Tehtävä: Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään $S(n)$:llä luvun n numeroiden summaa (kymmenjärjestelmässä). Mitkä rationaaliluvut q voidaan esitää muodossa

$$q = \frac{S(2n)}{S(n)}$$

jollakin positiivisella kokonaisluvulla n?

Ratkaisu: osoitetaan ensin että

$$S(2n) = \sum_{i=0}^{k} \sigma(a_i),$$

missä

$$\sigma(a) = \begin{cases} 2a, & \text{kun } a \in \{0,1,2,3,4\} \\ 2a-9, & \text{kun } a \in \{5,6,7,8,9\} \end{cases}$$

Proof. Olkoon luvun $n \in \mathbb{Z}_+$ kymmenjärjestelmäesitys $n = \sum_{i=0}^{k} *a_i * 10^i$, jolloin

$$S(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i.$$

Olkoon vastaavasti luvun $2n$ kymmenjärjestelmäesitys $2n = \sum_{i=0}^{k} b_i * 10^i$ (esityksissä voidaan käyttää samaa yhtä montaa numeroa, jos n:n esitys aloitetaan nollalla). Huomataan heti että numero b_i määräytyy numerosta a_i ja mahdollisesta edeltävästä numerosta a_{i-1} niin että $b_i \equiv 2a_i \pmod{10}$, ellei $i > 0$ ja $a_i \geq 5$, jolloin $b_i \equiv 2a_i + 1 \pmod{10}$. Luvun $2n$ numeroiden summa määräytyy siis luvun n numeroista niin, että kukin numeroista tuplataan ja $S(2n)$:ään vaikuttaa tästä tuplasta ykkösosa ja mahdollinen muistinumero. Merkitään

$$\sigma(a) = \begin{cases} 2a, & \text{kun } a \in \{0,1,2,3,4\} \\ 2a-9, & \text{kun } a \in \{5,6,7,8,9\} \end{cases}$$

Edellinen tarkastelu osoittaa täten, että

$$S(2n) = \sum_{i=0}^{k} b_i = \sum_{i=0}^{k} \sigma(a_i),$$

□

Kun $a \in \{5,6,7,8,9\}$, niin

$$1/5 = 2 - 9/5 \leq \sigma(a)/a = (2a-9)/a = 2 - 9/a \leq 2 - 9/9 = 1,$$

joten kaikiaan saadaan arviot

$$\frac{1}{5} \leq \frac{S(2n)}{S(n)} \leq 2.$$

Osoitetaan että kaikki rationaaliluvut q, joille $1/5 \leq q \leq 2$, ovat mahdollisia suhteen $S(2n)/s(n), n \in \mathbb{Z}_+$,arvoja. Tarkastellaan kokonaislukuja

$$n = \underbrace{5\cdots5}_{v\text{kpl}}\underbrace{1\cdots1}_{y\text{kpl}},$$

missä $v, y \in \mathbb{N}$ ja $v+y > 0$. Tällöin $S(n) = 5v+y$ ja $S(2n) = \sigma(5)*v+\sigma(1)*y = 5v+2y$. Olkoon q rationaaliluku, jolle $1/5 \le q \le 2$. Kirjoitetaan $q = m/n$, missä $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Osoitetaan, että voidaan valita $v, y \in \mathbb{N}, v+y > 0$ niin, että

$$\frac{S(2n)}{S(n)} = \frac{5v+2y}{5v+y} = \frac{m}{n}$$

$$\iff (v+2y)n = m(5v+y) \iff (n-5m)v = (m-2n)y.$$

Valitaan nimittäin yksinkertaisesti $v = 2n - m$ ja $y = 5m - n$. Koska $m/n \le 2$, niin $m \le 2n$ ja $2n - m \ge 0$. Vastaavasti koska $m/n \ge 1/5$, niin $5m \ge n$ ja $5m - n \ge 0$. Ei voi olla $v = y = 0$, koska silloin olisi $2n - m = 0$ ja $5m - n = 0$, mistä seuraa $10m = 2n = m \to m = n = 0$, mikä on mahdotonta. Siis $v+y > 0$ ja v ja y on onnistuttu valitsemaan niin, että $\frac{S(2n)}{S(n)} = q$.

Vastaus: Täsmälleen rationaaliluvut q, joille $1/5 \le q \le 2$.