
- * Laita takaisin $10 \cdot 5$. Miten saat $9 \cdot 5$?
Otan pois yhden 5-sauvan ja saan 45.
- * Laita takaisin $10 \cdot 5$. Miten saat $8 \cdot 5$?
Otan pois kaksi 5-sauvaa ja saan 40.

Tämän värisauva- ja uraviivaintyöskentelyn jälkeen kirjataan koko viitosen kertotaulu valmiiseen kertolaatikoon, joka on sivulla 166. Samanaikaisesti tuloja kirjoitettaessa selostetaan samoin kuin konkreettisesti työskenneltäessä.

Tämä työskentely on **filmissä 4**; selostus alkaa sivulta 125.