

# Vastaukset

## 1 Tilastot ja todennäköisyys

### 1 Kuvioiden ja kaavioiden tulkintaa

- a)** lounaisimmassa Suomessa (Turun saaristossa ja Ahvenanmaalla)  
**b)** käsivarren Lapissa ja Perämeren pohjoisosassa (Kemin–Tornion alueella)
- maan etelä-, lounais- ja kaakkosisissa sekä Perämeren pohjoisosassa
- a)** noin klo 17 **b)** noin klo 7.30
- a)** noin klo 4–8 **b)** noin klo 8:sta eteenpäin
- a)** neljäsosa **b)** kasviksilla
- a)** 13.00 **b)** 8.00 **c)** 11.00 **d)** 8.00 **e)** 17.00  
**f)** Esimerkiksi: Suomen aika on kaksi tuntia Greenwichin aikaa edellä. Suuressa osassa Länsi-Eurooppaa kello on tunnin meidän aikaamme jäljessä.
- Esimerkiksi: Päävärit ovat punainen, sininen ja keltainen. Välivärit ovat sinisestä ja punaisesta saatava violetti (liila), sinisestä ja keltaisesta saatava vihreä sekä punaisesta ja keltaisesta saatava oranssi. Väriympyrän kaikki värit saadaan pääväreistä ja väliväreistä sekä niiden yhdistelmistä.
- b)** Esimerkiksi: Väestötiheys on suurin Suomen eteläosassa ja pienin pohjoisosassa. Pohjois- ja itäosat maasta ovat harvemmin asuttuja kuin etelä- ja länsiosat. Väestötiheys on suurin maakuntien keskustaajungeissa ja lähikunnissa.
- a)** Espanjassa, Virossa ja Latviassa  
**b)** Suomessa ulkomaan kansalaisten osuus on monia Länsi-Euroopan maita ja Ruotsia vähäisempi.
- a)** Peruskoulun jälkeen suoritetaan ylioppilastutkinto tai ammatillinen perustutkinto ja sen jälkeen hakeudutaan ammattikorkeakouluun.  
**b)** Peruskoulun jälkeen suoritetaan ylioppilastutkinto tai ammatillinen perustutkinto ja sen jälkeen hakeudutaan yliopistoon tai ammattikorkeakouluun. Korkeakoulututkintojen tai ylempien amk-tutkintojen jälkeen suoritetaan tohtoriopinnot.
- a)** Maailmassa on maita, joissa väestötiheys on suurempi kuin Suomessa, ja maita, joissa väestötiheys on pienempi kuin Suomessa.

**b)** Esimerkiksi: Suomen väestötiheys on monia Euroopan maita pienempi. Suomen väestötiheys on suurempi kuin Venäjän. Väestötiheys on suurinta eräissä Länsi-Euroopan ja Aasian maissa.

**12. a)** 28 % **b)** 69 %

**13. a)** 0 °C **b)** +13 °C **c)** Ranskassa ja Norjassa  
**d)** vesisadetta, lämpötila 9 °C

**14.** Esimerkiksi: Lämpötila Euroopan pohjoisosissa on yleensä alle 0 °C ja eteläosissa yli 0 °C. Lämpimintä on Espanjassa ja kylmintä Venäjän pohjoisosissa. Aurinkoisinta on Euroopan keskiosissa sekä Espanjassa ja Ruotsissa.

**15. a)** esim. ravintoaineen happamuus, sokeripitoisuus ja vaikutus syljen eritykseen

**PULMA** tiistai

### 2 Pylväs- ja palkkikaavioita

- a)** yli 60-vuotiaat **b)** 0–15-vuotiaat
- a)** nautaeläintiloja **b)** vuohitiloja **c)** noin 4 500
- a)** tyytyväinen **b)** erittäin tyytymätön **c)** noin 90
- a)** vuonna 2010 **b)** vuonna 2003 **c)** 60 430 lasta  
**d)** vuosina 2009 ja 2010
- Pylväskaavio sopii paremmin, koska siinä näkyvät luokkien väliset erot.
- Pylväskaaviossa pylväät ovat pystyssä, palkkikaaviossa vaakasuorassa.
- Pylväskaaviossa pylväät ovat irti toisistaan, histogrammissa kiinni toisissaan.
- Esimerkiksi: Nukkumiseen käytetään eniten aikaa, ja siihen käytetty aika on pysynyt miltei samansuuruisena. Vapaa-aika on vuosikymmenien mittaan lisääntynyt. Ansiotyöhön käytetty aika on 2000-luvulla vähentynyt. Opiskeluun käytetty aika on hieman vähentynyt ja on vuonna 2009 noin 60 minuuttia.
- a)** pienimmät Kanta-Hämeessä, suurimmat Lapissa  
**b)** noin 1 700–1 800 euroa
- Esimerkiksi: Suomessa työelämään osallistuvien 20–49-vuotiaiden perheenäitien osuus oli vertailumaiden suurin ja Italiassa pienin. Italiassa noin puolet perheenäideistä on työelämässä, ja osuus pysyy yhtä suurena lapsen iästä riippumatta. Suomessa 3–5-vuotiaiden lasten äideistä osallistuu työelämään noin 80 %, Ranskassa noin 70 %, Isossa-Britanniassa noin 60 % ja Italiassa noin 50 %.

11. Esimerkiksi: Ajonopeuden muutos nopeudesta 80 km/h nopeuteen 90 km/h lisää polttoaineen kulutusta 10,6 %. Ajonopeuden muutos nopeudesta 80 km/h nopeuteen 70 km/h vähentää polttoaineen kulutusta 4,5 %. Jos ajetaan nopeutta 50 km/h, kulutus on 18,7 % pienempi kuin ajonopeudella 80 km/h.
12. Esimerkiksi: Kotimaisen tuotannon osuus suureni kaikkina muina vuosina paitsi vuosina 2009 ja 2012. Vuonna 2009 kotimaisen tuotannon osuus väheni yli 8 %. Eniten kotimaisen tuotannon osuus kasvoi vuonna 1997, jolloin se lisääntyi yli 6 %.
13. a) 6 oppilasta b) arvosana 7 ja arvosana 9 c) 26 oppilasta
14. a) sunnuntaina b) noin 90 c) torstaina
15. a) 5 tuntia b) 12 tuntia c) läksyihin
16. a) vuosina 2002 ja 2009 b) vuonna 2005 c) 14
17. a) tosi b) tosi c) epätosi
18. a) 10–14-vuotiaiden ikäryhmässä naisia on noin 140 000 ja miehiä noin 150 000. 15–19-vuotiaiden ikäryhmässä naisia on vähän alle 160 000 ja miehiä vähän yli 160 000. b) Miehiä on enemmän sekä 10–14-vuotiaiden että 15–19-vuotiaiden ikäryhmässä.
19. Lasten osuuden voidaan ennustaa hieman kasvavan, työikäisten osuuden pienenevän ja eläkeläisten osuuden kasvavan.
20. Kaavio muistuttaa muodoltaan pyramidia. Suomessa tosin keski-ikäisten osuus on monia muita maita suurempi.
- PULMA** kuuden vuoden kuluttua

### 3 Ympyrä- ja viivakaavioita

1. a) tyttöjä b) 54 % c) 46 %
2. a) teollisuuteen b) 3 %
3. a) hyvä b) huonoa c) 2 696 yritystä d) 5 119 yritystä
4. a) vuonna 2006 b) n.  $-42^{\circ}\text{C}$  c) n.  $-43,5^{\circ}\text{C}$  d) vuosina 2000, 2001, 2003, 2006, 2010, 2011 ja 2012
5. a) n. 15,00 € b) huhtikuun alkupuolella c) n. 2,10 €
6. a) puuvillaa b) 13 % c) 44 %
7. a) vuosien 1997 ja 2009 välillä b) vuonna 1997 ja vuosina 2009–2013 c) vuosina 1981 ja 1989
8. a) n.  $0^{\circ}\text{C}$  b) n.  $-26^{\circ}\text{C}$  c) n.  $-8,5^{\circ}\text{C}$
9. a) öljyn b) 65 % c) 9 %
10. a) välillä 4,1–4,5 km b) vähän alle puolet eli n. 2,3 km c) n. 2,1 km:n ja 3,4 km:n kohdalla d) n. 40 m

11. a) S-ryhmä b) 46 % c) 81 %
12. a) vähän yli  $7^{\circ}\text{C}$  b) n. klo 13 c) n. klo 18–21
13. a) n. 164 cm b) vähän alle 13-vuotiaana c) ikävuosien 12 ja 13 välillä d) 11–12-vuotiaana
14. Esimerkiksi: Odotettavissa oleva elinikä on noussut vuodesta 1770 vuoteen 2010 noin 45 vuodella. Naisten odotettavissa oleva elinikä on ollut koko ajan miesten odotettavissa olevaa elinikää korkeampi. Vuonna 2010 naisten odotettavissa oleva elinikä on noin 6 vuotta pidempi kuin miesten.
15. a) n.  $-26^{\circ}\text{C}$  b) n.  $-33^{\circ}\text{C}$
16. a) vähän yli 5 m/s b) n. 14 m/s
17. Esimerkiksi: Ilma tuntuu lämpimältä noin  $26^{\circ}\text{C}$ :n lämpötilassa, jos ilmankosteus on 10 %, mutta jo noin  $20^{\circ}\text{C}$ :n lämpötilassa, jos ilmankosteus on 100 %. Ilma tuntuu kuumalta, jos lämpötila on noin  $25^{\circ}\text{C}$  ja ilmankosteus 50 %. Ilma tuntuu erittäin tunkaalta, jos lämpötila on noin  $28^{\circ}\text{C}$  ja ilmankosteus 90 %.
- PULMA** kaksi peliä

### 4 Tilastotiedon käsittely

1. a) 25 oppilasta b) 5 oppilasta
- 2.

Kirjain	Frekvenssi
A	4
I	1
K	1
L	1
P	1
R	1
S	1

3.

Pistemäärä	Frekvenssi
0	1
1	0
2	2
3	4
4	3
5	3
6	5
7	3
8	4
9	2
10	3

4.

Arvosana	Suhteellinen frekvenssi (%)
4	5
5	10
6	15
7	25
8	30
9	10
10	5

5. Ympyräkaavio A, koska siinä on 6 sektoria. Taulukossa arvosanan 4 frekvenssi on 0, joten sille ei voida piirtää sektoria. Ympyräkaaviossa B arvosanan 4 osuus on 10 %, ja kaaviossa on 7 sektoria.

6.

Arvosana	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)
4	0	0
5	1	10
6	2	20
7	2	20
8	2	20
9	2	20
10	1	10

7.

Koko	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)
XS	2	10
S	5	25
M	8	40
L	4	20
XL	1	5

9.

Ikä	Suhteellinen frekvenssi (%)
0–9	11,1
10–19	11,1
20–29	12,5
30–39	12,7
40–49	12,5
50–59	13,7
60–69	13,5
70–79	7,8
80–89	4,3
90–	0,8
Yhteensä	100

10. a)

Nopeus (km/h)	Suhteellinen frekvenssi (%)
alle 31	16,4
31–40	61,7
41–50	14,1
51–60	5,5
yli 61	2,3
Yhteensä	100

b) 21,9 %

11.

Mielipide	Frekvenssi
täysin samaa mieltä	19
osittain samaa mieltä	16
osittain eri mieltä	12
täysin eri mieltä	3

12.

Väri	Frekvenssi
sininen	3
vihreä	2
keltainen	3
punainen	4

13.

Ikä	14	15	16
Frekvenssi	8	14	1

14. Havaintoarvot suuruusjärjestyksessä:

5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9 ja 10.

Arvosana	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)
4	0	0
5	1	10
6	2	20
7	1	10
8	3	30
9	2	20
10	1	10

15.

Kirjain	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)
K	2	20
Y	1	10
L	1	10
Ä	1	10
A	2	20
U	1	10
P	2	20

16.

Ikä (vuotta)	Suhteellinen frekvenssi (%)
11–12	27
13–14	39
15–16	34

17.

Arvosana	Suhteellinen frekvenssi (%)
4	2,2
5	11,0
6	17,6
7	27,5
8	20,9
9	15,4
10	5,5

18.

Nopeus (km/h)	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)
alle 30	5	15,2
31–40	12	36,4
41–50	10	30,3
51–60	4	12,1
yli 60	2	6,1

**PULMA** 59. Luku + 1 on jaollinen kahdella, kolmella, neljällä ja viidellä.

## 5 Keskiarvo

- a) 8 b) 30 c) 19
- 8,5
- 23 oppilasta
- 60 ml
- +2 °C
- 8,25 eli 8+

7. 8,75 eli 9–
8. Maijan on korotettava arvosanojen summaa kolmella. Hän voi tehdä sen korottamalla kolme arvosanaa yhdellä numerolla, yhtä arvosanaa kahdella ja yhtä yhdellä numerolla tai yhtä arvosanaa kolmella numerolla. Jos yksi arvosana huononee yhdellä, on muita arvosanoja korotettava neljällä jne.
9. 35, 36, 37, 38 ja 39
10. 1 001 m. Katsotaan, kuinka paljon luvut poikkeavat 1 000:sta, lasketaan niiden summa ja jaetaan havaintojen määrällä. Poikkeamien summa on 8, joka jaetaan havaintojen määrällä 8, eli  $8 : 8 = 1$ . Keskiarvo on  $1\ 000 + 1 = 1\ 001$ .
11. 7,6
12. 36 pistettä
13. n. 5 000 € (4 968 €)
14. 2 maalia
15. 9 vuotta
16.  $-2\text{ °C}$
17.  $7\frac{1}{2}$
18. 7,7
19. 3 min 41 s
20. a) 1 min 16 s b) 6 min 20 s
21. Joskus keskiarvoja lasketaan myös tällaisesta tilastosta. Keskiarvon laskeminen ei kuitenkaan välttämättä ole järkevää, koska eri vaihtoehtojen välimatkat eivät ole yhtä suuria.
22. 1 min 51,559 s
23. 12 km/h
- PULMA** Johtaja sai 11 helmeä ja toiset helmenkalastajat kumpikin 8 helmeä.

## 6 Tyyppiarvo ja mediaani

1. a) tyyppiarvo 5, mediaani 6  
b) tyyppiarvo 16 cm, mediaani 15,5 cm
2. tyyppiarvo 6, mediaani 7
3. a) kirjain I b) kirjaimet T ja R  
c) kirjaimet E, I ja Ä d) kirjaimet A ja P
4. a) 51 tikkua b) 50 tikkua c) 50 tikkua
5. a) 1 b) 2 c) 2,5
6. a) 600 g b) 500 g c) 400 g
7. a) 7,3 b) tyyppiarvo 7, mediaani 7
8. a) maaliskuu b) kesäkuu
9. a) 47 b) 47 c) 47 (46,5)
10. Keskiarvo ei anna oikeaa kuvaa porakoneiden hinnoista, koska joukossa on yksi kallis kone, joka nostaa keskihintaa.
11. esim. 10, 10, 11, 11, 12, 12 ja 12
12. a) kesäkuu b) heinäkuu c) noin 100
- d) Kävijämäärä painottuu kesäkuukausille, jolloin kävijämäärä on talvikuukausiin verrattuna moninkertainen.
13. a) 12 000 tuntia b) 11 000 tuntia c) 11 500 tuntia
14. a) keskiarvo 3 300 € ja mediaani 2 400 €  
b) Mediaani sijoittuu paremmin palkkojen keskikohdalle, koska yksi korkea palkka nostaa keskiarvoa.
15. esim.  
a) 0, 1, 2, 3 ja 3 b) 0, 1, 3, 3 ja 3  
c) 0, 1, 1, 4 ja 4
16. a) Tyyppiarvo on luokka tai havaintoarvo, jota aineistossa on eniten.  
b) Mediaani on suuruusjärjestykseen asetetuista havaintoarvoista keskimäinen tai kahden keskimäisen keskiarvo.
17. a) tyyppiarvo 3 ja 4, mediaani 4  
b) tyyppiarvo 6 €, mediaani 6 €
18. esim.  
a) SALAMA b) KUKKA c) KORTTI  
d) LAMMAS
19. a) 5 b) 4 c) 3,67
20. a) 18 ja 18,5 b) 18 c) 54,5 pistettä
21. a)  $-4\text{ °C}$  b)  $-0,5\text{ °C}$  c)  $-0,5\text{ °C}$
- PULMA** 10 vuoden kuluttua

## 7 Vaihteluväli ja hajonta

1. a) 17–32 pistettä b) 15 pistettä
2. a) 43 b) 47 c) 43–47 nastaa d) 4 nastaa
3. Jakauman 1 hajonta on suurempi, koska siinä suurempi osa havainnoista on kauempana jakauman keskikohdasta kuin jakaumassa 2.
4. 8B-luokan hajonta on suurempi, koska siinä arvosanat ovat kauempana jakauman keskikohdasta kuin luokassa 8A.
5. Sekä 8A-luokan että 8B-luokan keskiarvo on 7,7.
6.  $67,5\text{ °C}$
7. a) Sarjassa A vaihteluväli on 9–41 pistettä ja sarjassa B 30–35 pistettä.  
b) Sarja A on parempi, koska siinä pyrkijöiden erot tulevat paremmin esiin.
9. a) n. 1 800–3 100 kg/ha  
b) keskimääräinen hehtaarisato noin 2 700 kg/ha (2 600 kg/ha)  
c) Esimerkiksi: Vehnän hehtaarisato on vuonna 2013 noin 1 300 kg/ha enemmän kuin vuonna 2004. Suurin lisäys vehnän hehtaarisadossa oli vuonna 2005, jolloin hehtaarisato kasvoi edellisvuoteen verrattuna noin 1 000 kg/ha. Hehtaarisato oli yli 3 000 kg/ha vuosina 2008 ja 2013.

10. Keskkulutukset sataa ajokilometriä kohti olivat 5,8 l, 5,6 l ja 5,5 l. **a)** 5,5–5,8 l **b)** 0,3 l
11. Ehdokkaalla A kannatus oli välillä 46–50 % ja ehdokkaalla B välillä 50–54 %.
12. **a)** elokuussa (7,1 °C) **b)** 17,9 °C
13. **a)** 45,90–66,90 € **b)** 21,00 €
14. **a)** Poikien veikkaustulosten vaihteluväli on 0–7. **b)** Tyttöjen veikkaustulosten vaihteluväli on 1–6. **c)** Poikien veikkaustulosten vaihteluväli on suurempi.
15. **a)** 25–33 rusinaa **b)** 8 rusinaa **c)** 30 rusinaa **d)** 29 rusinaa
16. Ensimmäisessä havaintoaineistossa lukuja 7 on eniten ja lukuja 6 ja 8 yhtä paljon. Toisessa aineistossa lukuja 7 on eniten ja välillä 1–13 olevia lukuja siten, että lukujen keskiarvo on 7 ja suuruusjärjestyksessä keskimmäiset luvut (5. ja 6. luku) ovat molemmat 7.

**PULMA** luku 91

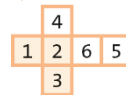
## 8 Tilastolaskuja

1. **a)** Venäjällä **b)** Kanadalla **c)** Norjalla **d)** hopeamitaleita
2. **a)** 22.1. **b)** 22.1. **c)** Kun ulkolämpötila laskee, energiankulutus lisääntyy.
3. **a)** 16,6 °C **b)** 14,2 °C **c)** 16,5 °C **d)** 14,2–19,1 °C **e)** 4,9 °C
4. **a)** 69–75 pistettä **b)** 72,5 pistettä
5. **a)** urheiluautoa **b)** sedan (tai vastaava) **c)** 26 % **d)** 2 %
6. **a)** 8 **b)** 8 **c)** 5–9 **d)** 7,5 **e)** kaksi arvosanaa yhdellä numerolla tai yksi arvosana kahdella numerolla
7. **a)** 27 cm **b)** n. 2,4 cm
8. Ne eivät kerro mitään yksittäisistä peleistä tai niiden tuloksista.
9. **a)** 9+ eli 9,25 **b)** 7,5
10. **a)** 5,5 **b)** 3–7 **c)** 0–5
11. **a)** 7,6 (7,64) **b)** 7,0 (7,05) **c)** 7,3 (7,35) **d)** 7,4 (7,38)
12. **a)** 9 **b)** 6 **c)** 6 ja 9 **d)** 7
13. **a)** Ei voida, koska ei tiedetä miesten ja naisten lukumääriä. **b)** Ei voida määrittää vaihteluväliä, koska ei tiedetä ylintä ja alinta palkkaa. **c)** Ei voida, koska ei tiedetä, mikä on suuruusjärjestyksessä keskimäinen palkka.
14. 13
15. 8,7
16. **a)** labradorinnoutaja **b)** 3 515 **c)** 7 516
17. **a)** 3,0 m **b)** 3,3 m

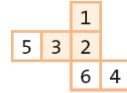
18. **a)** 13–24 oppilasta **b)** 16 oppilasta **c)** 16 oppilasta **d)** 17,6 oppilasta

19. 8A-luokassa on enemmän oppilaita.

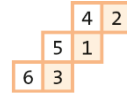
**PULMA a)**



**b)**



**c)**



## 9 Tietojen kerääminen

1. **a)** 200 mittaria **b)** 40 mittaria **c)**  $\frac{1}{5}$  eli 20 %
2. esim. tilastot vuoden aikana syntyneistä, maahan muuttaneista ja hintojen muutoksista
3.  $\frac{2}{25}$  eli 8 %
- 4.

Aihe	Kokonais-tutkimus	Otanta-tutkimus
puolueiden kannatusta mittaava kysely		×
suomalaisten liikunta-tottumukset		×
laadunvalvonta lampputehtaalla		×
asevelvollisten kutsunnat	×	

5. Tapa 1: antaa luotettavan kuvan asiasta, koska suullinen kysely itsessään paljastaa, osaavatko tulkittavat puhua.  
Tapa 2: antaa luotettavan kuvan asiasta, koska vanhemmat yleensä tietävät, osaavatko heidän lapsensa puhua.  
Tapa 3: ei anna luotettavaa kuvaa asiasta, koska yleensä 13–15-vuotiaat eivät muista, osasivatko he puhua 0–2-vuotiaina.
6. **a)** aakkosjärjestyksen 2., 6., 10., 14. jne. oppilas **b)** aakkosjärjestyksen 4., 8., 12., 16. jne. oppilas
7. **a)** D, koska sen toteutti tutkimuslaitos vain vähän ennen vaaleja ja siinä oli mukana satunnaisesti valittu joukko suomalaisia.

- b)** Esimerkiksi: A kertoo kannatuksen lehden levikkialueella, mutta tulos ei välttämättä ennusta vaalin lopputulosta. B on melko helppo toteuttaa, mutta kohdejoukko ei edusta kaikkia suomalaisia ja äänestys on tehty liian aikaisin. C on helppo toteuttaa, mutta kohdejoukko ei edusta kaikkia suomalaisia ja haastattelu on tehty liian aikaisin. D on luotettava, koska kohdejoukko edustaa kaikkia suomalaisia, mutta tutkimus on vaativa ja kallis.
- 9.** Otetaan koulun jokaisesta luokasta oppilaita arpomalla tai tasavälisellä otannalla aakkosjärjestyksessä yhteensä 50. Huolehditaan lisäksi, että otoksessa on suunnilleen oikeassa suhteessa tyttöjä ja poikia.
- 10.** Ei voida, koska asukkaiden terveydentila eri kaupunginosissa voi vaihdella. Tutkimus ei myöskään kerro mitään alle 18-vuotiaiden terveydentilasta.
- 11.** Otantatutkimus on järkevä tehdä, jos halutaan selvittää suuntaa antavasti nuorten mielipide johonkin asiaan. Kokonaistutkimus on järkevä tehdä, jos tutkimuksen kohteena olevia nuoria on vähän ja kysely voidaan toteuttaa kaikille nuorille kätevästi.
- 12. a)** ryhmän 12 oppilasta **b)** 4 oppilasta  
**c)**  $\frac{1}{3}$  eli noin 33,3 %
- 13.**  $\frac{1}{500}$  eli 0,2 %
- 14.** Kokonaistutkimuksessa tutkitaan koko perusjoukko, otoksen perustuvassa tutkimuksessa vain osa perusjoukosta.
- 15. a)** 15–19-vuotiaissa **b)** 33 % **c)** 61 %
- 18. a)** otantatutkimus **b)** kokonaistutkimus  
**c)** otantatutkimus **d)** kokonaistutkimus
- 19.** Pitäisi löytää kaikkia radiokuuntelijoita edustava otos ja toteuttaa heille kysely tai haastattelu. Virheitä syntyy, koska ihmiset eivät muista, mitä kanavaa he ovat kuunnelleet. Eri-ikäisiä ja eri väestönosia edustava otos voi olla vaikea poimia. Koska tutkimuslaitokset tekevät tällaisia tutkimuksia, voisi olla järkevää hankkia tuore tieto radiokanavien kuunteluosuuksista suoraan sieltä.
- 20.** Sitä tarvitaan, kun suunnitellaan esimerkiksi yhteiskunnassa tarjottavia palveluja tai kun ennustetaan yhteiskunnan tulevaa kehitystä.
- 21.** Oppilaat, varsinkin kiusaajat, eivät välttämättä kerro kiusaamisesta toiselle oppilaalle. Kaikki haastattelut pitäisi toteuttaa kahden kesken ja korostaa haastattelun luottamuksellisuutta.

**PULMA** esim.

3	8	4
1	9	2
5	7	6

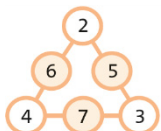
## 10 Kuvaajien ja tilastojen luotettavuus

- a)** jälkimmäistä  
**b)** Jälkimmäisessä kaaviossa vaaka-akselia on typistetty ja pystyakselia venytetty lisäämällä jaotusta.
- a)** jälkimmäistä  
**b)** Kaavioissa vaaka-akselin aikavälit on valittu siten, että ensimmäinen kaavio osoittaa hinnan pienenevää ja toinen kasvavaa kehitystä. Pystyakseleita on katkaistu ja jaotukset valittu tarkoitukseen sopivalla tavalla. Jälkimmäinen kaavio kertoo vain viimeisen vuoden suurentuneen hintakehityksen, vaikka pitkällä aikavälillä hintakehitys on ollut myös huonontuvaa.
- Kuvassa muutos näyttää todellista suuremmalta, koska kuvan pinta-ala nelinkertaistuu.
- Pystyakseli on katkaistu (ei ala nollasta). Pylväiden pitäisi alkaa nollasta eli olla kokonaan näkyvissä.
- Pylväs on kolmiulotteinen ja kaikki mitat suurennettu, jolloin muutos näyttää todellista isommalta.
- Asteikkoja typistetään, venytetään tai katkaistaan, käytetään kuvia tai kolmiulotteisia kaavioita.
- Ylemmässä kaaviosta vuosimuutokset näkyvät paremmin, alemmasta todelliset liikevaihdot eri vuosina. Ylempi kaavio antaa myönteisemmän kuvan yhtiöstä.
- a)** Ne, jotka eivät käytä vapaa-ajanviettopaikkoja, eivät tarvitse niitä lisää, vaikka niitä ei olisikaan tarpeeksi.  
**b)** Koulupäivät voivat olla enemmistön mielestä paitsi liian lyhyitä myös liian pitkiä mutta eivät sopivia.
- Suurin osa kyselyyn vastanneista ei ole nuoria, joten heillä ei välttämättä ole tietoa nuorten tarpeista ja mielipiteistä.
- Tulos ei ole käyttökelpoinen, koska jalkapallo-ottelun katsojat ovat kiinnostuneita myös tv-otteluista eivätkä siten edusta kaikkia television katselijoita.
- a)** Nuorisovaaleissa 72,6 % ja virallisissa vaaleissa 73,3 %.

b) Esimerkiksi: Molemmissa vaaleissa suosituin ehdokas oli Sauli Niinistö. Timo Soinin kannatus nuorisovaaleissa oli huomattavasti suurempi kuin virallisissa vaaleissa. Paavo Väyrysen kannatus virallisissa vaaleissa oli huomattavasti suurempi kuin nuorisovaaleissa.

12. Ei voi päätellä, koska luokassa tehty mielipidemittaus ei edusta kattavasti kaikkia Suomen äänioikeutettuja. Lisäksi otos on liian pieni.
13. Puolue A oli vaalien jälkeenkin suurempi puolue kuin puolue B. Puolueen B kannatus kasvoi yli nelinkertaiseksi, mutta puolueen A suosio laski.
14. a) Hajoamisajat vaihtelevat paljon ja ovat epämääräisiä, joten niitä on vaikea esittää minkään kaavion avulla.  
b) Hajoamisaikojen vaihteluväli on liian suuri eivätkä arvot ole täsmällisesti ilmoitettuja.
15. a) Kaksiulotteisessa kuvassa erot näyttävät todellisia eroja suuremmilta.  
b) Pullojen tilalle laitetaan samanlevyiset pylvää.
16. Uutinen vääristää todellisuutta, koska katkaistun pysty akselin vuoksi ero näyttää todellista suuremmalta.
17. Yhtiö esittelee ylempää kaaviota. Kaaviot ovat erilaisia, koska ylempi kuvaa todellista kurssikehitystä. Alemmassa kaaviossa pysty akseli on katkaistu ja vaaka-akselin aikaväliksi on otettu viimeinen vuosi.
18. Äänityskustannus näyttää todellista suuremmalta, koska kaaviosta on tehty kolmiulotteinen.
19. a) Tutkimus tehdään mahdollisimman lähellä sen julkaisua.  
b) Tutkimus tehdään mahdollisimman aikaisin tai käytetään aikaisempia tutkimuksia.
21. esim. ruoka-aineiden terveellisyyttä koskevilla tutkimuksissa sekä kauneuteen, terveyteen ja hyvinvointiin liittyvien tuotteiden mainonnassa
22. mainoksen sisältöön, kohdejoukkoon, mainostajaan, tietojen luotettavuuteen, omiin kokemuksiin jne.

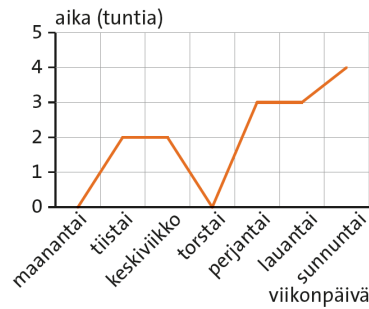
#### PULMA



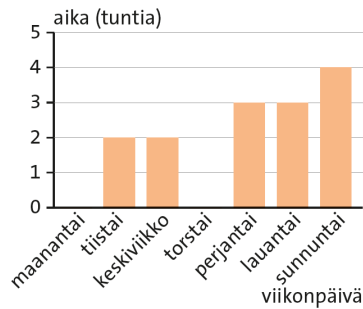
Jos ylimmissä ympyrässä olevaa arvoa merkitään  $x$ :llä, tulee vasempaan alanurkkaan luku  $6 - x$  ja oikeaan alanurkkaan  $5 - x$ . Alanurkissa olevien lukujen summa on 7, mistä saadaan yhtälö  $(6 - x) + (5 - x) = 7$ . Yhtälön ratkaisuksi saadaan  $x = 2$ , josta edelleen  $6 - x = 4$  ja  $5 - x = 3$ .

## 11 Viiva- ja pylväskaavion piirtäminen

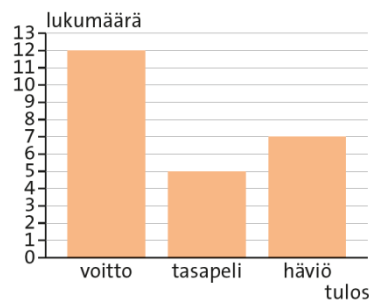
1.



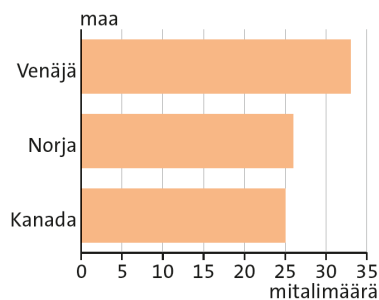
2.



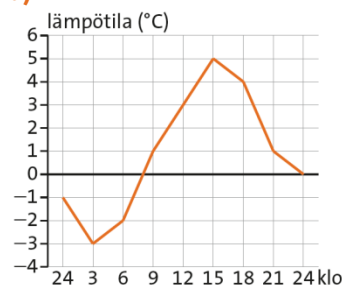
3.



4.

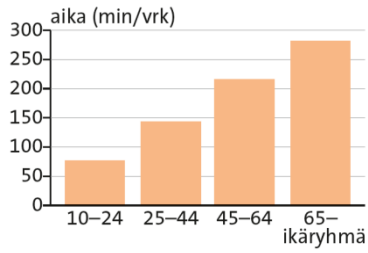


5. a)

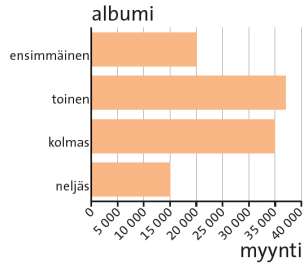


b) n. 1 °C

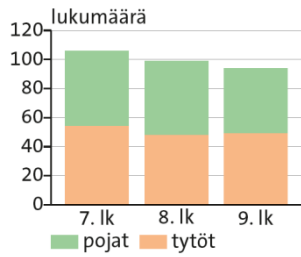
6.



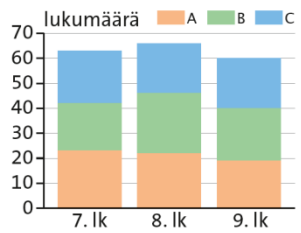
8.



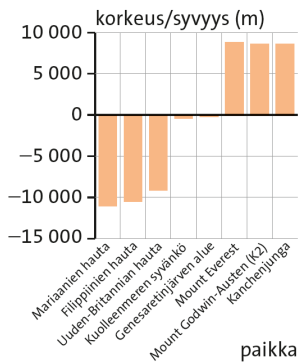
9.



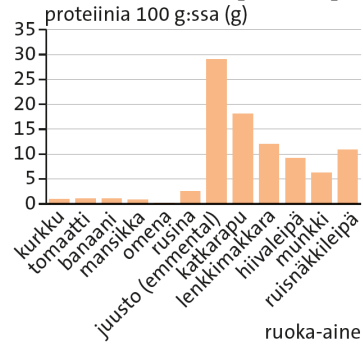
10.



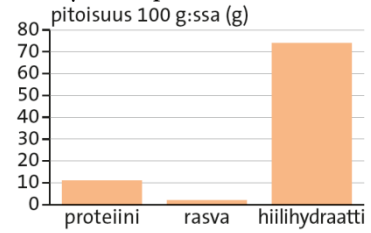
11.



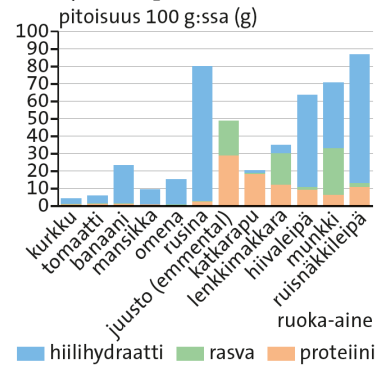
12. esim. ruoka-aineiden proteiinipitoisuus



ruisnäkkileivän proteiini-, rasva- ja hiilihydraattipitoisuus

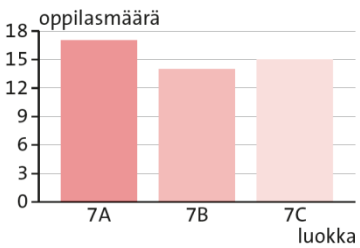


ruoka-aineiden proteiini-, rasva- ja hiilihydraattipitoisuudet



13. a) juusto b) munkki c) rusina

14.

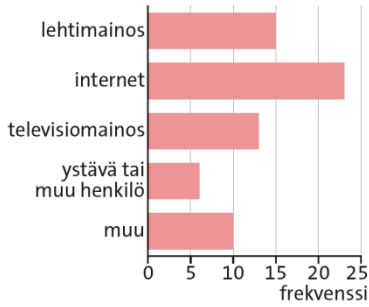


15. a)

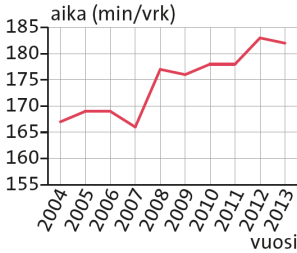


b) n. 1 cm (1,4 cm)

16.



17.



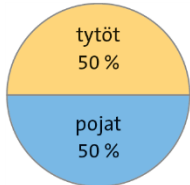
Esimerkiksi: Yli 10-vuotiaiden television katseluun käyttämä aika on 10 vuodessa jonkin verran lisääntynyt. Viimeisinä tarkasteluajan vuosina se on ollut hiukan yli 3 tuntia vuorokaudessa.

**PULMA** klo 14.45

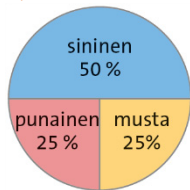
## 12 Ympyräkaavion piirtäminen

1. a)  $\frac{1}{10}$  b)  $\frac{3}{4}$  c)  $\frac{2}{5}$  d)  $\frac{3}{8}$

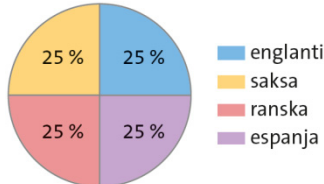
2. a)



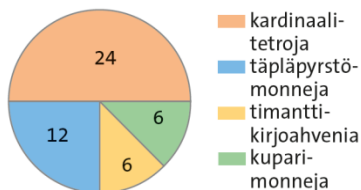
b)



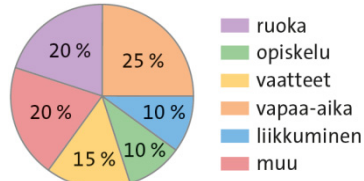
c)



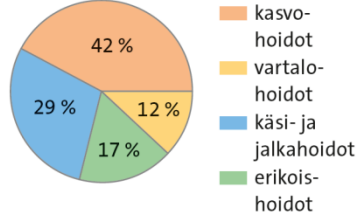
3.



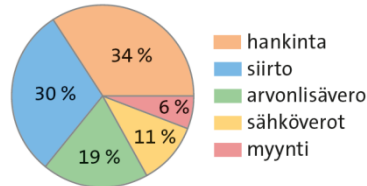
4.



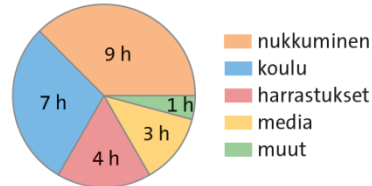
5.



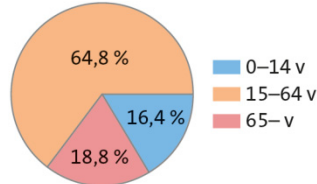
6.



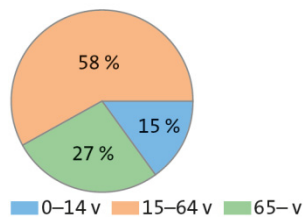
7.



8.

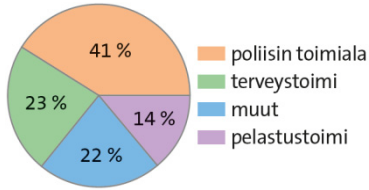


9.

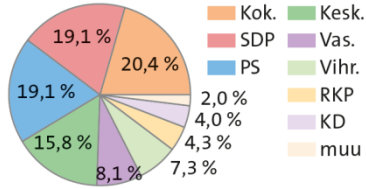


15-64-vuotiaiden osuus on yli puolet väestöstä. 65 vuotta täyttäneiden osuus on yli neljäsosa ja 0-14-vuotiaiden osuus vajaa kuudesosa väestöstä. 65 vuotta täyttäneiden osuus on enemmän kuin esimerkiksi vuonna 2012 (vrt. tehtävä 8). 0-14-vuotiaiden ja 15-64-vuotiaiden osuudet ovat vastaavasti pienemmät kuin vuonna 2012.

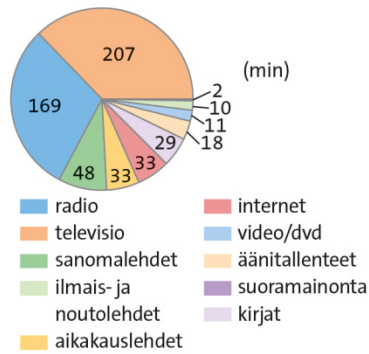
11.



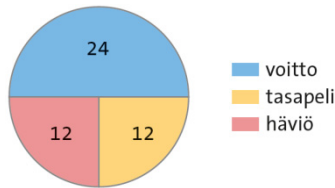
12.



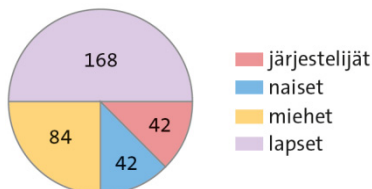
13.



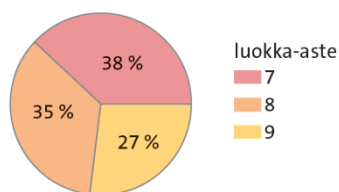
14.



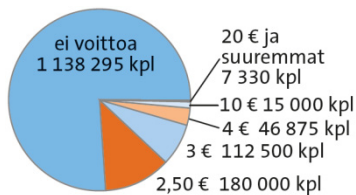
15.



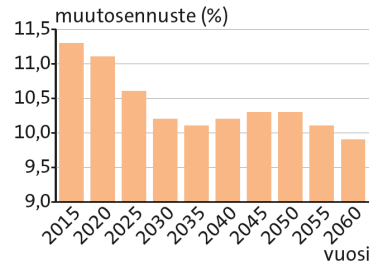
16.



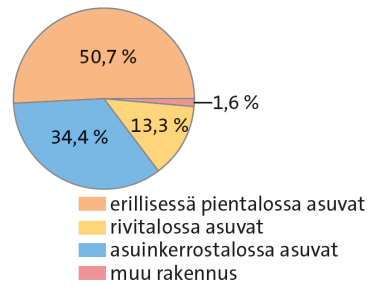
18.



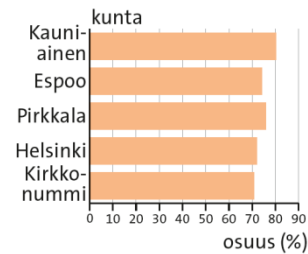
20. esim.



21. esim.



22. esim.



PULMA  $69 (= 4^3 + 5)$

### 13 Luokittelu

1.

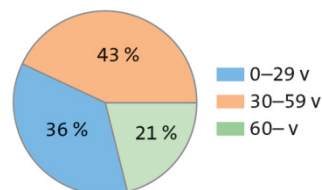
Hinta (€)	Lukumäärä
25,00–29,99	2
30,00–34,99	4
35,00–39,99	3
40,00–44,99	1

2. a) ikäryhmässä 35–39-vuotiaat

b) n. 69 %

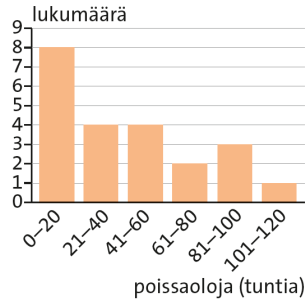
c) Iän vuoksi he eivät ole ehtineet kouluttautua.

3.



4.

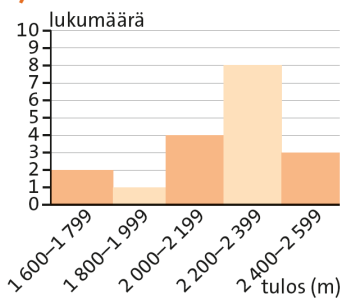
Poissaoloja (tuntia)	Lukumäärä
0-20	8
21-40	4
41-60	4
61-80	2
81-100	3
101-120	1



5. a)

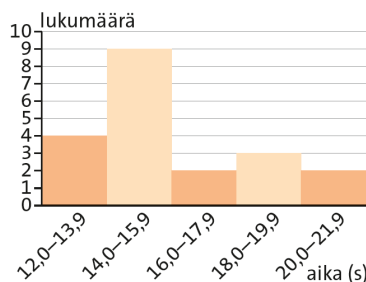
Tulos (m)	Lukumäärä
1 600-1 799	2
1 800-1 999	1
2 000-2 199	4
2 200-2 399	8
2 400-2 599	3

b)



6.

Aika (s)	Lukumäärä
12,0-13,9	4
14,0-15,9	9
16,0-17,9	2
18,0-19,9	3
20,0-21,9	2



7. a) 15 ajoneuvoa b) 70 ajoneuvoa c) 41-50 km/h

8. a) 0-14-vuotiaiden lasten määrä on vuodesta 2002 vuoteen 2006 hiukan suurentunut mutta alkanut sen jälkeen vähentyä.

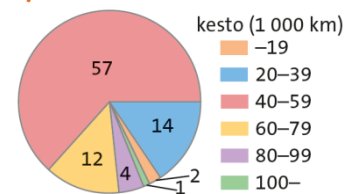
b) 15-64-vuotiaiden määrä on vuodesta 2002 vuoteen 2006 kasvanut voimakkaasti mutta alkanut sen jälkeen vähentyä.

c) 65 vuotta täyttäneiden määrä on lisääntynyt vuodesta 2002 vuoteen 2006 ja vuodesta 2010 vuoteen 2014 mutta vähentynyt vuodesta 2006 vuoteen 2010.

d) n. 5 800 asukasta

e) Kuntaan on muuttanut vuosien 2002 ja 2006 välillä väestöä, mutta sen jälkeen varsinkin lapsiperheitä on muuttanut pois. Vanhustyöväestön määrä on ikääntymisen vuoksi kasvanut myös vuosien 2010 ja 2014 välillä.

9. a)

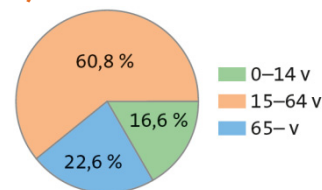


b) 16 rengasta

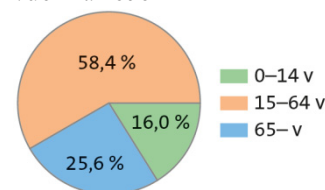
c) 5,6 %

d) 40 000-59 000 km

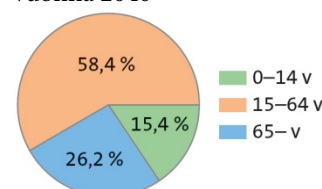
10. a) vuonna 2020



vuonna 2030



vuonna 2040

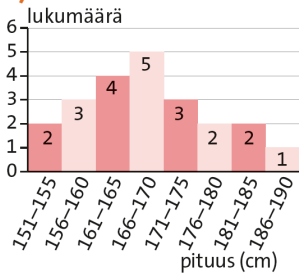


b) Esimerkiksi: 0-14-vuotiaiden osuus vähenee koko tarkastelujakson ajan. 15-64-vuotiaiden osuus vähenee aluksi, mutta pysyy sitten yhtä suurena. 65 vuotta täyttäneiden osuus kasvaa koko tarkastelujakson ajan.

12. a)

Pituus (cm)	Lukumäärä
151–155	2
156–160	3
161–165	4
166–170	5
171–175	3
176–180	2
181–185	2
186–190	1

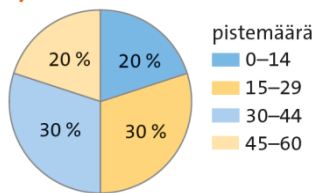
b)



13. a)

Pistemäärä	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)
0–14	4	20
15–29	6	30
30–44	6	30
45–60	4	20

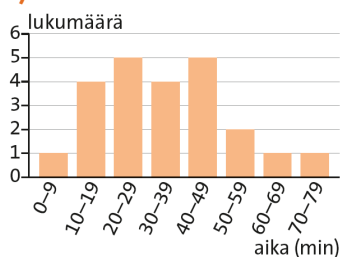
b)



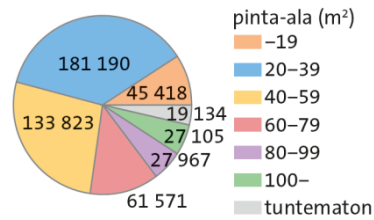
14. a)

Aika (min)	Lukumäärä
0–9	1
10–19	4
20–29	5
30–39	4
40–49	5
50–59	2
60–69	1
70–79	1

b)



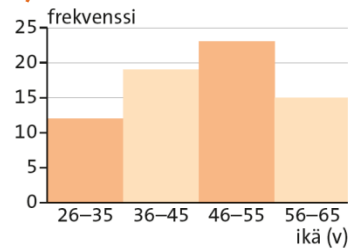
15.



16. On käytetty ei-tasavälistä luokittelua, koska eripituisia lyhyitä tuomioita on paljon ja tuomioiden pituuden vaihteluväli ulottuu alle kuukauden pituisista tuomioista elinkautisiin vankeustuomioihin.

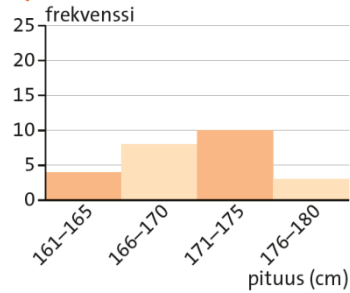
17. a) n. 47 vuotta (46,9 vuotta)

b)



18. a) n. 170 cm (170,4 cm)

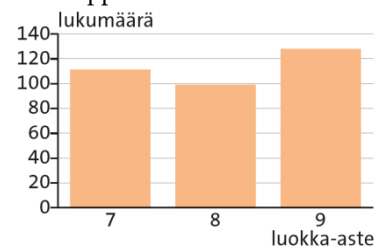
b)



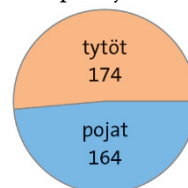
PULMA n. 60 000 lasta

## 14 Tilastotutkimuksen tekeminen

1. esim. oppilaat eri luokka-asteilla



sukupuolijakauma



Sukupuolen tyyppiarvo on tytöt. Luokka-asteen tyyppiarvo on 9. luokka. Läksyjen teon ja television katselun mediaaaniajat ovat 30 min – 1 h. Kotitöiden mediaaaniaika on 15–30 min. Kyselyyn vastasi 338 oppilasta, joista 174 on tyttöjä ja 164 poikia. Kyselyyn vastanneista 111 oppilasta on 7. luokalla, 99 oppilasta 8. luokalla ja 128 oppilasta 9. luokalla.

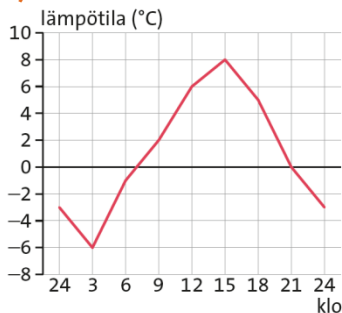
**PULMA** 36. päivänä (35. yön jälkeen)

## 15 Kertaus

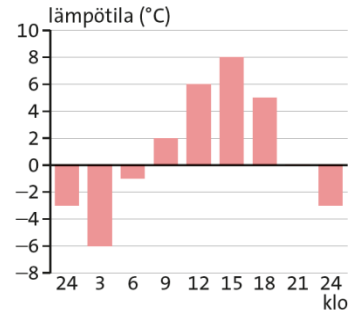
- Niiden avulla voidaan kertoa olennaiset asiat tiiviisti ja havainnollisesti.
- Esimerkiksi: Vuosittainen kasvu on vaihdellut noin 18 cm:stä noin 39 cm:iin. Männyin kasvu on ollut suurin 7. vuotena. Keskimääräinen vuosikasvu on ollut noin 25 cm. Kasvu on ollut yli 30 cm yhtenä ja alle 20 cm kahtena vuotena.
- a) elokuussa b) heinäkuussa
- a) nukkumiseen b) 20,3 %
- 

Koko	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi (%)
XS	2	8
S	8	32
M	9	36
L	6	24

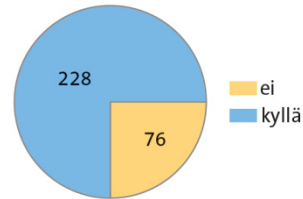
- 23
- 7,4 (7,42)
- a) 8 b) 8
- a) 10–15 b) 2–21 c) 5 d) 19
- a) 159 cm b) 158 cm (157,9 cm)
- a) otantatutkimus b) kokonaistutkimus c) kokonaistutkimus d) otantatutkimus
- Pystyakseli on katkaistu, jolloin erot vuosien välillä näyttävät todellista suuremmilta.
- a)



b)



14.



15. esim.

Pituus (s)	Frekvenssi
170–189	2
190–209	9
210–229	3
230–249	2

17. a) 8,3 (8,25) b) 9 arvosanaa

## 16 Vähintään vai enintään?

- a) kyllä b) kyllä c) ei
- a) 2 b) 3
- a) 10 b) 8
- a) kolmannen b) neljännen c) viidennen
- a) 2 b) 3
- a) 4 b) 5
- a) kyllä b) eivät
- a) kahdella heitolla b) seitsemällä heitolla c) joka heitolla voi tulla eri silmäluku
- a) 5 b) 14
- a) on b) ei välttämättä
- a) 6 b) 21
- a) 64 b) 48
- a) ei b) on c) on ja välttämättä onkin
- a) 2 b) 0
- a) 1 b) 0
- a) 1 b) 3
- a) 2 b) 4
- a) 3 b) 5 c) 13
- a) 8 b) 13 c) 32
- a) 1 b) Ei voida sanoa, sillä pelissä voi tulla myös tasapeli.
- On, sillä jokainen tekee yhdestä neljään kättelyä ja jos viisi kättelijää jaetaan kättelyjen määrän mukaan neljään ryhmään, on johonkin ryhmästä tultava vähintään kaksi henkilöä.

22. a) ei välttämättä b) pitää c) ei pidä d) ei pidä

23. Pitää paikkansa. Tulos nähdään esimerkiksi tutkimalla kaikki vaihtoehdot.

**PULMA** 12-vuotias

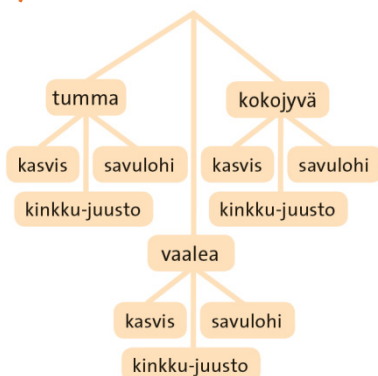
## 17 Tosi vai epätosi?

- a) kyllä b) ei c) ei d) ei
- a) kyllä b) kyllä c) kyllä d) ei
- a) ei b) kyllä c) kyllä
- a) epätosi b) tosi c) epätosi
- a) epätosi b) tosi c) epätosi
- a) epätosi b) tosi c) epätosi
- a) tosi b) tosi c) tosi
- a) epätosi b) epätosi c) tosi
- a) tosi b) epätosi c) tosi
- a) ei b) ei c) kyllä d) kyllä
- a) epätosi b) epätosi c) tosi d) tosi
- a) kyllä b) kyllä c) ei
- a) tosi b) epätosi
- a) tosi b) tosi
- a) epätosi b) tosi c) tosi
- a) epätosi b) tosi c) tosi
- a) epätosi b) tosi c) epätosi
- a) epätosi b) tosi c) epätosi d) epätosi
- a) 1 b) 0 c) 1
- a) 0 b) 1 c) 1
- a) 1 b) 0
- a) 0 b) 1

**PULMA** Fannylla on 56 euroa ja Ilmarilla 40 euroa.

## 18 Vaihtoehtojen lukumäärä

- a) mustat housut ja harmaa paita, mustat housut ja keltainen paita, mustat housut ja pinkki paita, siniset housut ja harmaa paita, siniset housut ja keltainen paita sekä siniset housut ja pinkki paita b) 6
- a)



- b) 9
- a) 1 b) 3 c) 6
  - a) 12 b) 12 c) 24

5. a) SUO, SOU, USO, UOS, OSU ja OUS

b) OHI, OIH, HOI, HIO, IOH ja IHO

c) LOL, LLO ja OLL

6. a) 20 b) 30 c) 42

7. a) 5 b) 15

8. a) 4 b) 8 c) 12

9. a) 4 b) 6 c) 8

10. a) 11 b) 16

11. a) 5 b) 8

12. a) 11 b) 132

13. a) 6 b) 27

14. a) 6 b) 18

15. a) 9 b) 6 c) 6

16. a) 56 b) 28

17. a) 6 b) 2 c) 3

18. a) 6 b) 90

19. a) 20 b) 25

20. a) 3 b) 6 c) 48

21. a) 15 b) 120

**PULMA**

11	6	7
4	8	12
9	10	5

## 19 Tuloperiaate

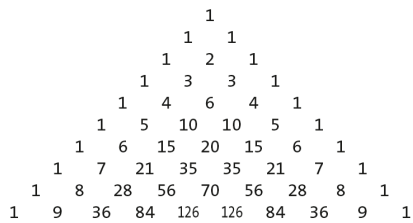
- a) 12 b) 6
- a) 2 b) 6 c) 24
- a) 6 b) 36
- a) 30 b) 24 c) 20
- a) 100 b) 1 000 c) 10 000
- a) 6 b) 3 c) 3
- a) 9 b) 27 c) 81
- a) 15 b) 20 c) 60
- a) 9 b) 400 c) 80
- a) 16 b) 64 c) 256
- 10 000 000
- 1 594 323
- a) 9 b) 27 c) 81
- a) 17 576 000 b) 15 818 400
- a) 10 b) 40 c) 90
- a) 20 b) 180 c) 380
- a) 10 000 b) 100 000 c) 100 000 000
- a) 40 b) 80
- a) 3 125 b) 120
- a) 24 b) 720 c) 3 628 800
- a) 36 b) 256 c) 120
- a) 1 b) 2 c) 720 d) 6 227 020 800
- a) 362 880 b) 3 628 800  
c) b-kohdan vastaus saadaan kertomalla a-kohdan vastaus kymmenellä
- a) 3 628 800 b) 87 178 291 200

25. 12

**PULMA** 1-vuotias

## 20 Valitaan vain osa

- a) 3 b) 6 c) 6
- a) 6 b) 6
- a) 1 b) 6 c) 15
- a) 6 b) 12
- a) 3 b) 6
- a) 210 b) 380 c) 600
- a) 105 b) 190 c) 300
- a) 16 b) 24
- a) 120 b) 360 c) 720
- a) 132 b) 1 320 c) 95 040
- a) 120 b) 210 c) 720
- a) 276 b) 780 c) 1 326
- a) 4 294 967 296 b) 518 918 400
- a) 4 b) 12 c) 18
- a) 42 b) 24 c) 72
- a) 6 b) 24 c) 60
- a) 10 b) 28 c) 45
- a) 210 b) 2 520
- a) 66 b) 276
- a) 360 b) 1 296
- a) 1, 5, 10, 10, 5, 1  
b)



22. a) 1 b) 35 c) 126 d) 0

**PULMA** a) 8 minuuttia b) 16 minuuttia

## 21 Todennäköisyys

- a) punainen b) violetti
- A, D, B ja C
- C, A, D ja B
- C, A, D ja B tai C, D, A ja B
- häviö
- a) 75 % b) 20 % c)  $\frac{1}{2}$
- a) 85 % b) 58 % c)  $\frac{1}{4}$
- a) epätosi b) tosi c) tosi
- a) ei b) on c) ei d) yhtä todennäköistä
- a) onnenpyörällä 2  
b) onnenpyörällä 1 ja onnenpyörällä 3
- a) ei b) 121

12. a) mustan b) punaisen c) 16

13. a) alle b) alle c) puolet

14. a) raidallisia 3, harmaita 1 ja turkooseja 1  
b) raidallisia 1, harmaita 2 ja turkooseja 2

15. a) 2 b) 7 c) 4

16. B, C, A, D

17. a) 65 % b) 35 %

18. a) alle b) yli c) alle d) alle e) yli f) puolet

19. esim.

a) Kuu kiertää Maata.

b) Suomeen putoaa meteoriitti.

20. Vastaus riippuu vuodenajasta, vallitsevasta säästä ja niin edelleen.

**PULMA** S = 9, E = 5, N = 6, D = 7, M = 1,  
O = 0, R = 8 ja Y = 2. Laskut olivat  
95,67 € + 10,85 € = 106,52 €.

## 22 Klassinen todennäköisyys

1. a) 1 b) 2 c) 50 %

2. a) 4 b) 15 c)  $\frac{4}{15}$

3. a) 50 % b) 50 %

4. a) 20 % b) 40 % c) 40 % d) 60 %

5. a)  $\frac{4}{21}$  b)  $\frac{5}{21}$  c)  $\frac{1}{21}$

6. a) 30 % b) 30 % c) 20 %

7. a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{13}$  c)  $\frac{1}{4}$

8. a)  $\frac{1}{52}$  b)  $\frac{2}{13}$  c)  $\frac{3}{52}$

9. a) 9 % b) 55 % c) 9 %

10. a)  $\frac{13}{49}$  b)  $\frac{2}{49}$  c)  $\frac{11}{49}$  d)  $\frac{1}{7}$

11. a) 50 % b) 20 % c) 100 % d) 0 %

12. a) 20 % b)  $\frac{19}{99}$  c)  $\frac{10}{49}$

13. a) 0 b)  $\frac{1}{13}$  c)  $\frac{2}{7}$  d) 1

14. a)  $\frac{5}{11}$  b) 11, 22, 33, ...

15. a)  $\frac{1}{4} = 25\%$  b)  $\frac{7}{20} = 35\%$  c)  $\frac{2}{5} = 40\%$

16. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{2}{3}$  c)  $\frac{5}{6}$

17. esim.

a) KATTO b) SUSI c) VYÖ

18. a) 1 = 100 % b)  $\frac{1}{5} = 20\%$  c)  $\frac{1}{11}$

19. a) 0 = 0 % b) 1 = 100 % c)  $\frac{1}{50} = 2\%$

20. a) 40 % b) 20 % c) 30 %

21. a) 50 % b) 100 % c) 75 %

22. a)  $\frac{7}{12}$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{11}{12}$

**PULMA** 12 kilometriä. Kävelijät ehtivät kävellä ennen kohtaamistaan 0,75 h = 45 min, jona aikana koira juoksee  $0,75 \text{ h} \cdot 16 \text{ km/h} = 12 \text{ km}$ .

### 23 Arpa on heitetty

1. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{6}$  c)  $\frac{1}{6}$

2. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{3}$  c)  $\frac{2}{3}$

3. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{6}$  c) 0

4. a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{3}$  c) 1

5. a)  $\frac{2}{3}$  b)  $\frac{1}{2}$  c) 1

6. a)  $\frac{3}{4}$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{3}{8}$  d)  $\frac{3}{10}$  e)  $\frac{1}{4}$  f)  $\frac{3}{20}$

7. a)  $\frac{1}{9}$  b)  $\frac{1}{36}$  c) 0

8. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{5}{18}$  c)  $\frac{23}{36}$

9. a)  $\frac{11}{36}$  b)  $\frac{1}{6}$  c)  $\frac{1}{18}$

10. a)  $\frac{2}{3}$  b)  $\frac{11}{36}$

11.  $\frac{8}{9}$

12. a)  $\frac{5}{36}$  b)  $\frac{5}{36}$  c)  $\frac{1}{36}$

13. a)  $\frac{25}{36}$  b)  $\frac{5}{18}$  c)  $\frac{11}{36}$

14. a) ei b) on

15. a) ei b) kyllä

16. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{5}{6}$  c)  $\frac{1}{2}$

17. a) 7 b)  $\frac{5}{12}$  c)  $\frac{1}{2}$

18. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{7}{12}$

19. a)  $\frac{5}{12}$  b)  $\frac{7}{12}$

20. a)  $\frac{1}{1296}$  b)  $\frac{1}{216}$  c)  $\frac{11}{36}$

21. a)  $\frac{11}{36}$  b)  $\frac{11}{18}$

22. a)  $\frac{1}{36}$  b)  $\frac{35}{36}$  c)  $\frac{13}{36}$

23. Taidolla ei ole merkitystä.

**PULMA**  $x = 3$

### 24 Peräkkäiset tapahtumat

1. a)  $\frac{1}{4}$  b)  $\frac{1}{4}$

2. a)  $\frac{1}{36}$  b)  $\frac{1}{36}$

3. a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{2}$

4. a)  $\frac{1}{49}$  b)  $\frac{1}{7}$  c)  $\frac{6}{7}$

5. a) 42 % b) 14 % c) 8 % (8,4 %)

6. a) 28 % b) 56 % c) 34 % (33,6 %)

7. a) 12 % b) 10 % (9,6 %)

8. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{5}{6}$

9. a)  $\frac{1}{4096}$  b)  $\frac{1}{1680}$

10. a)  $\frac{1}{216}$  b)  $\frac{125}{216}$  c)  $\frac{91}{216}$

11. a)  $\frac{4}{7}$  b)  $\frac{2}{3}$  c) 1 d)  $\frac{2}{3}$

12. a)  $\frac{1}{12}$  b)  $\frac{1}{12}$

13. a)  $\frac{5}{21}$  b)  $\frac{1}{5}$  c)  $\frac{1}{105}$

14. a) 0 b) 0 c) 1

15. a)  $\frac{1}{8}$  b)  $\frac{1}{8}$

16. a)  $\frac{1}{4}$  b)  $\frac{1}{16}$  c)  $\frac{1}{64}$

17. a)  $\frac{1}{64}$  b)  $\frac{1}{16}$  c)  $\frac{27}{64}$

18. a)  $\frac{1}{36}$  b)  $\frac{5}{9}$

19. a) 60 % b) 36 % c) 4 % d) 64 %

20. a)  $\frac{1}{20}$  b)  $\frac{2}{105}$  c) 0

21. a) 778 b) 71 c) 8

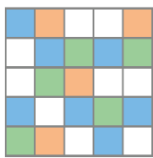
22. a) 66 b) 6 c) 10

**PULMA** 2 000

## 25 Tilastollinen todennäköisyys

1. a) 15 % b) 85 %
2. a) 51 % b) 49 %
3. a) 7 % b) 44 % c) 12 %
4. a) Aasiaan b) Oseaniaan
5. a) 6 % (5,9 %) b) 57 % (56,8 %)  
c) 73 % (72,6 %) d) 9 % (9,4 %)
6. a) 20 % b) 50 % c) 80 %
7. a) 25 % b) 50 % c) 10 %
8. a) 51 % b) 49 %
9. a) 26 % b) 12 %
10. a) 47 % (46,7 %) b) 52 % c) 10 %
11. a) 6 % b) 19 % c) 75 %

16. esim.



17. a) häviö b) n. 38 %
  18. a) 8 % b) 3 % c) 47 %
  20. a) 14 % b) 46 % c) 1 %
  22. a) 15 % b) 85 %
  23. a)  $a = 0$  ja  $b = 100$   
b) Erittäin varma, mutta ei kuitenkaan täysin varma.
- PULMA** a) 0 b) 0

## 26 Kertaus

1. a) 2 b) 13
2. a) ei ole b) on c) on
3. a) 8 b) 24
4. a) 3 b) 6
5. a) 12 b) 12 c) 12
6. a) 6 b) 120
7. a) voitto kivi–paperi–sakset-pelissä  
b) yhtä todennäköisiä  
c) saada arpakuutiolla ykkönen
8. nelinkertainen
9. a)  $\frac{3}{5}$  b)  $\frac{2}{5}$  c) 100 % d)  $\frac{3}{5}$
10. a)  $\frac{1}{6}$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{2}{15}$  d)  $\frac{4}{5}$
11. a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{2}{3}$
12. a) 25 % b) 100 %
13. a) 7 % b) 66 %
14. a) 1 000 b) 200
15. on
16. a) n. 30 % b) n. 29 %
17. 3–0, 3–1 ja 3–2
18. a)  $\frac{1}{216}$  b)  $\frac{1}{16}$  c)  $\frac{5}{18}$
19. a) ainakin kolmella  
b) ei välttämättä yhtään
20. 10 077 696

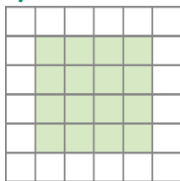
# 1 Yhdenmuotoisuus ja trigonometria

## 1 Yhdenmuotoisuus

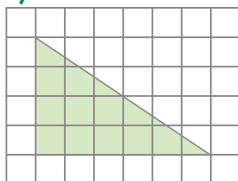
- ovat
- eivät ole
- Kolmiot eivät ole keskenään yhdenmuotoisia, koska niiden toisiaan vastaavat kulmat eivät ole yhtä suuria.
- a)** Kulma  $D$    **b)** Sivun  $EF$    **c)** Sivun  $DF$
- Kuviot A ja G, kuviot B ja C, kuviot E ja I sekä kuviot H ja J.
- a)** 3:1   **b)** 3:1
- $x = 22,5$  m
- $x \approx 2,9$  cm
- a)** Sivun  $DE$  pituus on 10,0 cm ja sivun  $BC$  3,0 cm.  
**b)**  $\alpha = 37^\circ$ ,  $\beta = 53^\circ$  ja  $\gamma = 90^\circ$
- 7,2 m
- $x \approx 1,4$  cm
- Sivun  $AB$  pituus on 2,2 cm.
- $4,0 \text{ m} \times 3,0 \text{ m}$
- Ovat, koska kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuria ja lisäksi vastinsivujen pituuksien suhteet ovat samat.
- kuviot A ja G, kuviot C, H ja I ja kuviot E ja F
- 9 m
- a)** Sivun  $JK$  pituus on 4,2 cm, ja sivun  $NL$  pituus on 10,0 cm.  
**b)** Kulman  $J$  suuruus on  $76^\circ$ , kulman  $N$   $51^\circ$  ja kulman  $L$   $53^\circ$ .
- $x \approx 2,3$  cm
- $x = 3,2$  cm ja  $y = 2,4$  cm
- PULMA** 20 senttiä

## 2 Suurennot ja pienennökset

1. **a)**

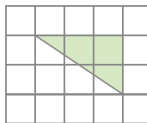


**b)**

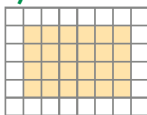


- a)** 4,4 cm   **b)** 8,8 cm   **c)** 22 cm
- a)** 8 cm   **b)** 4 cm   **c)** 1,6 cm

4.

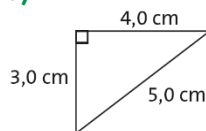


- a)** muurahainen, leppäkerttu ja sokeritoukka  
**b)** n. 4 mm, n. 6 mm ja n. 13 mm (ilman tuntosarvia)
- a)** merilokki, merikotka ja kuningasalbatrossi  
**b)** Merilokin siipiväli on n. 1,5 m, merikotkan n. 2,1 m ja kuningasalbatrossin n. 3,3 m.
- a)** Kulmien suuruudet eivät muutu.  
**b)** Kulmien suuruudet eivät muutu.
- a)** Kulman  $D$  suuruus on  $80^\circ$ , kulman  $E$   $52^\circ$  ja kulman  $F$   $48^\circ$ .  
**b)** kahdesosaan  
**c)** Sivun  $DF$  pituus on 16 cm ja sivun  $BC$  40 cm.
- a)** 50-kertainen   **b)** n.  $2,2 \text{ m}^2$
- kahdeksankertaiseksi
- a)**



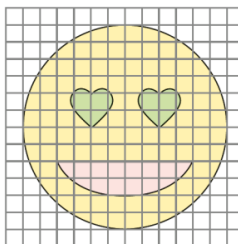
**b)** 6 ja 4 ruudunsivua

12. **a)**



**b)** 3,0 cm, 4,0 cm ja 5,0 cm

- Hyönteisen pituus on noin 1,1 mm.
- 12 cm
- 25-kertainen
- 16.



- Osien pituudet ovat 1,15 m (1,146 m) ja 1,85 m (1,854 m).
- 49 cm
- a)** 55, 89, 144, 233 ja 377  
**b)** Osamäärä lähestyy kultaisen leikkauksen jakosuhdetta 0,618.
- a)** Se on 0,618 eli kultaisen leikkauksen jakosuhte.  
**b)** Lausekkeen arvon käänteisluku on yhtä suuri kuin lausekkeen arvo + 1.
- PULMA** 2 tuntia jäljessä

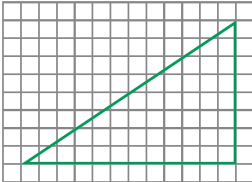
### 3 Mittakaava

- a) 5:1 b) 1:4
- 1:2
- a) suurennos b) pienennös  
c) pienennös d) suurennos

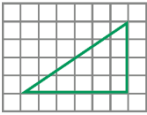
4. a)



b)



c)



- 1:1
- a) Kanta on 8 ja korkeus 6 ruudunsivua.  
b) Kanta on 32 ja korkeus 24 ruudunsivua.  
c) Kanta on 4 ja korkeus 3 ruudunsivua.
- Varaston pituus on 7,5 m.
- Auton pituus on 4,7 m (470,4 cm).
- 890 cm<sup>2</sup>
- a) nelinkertaiseksi  
b) yhdeksänkertaiseksi  
c) neljäsosaksi
- a) 6:1 b) 1:8
- a)
  - 
  - 
  -
- a) Kanta on 10 ja korkeus 8 ruudunsivua.  
b) Kanta on 40 ja korkeus 32 ruudunsivua.  
c) Kanta on 5 ja korkeus 4 ruudunsivua.
- Tenniskentän pituus on 24,4 m, leveys 11,1 m ja pinta-ala 271 m<sup>2</sup>.
- PULMA** 32-vuotias

### 4 Mittakaavan sovelluksia

1.

Matka kartalla	Matka luonnossa
1,0 cm	250 m
3,0 cm	750 m
4,0 cm	1 000 m
14 cm	3 500 m
25 cm	6 250 m

- a) 5 m b) 150 m c) 500 m
- A-4, B-2, C-3 ja D-1
- a) pienennös b) suurennos  
c) pienennös d) suurennos
- a) 450 m b) 900 m c) 675 m
- a) 300 m b) 1,2 km c) 2,2 km
- a) 120 cm × 60 cm  
b) 160 cm × 80 cm  
c) 120 cm × 60 cm
- 595 km
- 340 km
- 13 m
- a) 175 cm b) 75 cm c) 80 cm
- 1:300 000
- 1:60
- a) n. 1,1 km b) n. 400 m
- a) 360 m b) 270 m c) 260 m

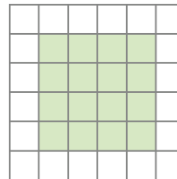
17.

Matka kartalla	Matka luonnossa
1,0 cm	150 m
3,0 cm	450 m
10,0 cm	1 500 m
20,0 cm	3 000 m
25,0 cm	3 750 m

- a) 200 m b) 500 m c) 2,5 km d) 10 km
- a) n. 2 km b) n. 2,3 km
- 260 km (255 km)
- n. 0,002 mm = 2 μm
- a) 1:50 b) 1:60
- PULMA** a) on b) ei

### 5 Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-ala

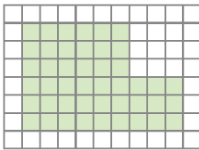
1.



Alkuperäisen neliön pinta-ala on 4 ruutua ja suurennetun 16 ruutua.

- a) 2:1 b) nelinkertainen
- a) 16:1 b) 25:1

4. a) neljäsosa b)  $80 \text{ cm}^2$   
 5. a) yhdeksänkertainen b)  $72 \text{ cm}^2$   
 6.  $2\,000 \text{ m}^2$   
 7. a) viisinkertainen b) 25-kertainen  
 8. a) Pinta-ala kasvaa nelinkertaiseksi.  
 b) Pinta-ala kasvaa yhdeksänkertaiseksi.  
 c) Pinta-ala pienenee neljäsosaan.  
 9. Julisteen pinta-ala on  $2\,400 \text{ cm}^2$ .  
 10. a) kolminkertaiseksi b) nelinkertaiseksi  
 c) 10-kertaiseksi d) 12-kertaiseksi  
 11. a) 4:1 b) 1:5 c) 2:3  
 12.  $810 \text{ cm}^2$   
 13. a)  $2,6 \text{ m}^2$  b)  $19 \text{ m}^2$   
 14.

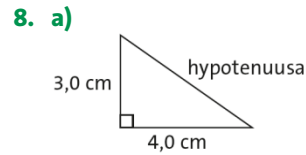


Ruutujen lukumäärä kasvaa yhdeksänkertaiseksi.

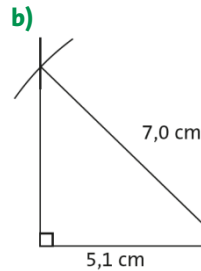
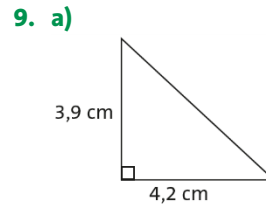
15. a) 16-osa b)  $160 \text{ cm}^2$   
 16. a) seitsemänkertaiseksi  
 b) kahdeksänkertaiseksi  
 c) yhdeksänkertaiseksi  
 17. a) 36:1 b) 64:1 c) 1:49 d) 1:81  
 18. Taulun pinta-ala on  $720 \text{ cm}^2$ .  
 19. 2,25-kertainen  
 20. 75 %  
 21. 4:1  
 22. a) 1:2 b) 50 %  
**PULMA** 20 eläintä

## 6 Pythagoraan lause

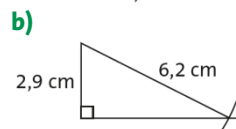
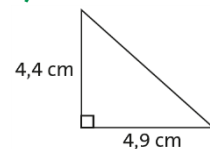
1. a) Kateetteja ovat sivut  $a$  ja  $b$ .  
 Hypotenuusa on sivu  $c$ .  
 b) Kateetteja ovat sivut  $x$  ja  $z$ .  
 Hypotenuusa on sivu  $y$ .  
 2. a) Kateetteja ovat sivut  $t$  ja  $v$ .  
 Hypotenuusa on sivu  $u$ .  
 b) Kateetteja ovat sivut 30 ja 40.  
 Hypotenuusa on sivu 50.  
 3. a) 10 cm b) 6 cm ja 8 cm  
 4. a) X b) 1 c) X  
 5. a)  $10^2 + 4^2 = x^2$  b)  $x^2 + 23^2 = 41^2$   
 6. a)  $13^2 + 12^2 = i^2$  b)  $x^2 + 9^2 = 12^2$   
 7. a) Kolmion  $ADC$  hypotenuusa on sivu  $AC$  ja  
 kolmion  $CDB$  sivu  $BC$ .  
 b) Kolmion  $ADC$  kateetit ovat sivut  $AD$  ja  $CD$  ja  
 kolmion  $CDB$  sivut  $BD$  ja  $CD$ .



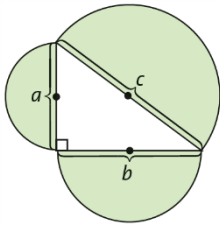
b) 5,0 cm



10. a) Tosi. Sivun  $a$  on suorakulmaisen kolmion  
 pisin sivu.  
 b) Epätosi. Suorakulmaisen kolmion kateetteja  
 ovat sivut  $b$  ja  $c$ .  
 c) Tosi. Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien  
 neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan  
 neliö.  
 11. Kolmion sivut toteuttavat Pythagoraan lauseen, sillä  
 $6^2 + 8^2 = 10^2$ .  
 12. a)  $o^2 + j^2 = m^2$   
 b)  $g^2 + h^2 = c^2$   
 c)  $l^2 + (j + k)^2 = a^2$   
 d)  $e^2 + d^2 = (n + p)^2$   
 e)  $l^2 + (h + i)^2 = b^2$   
 13. Pythagoraan lauseen avulla voi laskea esimerkiksi  
 nurkasta vastakkaiseen nurkkaan ulottuvan tuen  
 pituuden.  
 14. a) Kateetteja ovat sivut  $a$  ja  $k$ .  
 Hypotenuusa on sivu  $u$ .  
 b) Kateetteja ovat sivut  $e$  ja  $j$ .  
 Hypotenuusa on sivu  $i$ .  
 15. a) 2 b) X  
 16. a)  $b^2 + c^2 = a^2$  b)  $d^2 + i^2 = o^2$   
 17. a)



18. a) Tosi. Suorakulmaisessa kolmiossa on aina suora kulma.  
 b) Tosi. Suorakulmainen kolmio voi olla samalla myös tasakylkinen.  
 c) Tosi. Koska jana on lyhin matka kahden pisteen välillä, kolmion hypotenuusan pituuden on oltava pienempi kuin kahden kateetin yhteenlaskettu pituus.  
 d) Epätosi. Terävien kulmien summa on 90 astetta.
19. Tummennettujen alueiden pinta-alat ovat yhtä suuria.
- 20.



Kateeteille piirrettyjen puoliympyröiden pinta-alojen summa on

$$\begin{aligned} \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 : 2 + \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 : 2 \\ = \pi \cdot \frac{a^2}{4} : 2 + \pi \cdot \frac{b^2}{4} : 2 \\ = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{8} = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Hypotenuusalle piirretyn puoliympyrän pinta-ala on

$$\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 : 2 = \pi \cdot \frac{c^2}{4} : 2 = \frac{\pi c^2}{8}.$$

Pinta-aloista saadaan yhtälö

$$\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi c^2}{8}.$$

Koska  $a^2 + b^2 = c^2$ , voidaan yhtälöstä

$$\frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi c^2}{8}$$

korvata  $a^2 + b^2$  termillä  $c^2$ , jolloin

$$\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi c^2}{8}.$$

Näin on näytetty, että kateeteille piirrettyjen puoliympyröiden yhteispinta-ala on yhtä suuri kuin hypotenuusalle piirretyn puoliympyrän pinta-ala.

21. Puolisuunnikkaan  $ABCD$  pinta-ala on yhtä suuri kuin kolmioiden  $AED$ ,  $CDE$  ja  $BCE$  yhteenlaskettu pinta-ala. Merkitään pinta-alat yhtä suuriksi, jolloin saadaan yhtälö

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}.$$

Sievennetään yhtälöä, jolloin saadaan

$$(a+b) \cdot (a+b) = ab + ab + c^2.$$

Jatketaan sieventämistä, jolloin

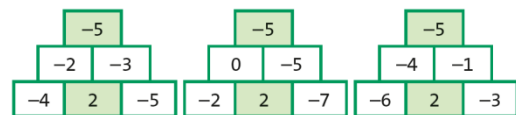
$$a^2 + ab + ab + b^2 = ab + ab + c^2, \text{ josta } a^2 + b^2 = c^2.$$

**PULMA** a) valkoinen b) violetti c) vihreä

## 7 Hypotenuusan ratkaiseminen

- a) Kateetit ovat sivut  $a$  ja  $g$ . Hypotenuusa on sivu  $r$ .  
 b) Kateetit ovat sivut  $d$  ja  $m$ . Hypotenuusa on sivu  $f$ .
- a)  $k^2 + a^2 = p^2$  b)  $h^2 + j^2 = k^2$
- a)  $x = 5$  b)  $x = 13$
- a)  $x = 50$  b)  $x = 41$
- a)  $x \approx 12,7$  b)  $x \approx 22,7$
- 730 m (734 m)
- a) 3,6 m b) 10,4 cm
- 53 cm
- 760 m (760,6 m)
- 5,8 km
- 129 m
- 42 tuumaa
- 21,5 m
- a) 5 pituusyksikköä  
 b) 5 pituusyksikköä  
 c) n. 14 pituusyksikköä
- Janan  $EO$  pituus on  $\sqrt{5}$ .
- a)  $b^2 + m^2 = j^2$  b)  $v^2 + o^2 = s^2$
- a)  $x = 25$  b)  $x = 73$
- n. 72 cm
- a) 8,6 cm b) 18,1 cm
- 26 m
- 49 m (48,7 m)
- a) 11,3 m b) 11,6 m
- Kissa oli 36 metrin päässä.
- 9,6 km
- Pisteen  $B$  koordinaatit ovat  $(1, 0)$  tai  $(9, 0)$ .
- Pisteen  $(-2, 6)$  etäisyys origosta on  $\sqrt{40}$  pituusyksikköä ja pisteen  $(4, 5)$  etäisyys  $\sqrt{41}$  pituusyksikköä.

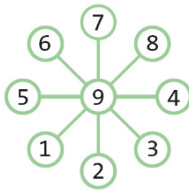
**PULMA** esim.



## 8 Kateettien ratkaiseminen

- Kateetit ovat maa ja halkopinon reuna, hypotenuusa on kirves.
- a) 2 b) X c) 2
- a)  $x = 8$  b)  $x = 8$
- a)  $x = 9$  b)  $x = 72$
- Pöydän pituus on 110 cm.
- a)  $x \approx 8,5$  cm b)  $x \approx 8,7$  mm

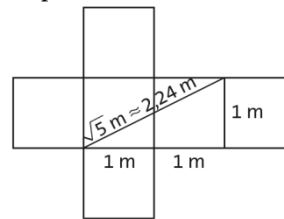
7. a) 28,3 b) 37,6  
 8. 4,8 tuumaa  
 9. a) 5,3 m b) 5,9 m  
 10. Leija lentää 110 metrin korkeudella.  
 11. 5,8 m  
 12. Korkeus on 11,3 m.  
 13.  $x = 12$  m ja  $y = 9$  m  
 14.  $x \approx 8,5$  m  
 15. n. 3,5 cm  
 16. a)  $x = 10$  cm b)  $x = 40$  mm  
 17. a)  $x \approx 13,7$  cm b)  $x = 10,0$  mm  
 18. Lintu lentää 13 metrin korkeudella.  
 19. a) 3,5 cm b) 4,4 cm  
 20. 100 cm:n päähän  
 21. 23,4 cm  
 22. 35 cm  
 23. Kolmion sivujen pituudet ovat 8,9 cm ja 17,9 cm.  
 24. 4,3 m  
 25. Kolmion sivujen pituudet ovat 112 m, 146 m ja 184 m. Kolmion pinta-ala on 8 170 m<sup>2</sup>.  
 26. n. 41 %  
**PULMA** esim.



## 9 Suorakulmaisen kolmion piiri ja pinta-ala

1. a)  $p = 72$  cm ja  $A = 220$  cm<sup>2</sup> (216 cm<sup>2</sup>)  
 b)  $p = 56$  cm ja  $A = 84$  cm<sup>2</sup>  
 2. a) A: 70 mm<sup>2</sup>, B: 254 m<sup>2</sup>  
 b) A: 41,2 mm, B: 77,2 m  
 3. 11 cm<sup>2</sup> (10,8 cm<sup>2</sup>)  
 4. 27 a  
 5. 39 000 € (39 102 €)  
 6. Sivun  $BD$  pituus on 24 cm ja sivun  $CD$  pituus 18 cm.  
 7. 16 cm<sup>2</sup>  
 8. 16 ruutua  
 9. Pinta-ala on 1 300 cm<sup>2</sup> (1 344 cm<sup>2</sup>).  
 10.  $A = \frac{16 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2} = 96 \text{ cm}^2$  tai  
 $A = \frac{20 \text{ cm} \cdot 9,6 \text{ cm}}{2} = 96 \text{ cm}^2$   
 11. Korkeus on 2,2 cm.  
 12. Korkeus on 7,8 m.  
 13. Kateettien pituudet ovat 8,0 cm.  
 14. 27 cm<sup>2</sup>

15. Sivujen pituudet ovat 0,9 m ja 1,2 m.  
 16. 5,4 cm  
 17. a) 884 cm<sup>2</sup> b) 43,3 cm  
 18. a) 2 000 cm<sup>2</sup> (1 972,8 cm<sup>2</sup>) b) 220 cm (216 cm)  
 19. a) 120 m b) 600 m<sup>2</sup>  
 20. 140 m<sup>2</sup>  
 21. Kateettien pituudet ovat 9,1 m.  
 22.  $p = 32$  cm ja  $A = 36$  cm<sup>2</sup>  
 23. a) 29 b) 35 c) 61 d) 28  
 24.  $A = 16$  cm<sup>2</sup>  
 25. Kateettien pituudet ovat 10 cm ja 12 cm.  
 26. Kateettien pituudet ovat 14 cm ja 20 cm.  
 27. a) kasvaa 300 % b) kasvaa 125 %  
**PULMA**  $\sqrt{5}$  m  $\approx 2,24$  m. Vastaus saadaan helpommin, kun kuutio levitetään tasoon.



## 10 Onko kolmio suorakulmainen?

1. a)  $\alpha = 36^\circ$  b)  $\alpha = 72^\circ$   
 2. a)  $20^\circ$  b)  $85^\circ$  c)  $53^\circ$   
 3. a)  $\alpha = 45^\circ$  b)  $\alpha = 34^\circ$   
 4. Kolmio on suorakulmainen, koska kolmas kulma on  $90^\circ$ .  
 5. a) on b) on  
 6. a) on b) ei ole  
 7. Kolmio ei ole suorakulmainen, koska  $1^2 + 2^2 \neq 3^2$ .  
 8. a)  $x = 3$  b)  $x = 12$  c)  $x = 12$  d)  $x = 6$   
 9. a) Jos kahden lyhimmän sivun neliöiden summa on pienempi kuin pisimmän sivun neliö, kolmio on tylppäkulmainen.  
 b) Jos kahden lyhimmän sivun neliöiden summa on suurempi kuin pisimmän sivun neliö, kolmio on teräväkulmainen.  
 10. a) tylppäkulmainen b) suorakulmainen  
 c) teräväkulmainen d) teräväkulmainen  
 11. a)  $\alpha = 61^\circ$  b)  $\alpha = 90^\circ$   
 12. Kolmio ei ole suorakulmainen, koska kolmas kulma on  $100^\circ$ .  
 13. a) Ei ole. b) Ei ole.  
 14. Ei ole, koska  $(90 \text{ cm})^2 + (60 \text{ cm})^2 \neq (120 \text{ cm})^2$ .  
 15. Kateettien neliöiden summa on  $(9,6 \text{ cm})^2 + (11,0 \text{ cm})^2 = 92,16 \text{ cm}^2 + 121 \text{ cm}^2 = 213,16 \text{ cm}^2$ . Hypotenuusan neliö on  $(14,6 \text{ cm})^2 = 213,16 \text{ cm}^2$ .

Koska  $(9,6 \text{ cm})^2 + (11,0 \text{ cm})^2 = (14,6 \text{ cm})^2$ ,  
kolmio on suorakulmainen.

16. Kolmannen sivun pituus on joko 8 tai 23  
( $\sqrt{514} = 22,67\dots$ ).

**PULMA** 42-vuotias

## 11 Pythagoraan lauseen sovelluksia

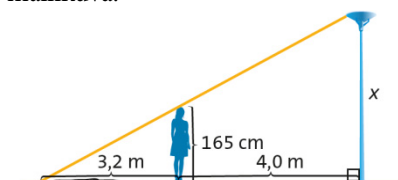
1. **a)** 100 cm (100,6 cm) **b)** 88,4 cm
  2. 2,7 m (3 m)
  3. 304 cm
  4. 1 430 m (1 432 m)
  5. 5,6 km
  6. 11,2 m
  7. 62 m
  8. 190 cm
  9. 4,4 m
  10. 4,1 m
  11. 9,50 tuumaa
  12. **a)** 2,05 m **b)** 1,55 m  $\times$  1,68 m
  13. 27 m (26,6 m)
  14. Ei mahdu.
  15. 2,1 m
  16. 12,5 %
  17.  $9\,400 \text{ cm}^2 = 0,94 \text{ m}^2$  (9 353  $\text{cm}^2$ )
  18. 3,2 m
  19. 1,2 m
  20. 2,6 m
  21. **a)** 5,6 km **b)** 4,1 km
  22.  $16 \text{ m}^2$  (16,3  $\text{m}^2$ )
  23.  $A = 13,5$  ruutua
  24. 10 %
- PULMA** 18 ottelua. Alkusarjassa pelataan 15 ottelua ja pudotuspelissä 3 ottelua.

## 12 Suorakulmainen kolmio ja ympyrä

1.  $\alpha = 90^\circ$
2. **a)**  $d \approx 5,9 \text{ cm}$  **b)**  $r \approx 3,0 \text{ cm}$
3. Sivun AC pituus on 7,1 cm.
4. **a)** 6 ruutua **b)** n. 20 ruutua **c)** n. 14 ruutua
5.  $\alpha = 90^\circ$
6.  $20 \text{ cm}^2$
7.  $55 \text{ cm}^2$
8. n. 18 km:n päähän
9. 0,79 cm
10. **a)**  $A \approx 7,1 \text{ cm}^2$  **b)**  $p \approx 14,9 \text{ cm}$
11. **a)**  $r \approx 8,5 \text{ cm}$  **b)**  $A \approx 82 \text{ cm}^2$  (82,2  $\text{cm}^2$ )
12. 15 cm  $\times$  15 cm:n kokoisien parrun lävistäjä on noin 21 cm, joten halkaisijaltaan 18-senttisestä tukista ei voi sahata tällaista parrua.
13.  $A \approx 9,1 \text{ cm}^2$

14.  $a \approx 32 \text{ cm}$
  15.  $d \approx 7,1 \text{ cm}$
  16.  $10 \text{ cm}^2$  (10,3  $\text{cm}^2$ )
  17. n. 23 m
  18.  $13,7 \text{ cm}^2$
  19. **a)** 11 cm (11,3 cm) **b)**  $400 \text{ cm}^2$  (402  $\text{cm}^2$ )
  20. Pekan ja Marian etäisyyden puoliväliin.
  21. Koska kolmion pisin sivu on ympyrän halkaisija ja kolmion kolmas kärki on myös ympyrän kehällä, niin kolmio on suorakulmainen.
  22.  $A = 48 \text{ cm}^2$
- PULMA** Yksi sahaus kestää 30 sekuntia, joten viisi sahausta kestää 150 sekuntia eli 2,5 minuuttia.

## 13 Kertaus

1. **a)** kulma I **b)** sivu HI **c)** sivu GI
2.  $x = 18,0 \text{ cm}$
3. 34 cm
4. 0,5 cm
5. **a)** Kanta on 25 ja korkeus 15 ruudunsivua.  
**b)** Kanta on 50 ja korkeus 30 ruudunsivua.  
**c)** Kanta on 5 ja korkeus 3 ruudunsivua.
6. **a)** 550 m **b)** 1,1 km **c)** 2,75 km
7. **a)** yhdeksänkertainen **b)**  $360 \text{ cm}^2$
8. **a)** 1:16 **b)** 9:1 **c)** 1:100 **d)** 9:4
9. **a)** Kateetteja ovat sivut  $r$  ja  $\ddot{a}$ . Hypotenuusa on sivu  $t$ . Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö on  $r^2 + \ddot{a}^2 = t^2$ .  
**b)** Kateetteja ovat sivut  $p$  ja  $\ddot{a}$ . Hypotenuusa on sivu  $k$ . Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö on  $p^2 + \ddot{a}^2 = k^2$ .
10. **a)**  $x = 15$  **b)**  $x \approx 14,6 \text{ cm}$
11. **a)**  $x = 14$  **b)**  $x \approx 7,6 \text{ cm}$
12.  $p \approx 23,4 \text{ cm}$  ja  $A \approx 22,2 \text{ cm}^2$
13. Kolmio ei ole suorakulmainen, koska terävien kulmien summa on  $80^\circ$ .
14. Kolmio on suorakulmainen, koska  $12^2 + 16^2 = 20^2$ .
15. Polku oikaisee 420 metriä.
16. 20 m
17. **a)**  $A \approx 55,4 \text{ cm}^2$  **b)**  $x \approx 3,1 \text{ cm}$  **c)**  $A \approx 12 \text{ cm}^2$
18. n. 540 m
19. mallikuva:
 
20. **a)**  $x \approx 6,0 \text{ cm}$  **b)**  $y \approx 6,3 \text{ cm}$

21. a) 270 cm (268 cm)  
 b) Mahtuu, koska ikkunan lävistäjä on 120,8 cm.  
 22.  $A \approx 11 \text{ cm}^2$   
 23.  $672 \text{ m}^2$

## 14 Suorakulmaisen kolmion sivujen suhteet

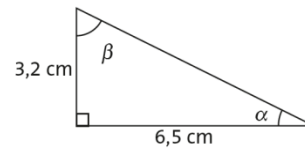
1. a) sivu  $LM$  b) sivu  $KM$  c) sivu  $KL$   
 2. esim.  $\frac{15 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}} = \frac{42 \text{ cm}}{7,0 \text{ cm}}$  ja  $\frac{7,0 \text{ cm}}{42 \text{ cm}} = \frac{2,5 \text{ cm}}{15 \text{ cm}}$   
 3. a) ovat b) ovat c) eivät ole  
 4.  $x = 65 \text{ mm}$   
 5. a) Kolmioilla  $ADE$  ja  $ABC$  on yhteinen kulma  $A$  ja molemmissa kolmioissa on lisäksi suora kulma.  
 b) 3,5 m  
 6. a) 15 cm b) 4 cm  
 7. 8 metriä  
 8.  $2\,600 \text{ mm}^2$  ( $2\,646 \text{ mm}^2$ )  
 9. a) 0,75 b) Suhteen arvo kasvaa.  
 10. Kolmiot eivät ole yhdenmuotoisia.  
 11. Joen leveys on 5,7 m.  
 12. 940 mm  
 13. 6 verrantoa  
 14. 30 m:n päässä  
 15. a) sivu  $DE$  b) sivu  $AC$  c) sivu  $BC$   
 16. a) Koska kolmioissa kaikki vastinkulmat ovat yhtä suuria, ovat kolmiot yhdenmuotoisia.  
 b) Koska kaikkien vastinsivujen pituuksien suhde on 1,5, ovat kolmiot yhdenmuotoisia.  
 17.  $x = 2,4 \text{ m}$  ja  $y = 2,6 \text{ m}$   
 18. 350 mm  
 19. n. 11 m  
 20.  $x = 1,6$  ja  $y = 4,6$   
 21.  $39 \text{ cm} \times 39 \text{ cm}$   
 22.  $x = 440 \text{ cm}$   
**PULMA** Lasten iät ovat 7, 8 ja 9 vuotta tai 5, 9 ja 10 vuotta tai 6, 8 ja 10 vuotta. Perustelu:  
 $7 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2$ ,  $8 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2$  ja  
 $9 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2$  tai  $5 = 5 \cdot 1$ ,  $9 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2$  ja  
 $10 = 5 \cdot 2$  tai  $6 = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2$ ,  $8 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2$   
 ja  $10 = 5 \cdot 2$ .

## 15 Suorakulmaisen kolmion tutkimista

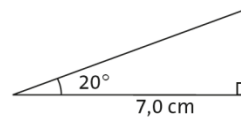
1. a)  $a$  b)  $x$   
 2. a)  $LM$  b)  $KL$  c)  $KL$  d)  $LM$   
 3.

Kolmion sivu	A	B	C
kulman $\alpha$ viereinen kateetti	$b$	$l$	$s$
kulman $\alpha$ vastainen kateetti	$a$	$k$	$t$
hypotenuusa	$c$	$m$	$r$

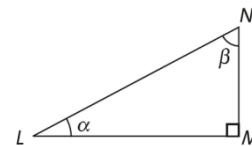
4. a)  $77^\circ$  b)  $58^\circ$   
 5.



6. a)



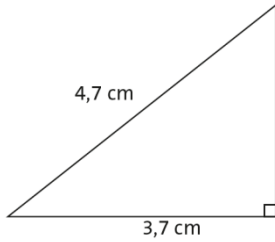
- b) Kateetti, jonka pituus on 7,0 cm, on pidempi kateetti, koska  $20^\circ$ :n kulma on kolmion pienin kulma. Pienimmän kulman vastainen sivu on kolmion lyhin sivu.  
 7. a) hypotenuusan pituus 7,0 mm  
 b) kateetin pituus 15,6 cm  
 8.  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  ja  $90^\circ$   
 9. esim.



Kulman  $\beta$  viereinen sivu on  $MN$ .

10. a) hypotenuusa 17,2 cm, terävä kulma  $39,8^\circ$  ja suora kulma  $90^\circ$   
 b)  $39,8^\circ$   
 c) Ei ole, sillä suoran kulman vastaisen sivun pituus on hypotenuusan pituus.  
 11. a) Kyllä. Suorakulmaisen kolmion pisin sivu on aina hypotenuusa ja kateetit voivat olla eripituisia.  
 b) Ei. Tasasivuisen kolmion kulmat ovat yhtä suuria ja suuruudeltaan  $60^\circ$ .  
 c) Kyllä. Suorakulmainen kolmio on tasakylkinen, jos sen kateetit ovat yhtä pitkiä.  
 12.  $30^\circ$  ja  $60^\circ$

13.



- a) Suuremman terävän kulman vastaisen sivun pituus on 3,7 cm.  
 b) Pienemmän terävän kulman vastaisen sivun pituus on 2,9 cm.

14. 8,6 cm

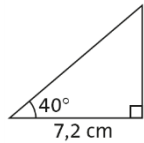
15. a) 1 b) äärettömän monta

16. a) 16 b) 30 c) 16 d) 34

17. A: 55°, B: 14° ja C: 76°

18. kateetin pituus 4,4 cm, terävä kulma 36,9° ja suora kulma 90°

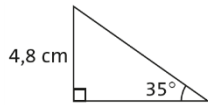
19.



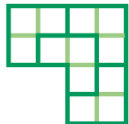
Tunnettu sivu ei ole kolmion lyhin sivu.

20. 40°, 50° ja 90°

21.



PULMA



## 16 Kulman tangentti

1. a)  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  b)  $\tan \alpha = \frac{10}{4}$

2. a)  $\tan \alpha = \frac{12}{3}$  b)  $\tan \alpha = \frac{5}{5}$

3. a)  $\tan \alpha = \frac{8 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}$  b) 1,6

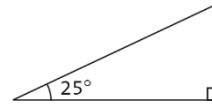
4. a) kulman  $\alpha$  b) kulman  $\beta$

5. a) 2 b) X

6. a) 1,000 b) 2,356 c) 0,384  
 d) 0,158 e) 57,290 f) 0,017

7. a)  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$  b)  $\tan \beta = \frac{b}{a}$

8.



$\tan 25^\circ \approx 0,5$

9. a) kulman  $\gamma$  b) kulman  $\delta$

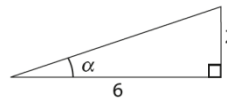
10. a)  $\tan \alpha = \frac{4}{8} = 0,5$

b)  $\tan \alpha = \frac{3}{6} = 0,5$

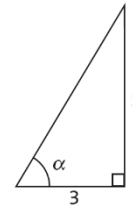
c)  $\tan \alpha = \frac{1}{2} = 0,5$

d) Kulman  $\alpha$  vastaisen ja viereisen kateetin pituuksien suhde on yhtä suuri kaikissa kolmioissa.

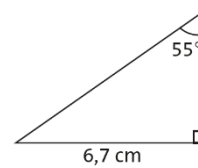
11. a)



b)

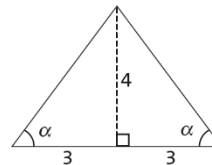


12.



$\tan 35^\circ \approx 0,7$ .

13.



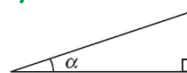
Kantakulman tangentin tarkka arvo  $\frac{4}{3}$ .

Kantakulman suuruus noin 50°.

14. a)



b)



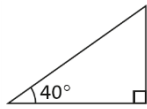
15. Suorakulmaisessa kolmiossa toinenkin terävä kulma on 45°, joten kolmio on suorakulmainen tasakylkinen kolmio. Koska kateetit ovat yhtä pitkiä (kyljet), on niiden pituuksien suhde 1.

16. a)  $\tan \alpha = \frac{3}{8}$  b) 0,375

17. a)  $\tan \delta = \frac{x}{y}$  b)  $\tan \gamma = \frac{y}{x}$

18. a) 0,231 b) 0,070 c) 4,331  
d) 1,732 e) 0,577 f) 11,430

19. esim.

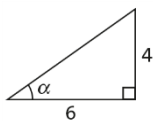


$\tan 40^\circ \approx 0,8$

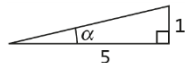
20. a)  $\tan \alpha \approx 0,603$  b)  $\tan \alpha \approx 1,478$

21. esim.

a)



b)



22. a) Kun kulma pienenee, kulman tangentin arvo pienenee koko ajan ja on aina arvoltaan lähempänä lukua 0.

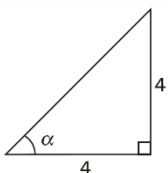
b) Kun kulman suuruus lähestyy kulman arvoa  $90^\circ$ , kulman tangentin arvo kasvaa voimakkaasti. Kuitenkaan  $\tan 90^\circ$  ei ole määritelty.

23. a) Tangentin arvo pienenee.

b) Tangentin arvo pienenee.

c) Tangentin arvo voi pienentyä, pysyä samana tai kasvaa.

24. esim.



25.  $\tan \alpha = \frac{1}{2} = 0,5$

26.  $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{8,5}{6} = 1,4166... \approx 1,417$

**PULMA** 9. Alimman rivin luku saadaan kertomalla yläpuolella olevat luvut keskenään eli  $3 \cdot 3 = 9$ .

## 17 Kulman suuruus tangentin avulla

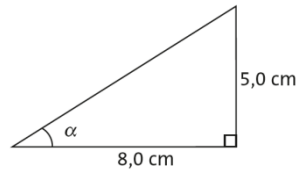
1. a)  $\alpha \approx 63^\circ$  b)  $\alpha \approx 22^\circ$  c)  $\alpha \approx 39^\circ$  d)  $\alpha \approx 56^\circ$

2. a)  $\alpha \approx 65^\circ$  b)  $\alpha \approx 22^\circ$

3. a)  $\alpha = 45^\circ$  b)  $\alpha \approx 22^\circ$

4.  $25^\circ$

5.



$\alpha \approx 32^\circ$

6. a)  $\alpha \approx 26,6^\circ$  b)  $\alpha = 45,0^\circ$  c)  $\alpha \approx 66,5^\circ$

d)  $\alpha \approx 4,6^\circ$  e)  $\alpha \approx 85,3^\circ$  f)  $\alpha \approx 89,1^\circ$

7. a)  $\alpha \approx 21,8^\circ$  b)  $\alpha = 67,8^\circ$

8. Luiska on liian jyrkkä, koska sen kaltevuus on  $7,9^\circ$ .

9.  $1,2^\circ$

10. Kaltevuuskulma  $\alpha = 66^\circ$ , ja portaiden pituus on 300 cm.

11.  $34^\circ$  ja  $56^\circ$

12. 52 asteen kulmassa

13. 6,5 kilometrin päässä. Suunta on  $113^\circ$  idän suunnasta kaakon suuntaan eli  $23^\circ$  etelän suunnasta lounaaseen.

14.  $37^\circ$

15. a)  $27^\circ$  b)  $9^\circ$

16.  $72^\circ$  ( $71,6^\circ$ )

17. a)  $\alpha \approx 76^\circ$  b)  $\alpha \approx 21^\circ$  c)  $\alpha \approx 51^\circ$  d)  $\alpha \approx 55^\circ$

18. a)  $\alpha \approx 27,0^\circ$  b)  $\alpha \approx 16,6^\circ$

19.  $16^\circ$

20. Suunta on 22 astetta idän suunnasta kaakon suuntaan eli 112 astetta.

21. a) 14 astetta b) 21 m

22.  $\alpha \approx 15^\circ$  ( $14,6^\circ$ )

23.  $34^\circ$

24.  $18^\circ$ ,  $72^\circ$  ja  $90^\circ$

25.  $\alpha \approx 52^\circ$

26.  $14^\circ$ ,  $76^\circ$  ja  $90^\circ$

**PULMA** Konstalla on 9 kerttia, Aapolla 16 kerttia, Johannesella 18 kerttia ja Erkalla 9 kerttia.

## 18 Kulman sini ja kosini

1. a)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  b)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

2. a)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  b)  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

3. a)  $\sin \alpha = \frac{6}{10}$  b)  $\cos \alpha = \frac{8}{10}$

4. a) 2 b) 1 c) 1

5. a)  $\sin \alpha = \frac{8}{17} = 0,4705... \approx 0,471$

b)  $\cos \alpha = \frac{15}{17} = 0,8823... \approx 0,882$

6. a) kulman  $\beta$  b) kulman  $\alpha$

7. a) kulman  $\alpha$  b) kulman  $\beta$

8. a) 0,707 b) 0,940 c) 0,225  
d) 0,940 e) 0,999 f) 0,017

9.

	30°	45°	60°
sin α	0,500	0,707	0,866
cos α	0,866	0,707	0,500

10. a) 0,471 b) 0,882

11. a) Voidaan piirtää, sillä kulman α vastaisen kateetin pituus voi olla 4 ja hypotenuusan pituus 5.

b) Ei voida piirtää. Jos kulman α viereisen kateetin pituus olisi 5, ei hypotenuusan pituus voi olla 4, sillä hypotenuusa on kolmion pisin sivu.

12.  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

13. Kulman α sinin arvo kasvaa ja kulman α kosinin arvo pienenee.

14. a) Kulma α on pienempi kuin kulma β, esimerkiksi α = 30° ja β = 60°.

b) Kulma α on suurempi kuin kulma β, esimerkiksi α = 15° ja β = 75°.

c) Kulmat α ja β ovat yhtä suuria, joten α = 45° ja β = 45°.

15. a)  $\sin \alpha = \frac{9}{15}$  b)  $\cos \alpha = \frac{12}{15}$

16. a)  $\cos \alpha = \frac{15}{17} = 0,8823... \approx 0,882$

b)  $\sin \beta = \frac{15}{17} = 0,8823... \approx 0,882$

17. a) 0,707 b) 0,174 c) 0,985

d) 0,940 e) 0,122 f) 0,035

18. a) 0,882 b) 0,471

19. Kulman kosinin arvo pienenee luvusta 1,000 lukuun 0,000.

20. Suorakulmainen kolmio on tällöin tasakylkinen. Koska molemmat kateetit ovat yhtä pitkiä, on kummankin kateetin pituuden suhde hypotenuusaan yhtä suuri.

21. a) 57,4 % b) 81,9 %

22. Kosini määritellään kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhteena. Kateetti on aina lyhyempi kuin hypotenuusa, joten sivujen pituuksien suhteen arvo (kosinin arvo) on aina ykköstä pienempi.

23. a) Koska  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  ja  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ , on

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot \cancel{c}}{\cancel{c} \cdot b} = \frac{a}{b} = \tan \alpha.$$

b) Koska  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$  ja  $a^2 + b^2 = c^2$ , niin

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

24. Koska kulman α sini määritellään kulman α vastaisen kateetin ja hypotenuusan suhteena,

on se tehtävän 23 kuvan merkinnöin  $\frac{a}{c}$ .

Vastaavasti kulman β kosini määritellään kulman β viereisen kateetin ja hypotenuusan suhteena, joka

on kuvan merkinnöin myös  $\frac{a}{c}$ . Tällä perusteella

$$\sin \alpha = \cos \beta.$$

25. Kulma β, koska cos α on suurempi vain, jos kulman α viereinen kateetti on pidempi kuin vastainen kateetti. Kun kulman α viereinen kateetti on pidempi, on tätä vastaava kulma β terävistä kulmista suurempi.

26. a) 0,475 b) 0,660

27. a) 53,0 % b) 84,8 % c) 62,5 %

PULMA a) 1,5 m + 1,5 m - 2,0 m

b) 1,5 m + 1,5 m - 1,8 m

c) 1,8 m + 1,8 m - 2,0 m

d) 2,0 m + 1,5 m - 1,8 m

e) 1,8 m + 1,8 m - 1,5 m

f) 2,0 m + 2,0 m - 1,8 m

## 19 Kulman suuruus sinin ja kosinin avulla

1. a) α ≈ 53° b) α ≈ 57°

2. a) α ≈ 46° b) α ≈ 67°

3. a) α ≈ 17° b) α ≈ 54°

4.  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ , josta α ≈ 67°

5.  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ , josta α ≈ 67°

6. a) α ≈ 26° b) α ≈ 75°

7. 73°

8. 12°

9. 14°

10. a) α ≈ 43,0° b) α ≈ 50,3°

11. Jyrkkyys vaihtelee välillä 14,5°–17,5° eli vaihteluväli on 3,0°.

12. α ≈ 62°

13. 34,92°

14. 25°

15. 49°

16.  $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

17. a) α ≈ 5° b) α ≈ 42° c) α ≈ 49° d) α ≈ 47°

18.  $\sin \alpha = \frac{2,7}{7,4}$ , josta  $\alpha \approx 21^\circ$ ,

ja  $\cos \alpha = \frac{6,9}{7,4}$ , josta  $\alpha \approx 21^\circ$

19.  $29^\circ$  ja  $61^\circ$

20.  $71^\circ$

21.  $24^\circ$

22.  $7^\circ$  ja  $83^\circ$

23. Kulma  $\alpha$  pienenee.

24. a) Molemmat kulmat ovat  $45^\circ$ .

b) Kulmat ovat  $30^\circ$  ja  $60^\circ$ .

25. a)  $\alpha = 45^\circ$  tai  $\alpha = 225^\circ$  b)  $\alpha = 63,4^\circ$  c)  $\alpha = 26,6^\circ$

PULMA 6 minuuttia

## 20 Kulman suuruus trigonometrinen funktioiden avulla

1. a)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ , josta  $\alpha = 53,13\dots^\circ \approx 53^\circ$

b)  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ , josta  $\alpha = 53,13\dots^\circ \approx 53^\circ$

c)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , josta  $\alpha = 53,13\dots^\circ \approx 53^\circ$

2.  $\alpha \approx 37^\circ$

3. a)  $\alpha \approx 33^\circ$  b)  $\alpha \approx 67^\circ$

4.  $\alpha \approx 47^\circ$

5.  $24^\circ$

6. Kulmat ovat  $45,6^\circ$ ,  $45,6^\circ$  ja  $88,8^\circ$ .

7.  $1,1^\circ$

8. a)  $34^\circ$  b)  $68\%$

9.  $4,5^\circ$

10.  $\alpha \approx 18^\circ$

11.  $\alpha \approx 37^\circ$

12. a)  $\alpha = 45^\circ$  b)  $\alpha \approx 45^\circ$

c) Sivujen pituudet ovat likiarvoja.

13.  $\alpha = 60^\circ$

14. a)  $60^\circ$  b)  $17^\circ$  c)  $30^\circ$

d) Loivemman katon osuus kokonaisleveydestä on lähes nelinkertainen, joten tämä laskee kaltevuuden arvon alle keskiarvon.

15. Korkeusjana puolittaa sivun  $a$ , joten saadaan:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}, \text{ josta } \alpha = 60^\circ.$$

16. Kannan keskelle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja jakaa kolmion kahteen pienempään suorakulmaiseen kolmioon. Pienemmästä kolmiosta:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \cos 60^\circ.$$

17.  $\alpha \approx 23^\circ$  ja  $\beta \approx 67^\circ$

18.  $\alpha \approx 66^\circ$

19.  $13^\circ$ :n kulmassa

20.  $14^\circ$

21.  $40,1^\circ$  ja  $49,9^\circ$

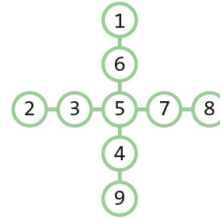
22. a)  $45^\circ$ :n kulmaan b) 203 mm ja 283 mm

23.  $58,0^\circ$  ja  $32,0^\circ$

24. 246,6 pm

25.  $141^\circ$ :n kulmassa ( $140,5^\circ$ )

PULMA esim.



## 21 Sivun pituus tangentin avulla

1.  $x \approx 3,5$  m

2. a)  $x \approx 3,6$  m b)  $x \approx 1,5$  m

3. a)  $x \approx 2,9$  cm b)  $x \approx 9,9$  m

4. 8,2 m

5. 26,5 m

6.  $x \approx 7,5$  cm

7. a)  $x \approx 3,8$  m b)  $x \approx 2,2$  cm

8. 267 cm

9. 19 m

10. a) 33,2 m b) 6,6 m

11. 159 cm

12. 3,4 km

13. a) 4,3 m b) 175 cm

14. 36 m

15. a)  $x \approx 84$  m b)  $x \approx 21$  mm

16. a)  $x \approx 1,5$  cm b)  $x \approx 4,3$  cm

17. 6,4 m

18.  $d \approx 130$  m

19. 47 m

20.  $BD \approx 79$  m

21. 0,80 ha

22.  $16 \text{ cm}^2$  ( $15,6 \text{ cm}^2$ )

23.  $15 \text{ cm}^2$

24.  $54 \text{ cm}^2$

PULMA a) 12 päivän kuluttua. 12 on pienin luku, joka on jaollinen luvuilla 2, 3, 4 ja luvulla 6.  
b) seitsemän kertaa

## 22 Sivun pituus sinin ja kosinin avulla

1. a)  $x \approx 11$  cm b)  $x \approx 1,1$  m

2. a)  $x \approx 25$  cm b)  $x \approx 11$  m

3. a)  $x \approx 8,7$  cm b)  $x \approx 3,8$  m

4. 270 m
  5. 3 630 mm
  6. a)  $x \approx 9,1$  cm b)  $x \approx 9,9$  m
  7. a)  $x \approx 59,9$  cm b)  $x \approx 177$  mm
  8. a)  $x \approx 2,9$  cm b)  $x \approx 4,7$  cm
  9. a)  $x \approx 54,3$  cm b)  $x \approx 7,9$  m
  10. 3,0 m
  11. 4 m (3,86 m)
  12. 9,8 metrin korkeudelle
  13. a) 1,4 m b) 2,7 m
  14. 2,9 kilometriä
  15. a) 1 500 m b) 15 minuuttia
  16. a)  $x \approx 2,9$  cm b)  $x \approx 2,4$  cm
  17. a)  $x \approx 6,9$  m b)  $x \approx 3,9$  cm
  18. a) 120 mm (116 mm) b) 60 mm (58 mm)
  19. korkeus 7,6 m ja pituus 9,7 m
  20. 4 m (402 cm)
  21.  $AB \approx 7,5$  cm
  22. 11,7 cm
  23.  $17,7$  cm<sup>2</sup>
  24. 82 mm
  25. Kyljen pituus on 6,2 cm (kantakulma 50°) tai 9,5 cm (huippukulma 50°).
  26. a) 2,9 cm tai 5,2 cm b)  $26$  cm<sup>2</sup>
- PULMA** 35 vuotta

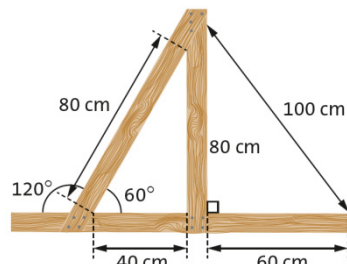
## 23 Sivun pituus trigonometrinen funktioiden avulla

1.  $x \approx 2,1$  cm
2.  $x \approx 1,9$  m
3.  $x \approx 22$  mm
4. a)  $x \approx 3,3$  cm b)  $x \approx 1,5$  cm
5. a)  $x \approx 4,8$  mm b)  $x \approx 1,5$  cm
6. a)  $x \approx 4,3$  cm b)  $x \approx 71$  cm
7. a) 190 cm (192 cm) b) 160 cm (161 cm)
8. 2,3 m
9. 3,0 m
10. 5,6 kilometrin päässä 63 asteen suunnassa pohjois-eteläsuunnasta länteen päin
11. 120 m:n päässä
12. 310 cm
13. 2,5 m
14.  $h \approx 24,9$  cm
15. 120 m (115 m)
16. 8 km/h
17. a)  $x \approx 5,4$  cm b)  $x \approx 1,7$  cm
18. a)  $x \approx 2,4$  cm b)  $x \approx 2,0$  cm
19. a)  $x \approx 2,4$  cm b)  $x \approx 7,0$  cm
20. a) 400 m b) 800 m

21. a) 0,7 m b) 3,2 m
  22. 41 m
  23. a)  $26,6^\circ$  b)  $63,4^\circ$
  24. a) 5 b)  $A = 74,9^\circ$ ,  $B = 55,3^\circ$  ja  $C = 49,8^\circ$
- PULMA** 3 minuuttia

## 24 Trigonometrinen funktioiden sovelluksia

1.  $33^\circ$
2. 16,3 m
3. 1 500 m (1 460 m)
4.  $9^\circ$
5.  $7^\circ$
6. 7 mm
7. 60 m
8. enintään 17 cm korkea
9. 31 m
10. 9 kilometrin päässä (9,1 km)
11. A:  $14,0^\circ$  ja 4 260 mm, B:  $18,5^\circ$  ja 3 660 mm ja C:  $26,6^\circ$  ja 4260 mm
12. a) 1,2 m b) 2,7 m
13. a) 2 cm b) 7 cm
14. a) 400 cm (398 cm) b) 460 cm
15. 350 kilometrin päässä, 10 astetta idän suunnasta koillisen suuntaan
16. 680 m
17. ei
18. n. 11 km (10,9 km)
19. a)  $5^\circ$  b) 16 % (15,8 %)
20. 19 sekuntia
21. 60 km:n päähän
22.  $\alpha = 18,43^\circ$ ,  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $h = 1\,000$  ja  $l = 3\,000$
23.  $5,7^\circ$
24.  $17,5^\circ$
25. Esimerkiksi: Naulataan lyhyt lauta kohtisuoraan pitkää lauta vastaan hyödyntämällä Pythagoraan lausetta  $60^2 + 80^2 = 100^2$ . Koska  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , niin naulataan molempiin lautoihin vino lauta 60 asteen kulmaan esimerkiksi kuvan mitoilla 40 cm ja 80 cm.



**PULMA** 55,1 %

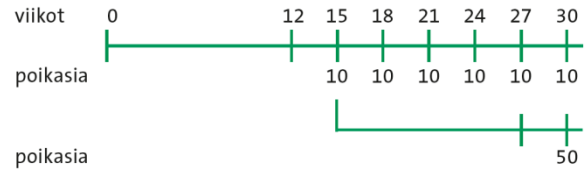
## 25 Kolmiolaskuja

- a)**  $x \approx 11,3$  cm **b)**  $x \approx 9,4$  m
- a)**  $\alpha \approx 23^\circ$  **b)**  $x \approx 2,9$  cm
- a)**  $\tan \alpha = \frac{8,0 \text{ cm}}{5,0 \text{ cm}}$  **b)**  $\alpha \approx 58^\circ$
- a)**  $\alpha \approx 28^\circ$  **b)**  $\alpha \approx 67^\circ$
- a)**  $x \approx 4,2$  cm **b)**  $x \approx 57$  mm
- a)** 4,4 cm **b)**  $26,6 \text{ cm}^2$
- Sivun pituus on 9,2 cm.
- $h \approx 1,8$  cm
- a)**  $h = 3$  cm **b)**  $h = 3,0021\dots$  cm  
**c)** Trigonometrisellä funktiolla saadaan likiarvo, koska kulman suuruus on likiarvo. Pythagoraan lauseessa tulos on tarkka arvo.
- Kulmat ovat  $18,4^\circ$  ja  $71,6^\circ$ .
- $x \approx 23$  mm
- $\beta \approx 12,5^\circ$
- $\alpha \approx 81^\circ$  (jos pyöristys  $h \approx 60$  mm, niin kulma  $80^\circ$ )
- 38 % (37,5 %)
- a)** Kulma  $\alpha$  on pienempi kuin  $45^\circ$ .  
**b)** Kulma  $\alpha$  on suurempi kuin  $45^\circ$ .  
**c)** Kulma  $\alpha$  on  $45^\circ$ .
- Nyt  $\sin \beta = \frac{h}{c}$ , josta  $h = c \cdot \sin \beta$ . Kolmion pinta-ala  
$$A = \frac{a \cdot h}{2}, \text{ josta saadaan } A = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2} = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$
- a)**  $20^\circ$  **b)** 88 mm
- a)**  $x \approx 2,2$  m **b)**  $\alpha \approx 22^\circ$  ja  $\beta \approx 68^\circ$
- $480 \text{ cm}^2$
- a)**  $A \approx 28 \text{ cm}^2$  **b)**  $\alpha \approx 18,6^\circ$  ja  $\beta \approx 43,3^\circ$
- a)**  $33^\circ$  **b)** 6,1 m **c)**  $16,9 \text{ m}^2$
- $AD = 3,2$
- $79 \text{ cm}^2$
- $3\ 600 \text{ cm}^2$  ( $3\ 560 \text{ cm}^2$ )
- $32 \text{ cm}^2$
- $19 \text{ cm}^2$  ( $18,8 \text{ cm}^2$ )
- $13,2 \text{ cm}^2$

### PULMA

110 jälkeläistä. Itse se ehtii synnyttää 60 jälkeläistä ja sen ensimmäinen pentue 50 jälkeläistä. Tehtävän

ratkaisemista helpottaa kuvion piirtäminen.



## 26 Kertaus

- a)**   
**b)** Tunnettu kateetti on kolmion lyhyempi kateetti. Pienintä kulmaa, joka on nyt  $30^\circ$ , vastaa lyhin sivu.
- a)** Kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, kulmat  $\alpha$  ja suora kulma.  
**b)**  $LM = 39$  mm
- $\tan \alpha = \frac{2,6 \text{ cm}}{5,7 \text{ cm}} \approx 0,456$
- a)**  $\alpha \approx 30^\circ$  **b)**  $\alpha \approx 49^\circ$
- a)**  $\sin \alpha = \frac{3,40 \text{ cm}}{6,57 \text{ cm}} \approx 0,518$   
**b)**  $\cos \beta = \frac{12,93 \text{ cm}}{15,11 \text{ cm}} \approx 0,856$   
**c)**  $\cos \alpha = \frac{5,62 \text{ cm}}{6,57 \text{ cm}} \approx 0,855$   
**d)**  $\sin \beta = \frac{7,82 \text{ cm}}{15,11 \text{ cm}} \approx 0,518$
- a)**  $\alpha \approx 38^\circ$  **b)**  $\alpha \approx 47^\circ$
- $\alpha \approx 35^\circ$  ja  $\beta \approx 55^\circ$
- 3,6 cm
- a)**  $\cos 35^\circ = \frac{x}{5,7 \text{ cm}}$ , josta  $x \approx 4,7$  cm  
**b)**  $\sin 55^\circ = \frac{x}{5,7 \text{ cm}}$ , josta  $x \approx 4,7$  cm
- piste A
- vähintään 1 600 mm = 1,6 m
- a)**  $6,9 \text{ cm}^2$  **b)**  $\alpha \approx 19^\circ$  ja  $\beta \approx 43^\circ$
- n. 10 m (9,6 m)
- a)**  $2,9^\circ$  **b)** vähintään 800 cm
- n. 57 m (56,6 m)
- Rinne on hieman liian jyrkkä. Rinnettä on loivennettava niin, että rinteän pituus on vähintään 360 cm.
- a)** 290 cm **b)** 500 cm