MAA5 Kokeen malliratkaisut:

1. Perustehtäviä 15 p.

Laske ja/tai sievennä tehtävänannon mukaan.

Esitä ratkaisut välivaiheineen ja vastaukset tarkkoina arvoina mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa.

1.1 Määritä $\sin x$ tarkka arvo, kun $\cos x = \frac{2}{5}$ ja $\pi < x < 2\pi$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{21}{25}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

annetulla välillä kehäpisteiden y-koordinaatit ovat negatiivisia, joten vastaus on $\sin x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

1.2

$$2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(kulman $\frac{\pi}{3}$ kehäpisteen koordinaattien tarkat arvot löytyvät taulukkokirjasta)

1.3

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^2}}} = \left(\left(\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3} = x^{2\cdot\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$$

1.4

$$\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[8]{16}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2^4}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{8}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{8}-\frac{1}{6}} = 2^1 = 2$$

eksponentin sievennys:

$${}^{2)}\frac{2}{3} + {}^{3)}\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

1.5

$$\log_4 24 - \log_4 3 + \log_4 8$$

$$= \log_4\frac{24}{3} + \log_4 8 = \log_4 8 + \log_4 8 = \log_4 8\cdot 8 = \log_4 64 = 3$$

2. Yhtälöitä 24 p.

Ratkaise yhtälöt.

2.1

$2\sin 3x = \sqrt{3} \qquad |:2$

$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ huomataan taulukkokirjasta, että $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$3x = \frac{\pi}{3} + n2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = \pi - \frac{\pi}{3} + n2\pi$

$3x = \frac{\pi}{3} + n2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi \qquad ||:3$

$x = \frac{\pi}{9} + n\frac{2\pi}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{2\pi}{9} + n\frac{2\pi}{3}$

2.2

$\cos 3x = \cos 2x$

$3x = 2x + n2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = -2x + n2\pi$

$x = n2\pi \quad \text{tai} \quad 5x = n2\pi$

$x = n2\pi \quad \text{tai} \quad x = n\frac{2\pi}{5}$ Kelpaa ratkaisuksi, MUTTA:

oikanpuoleinen sisältää vasemmanpuoleiset ratkaisut, sillä aina, jos n on jaollinen 5:llä saadaan 2π monikerta

$x = n\frac{2\pi}{5}$, missä $n \in \mathbb{Z}$

2.3

$\log_4 x - \log_4 5 = \frac{5}{2}$ määriottelyehto $x > 0$

$\log_4 \frac{x}{5} = \frac{5}{2}$

$\frac{x}{5} = 4^{\frac{5}{2}} \qquad || \cdot 5$

$x = 5 \cdot \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 5 \cdot 2^5 = 160$ toteuttaa määritteyehdon

2.4

$\lg x + \lg(x-3) = 1$ oltava $x > 0$ ja x-3 > 0, eli $\underline{x > 3}$

$\lg x\,(x-3) = 1$

$x\,(x-3) = 10^1$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$

$x = 5 \quad \text{tai} \quad x = -2$

vain $x = 5$ toteuttaa määrittelyehdon

2.5

$3 \cdot 9^{2x} = 27^{x-1}$

$3^1 \cdot \left(3^2\right)^{2x} = \left(3^3\right)^{x-1}$

$3^{1+4x} = 3^{3(x-1)}$

$1 + 4x = 3x - 3$

$4x - 3x = -3 - 1$

$x = -4$

2.6

$5^{3x} - 2 = 7$

$5^{3x} = 9$

$3x = \log_5 9$

$x = \frac{\log_5 9}{3}$

3. Määrittely- ja arvojoukot 8 p.

Määritä funktion lausekkeen perusteella kunkin funktion määrittelyjoukko (1p) ja arvojoukko (1p). Pelkkä vastaus riittää.

määrittelyjoukko = mitä funktioon voidaan sijoittaa
arvojoukko = mitä arvoja funktio voi saada.

HUOM: Tehtävässä pelkkä vastaus riittää, tässä myös perustelut, jos niistä oppisi jotain 😊

$f(x) = 6\cos 2x - 1$

määrittelyjoukko: $\mathbb{R}$

arvojoukko: [-7,5]

Perustelut:
- trigonometrisilla funktioilla ei ole määrittelyehtoja, kaikki x käy
- cos2x arvot ovat välillä [-1,1]

Pienimmillään siis $6 \cdot (-1) - 1 = -7$ ja suurimmillaan $6 \cdot (1) - 1 = 5$

$f(x) = 1 + 2^x$

määritteyjoukko: $\mathbb{R}$

arvojoukko: $]1,\infty[$ (voi ilmaista vaikka 'arvot suurempia kuin 1' tai $y > 1$)

Perustelut:
- eksponenttifuntioilla ei ole määrittelyehtoja, kaikki x:t käy
- kantaluku 2, kaikki sen potenssit ovat positiivisia

$2^x > 0$, joten $1 + 2^x > 1$

$f(x) = \log_3(x-2)$

määrittelyjoukko: $]2,\infty[$ (tai $x > 2$)

arvojoukko: $\mathbb{R}$

Perustelut:
- logaritmin määrittelyehdon mukaan oltava $x - 2 > 0$, ratkaistaan epäyhtälö.
- logaritmista voidaan vastaukseksi saada kaikkia lukuja, kuvaajan muoto yleisesti:

$f(x) = 2^{\sin x}$

määrittelyjoukko: $\mathbb{R}$

arvojoukko: $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

Perustelut:
-eksponenttilauseke ja sinilauseke eivät kumpikaan aseta määrittelyehtoja, joten kaikki x:t käy

- $-1 \leq \sin x \leq 1$ joten lauseke on pienimmillään $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ja suurimmillaan $2^1 = 2$

4. Lämpötilan mallintaminen 12 p.

Risto oli lomalla Etelä-Amerikassa. Erään vuorokauden aikana ylin lämpötila oli $33°$C klo 15.30 ja alin lämpötila oli $17°$C.

4.1 6 p.

Oletetaan, että lämpötilan t tunnin kuluttua keskiyöstä ilmaisifunktio $f(t) = a\sin(bt+c)+d$ ja että lämpötila vaihtelee jaksollisesti 24 tunnin jaksoissa.

Määritä funktion f lauseke.

$$f(t) = a\sin(bt+c)+d$$

Määritetään a ja d lämpötilan maksimin (33) ja minimin (17) avulla:

Keskilämpötila $\frac{17+33}{2} = 25$ astetta, jonka ylä- ja alapuolelle mennään 8 astetta.

siispä $a = 8,\ d = 25$ ja lauseke on muodossa

$$f(t) = 8\sin(bt+c)+25$$

Määritetään b jakson pituuden (24h) avulla:

$\frac{2\pi}{b} = 24 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ ja lauseke on nyt

$$f(t) = 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t + c\right) + 25$$

HUOM LASKIMEN KÄYTÖSTÄ:

- desimaaliluvun sijoitus = vastaus desimaailukuna, murtoluvun sijoitus $t = \frac{31}{2}$ = vastaus tarkkana. Kumpikin käy.

- siniyhtälö tekee sen, että vastaus tulee jaksojen kanssa. kertoimen n paikalle täytyy siis sijoittaa jakso. Kopioi vastauslauseke ja sijoita! Järkeviä sijoituksia ovat $n = 0$ tai $n = 1$, mutt teoriassa mikä vain kokonaisluku käy.

$$\text{solve}\left(8\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot\frac{31}{2}+c\right)+25=33,c\right)$$

$$\blacktriangleright\ c=\frac{(48\cdot \mathbf{n3}-19)\cdot\pi}{24}$$

$$\frac{(48\cdot 0-19)\cdot\pi}{24} \ \blacktriangleright\ \frac{-19\cdot\pi}{24}$$

$f(t) = 8\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{19\pi}{24}\right) + 25$ (jos sijoittaa $n = 1$ ja saa eri arvon c:lle, niin sekin käy)

Myös likiarvot ovat ok, silloin lauseke on esimerkiksi

$f(t) = 8\sin(0{,}261799t - 2.48709) + 25$ tai $f(t) = 8\sin(0{,}261799t + 3.79609) + 25$

Tehtävän voi ratkaista graafisesti geogebralla. Saadun kuvaajan on toteutettava kaikki tehtävän ehdot ja kertoimien oltava oikein ainakin yhden desimaalin tarkkuudella (mieuiten enemmän)

4.2 2 p.

Käytä edellisessä kohdassa määrttämääsi funktiota ja määritä lämpötila klo 21.45.

Lämpötila klo 21.45 on 21,75h keskiyön jälkeen

$$8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 21.75 - \frac{19 \cdot \pi}{24}\right) + 25 \quad ▸ \quad 24.4768$$

$$f(21{,}75) \approx 24{,}5°C$$

4.3 4 p.

Havainnollista määrittämääsi funktiota koordinaatistossa. Määritä graafisesti, mihin kellonaikaan lämpötila nousi yli 25 celsiusasteen.

$$f(x) = 8 \sin\left(\frac{\pi}{12} x - \frac{19\pi}{24}\right) + 25$$

$g : y = 25$

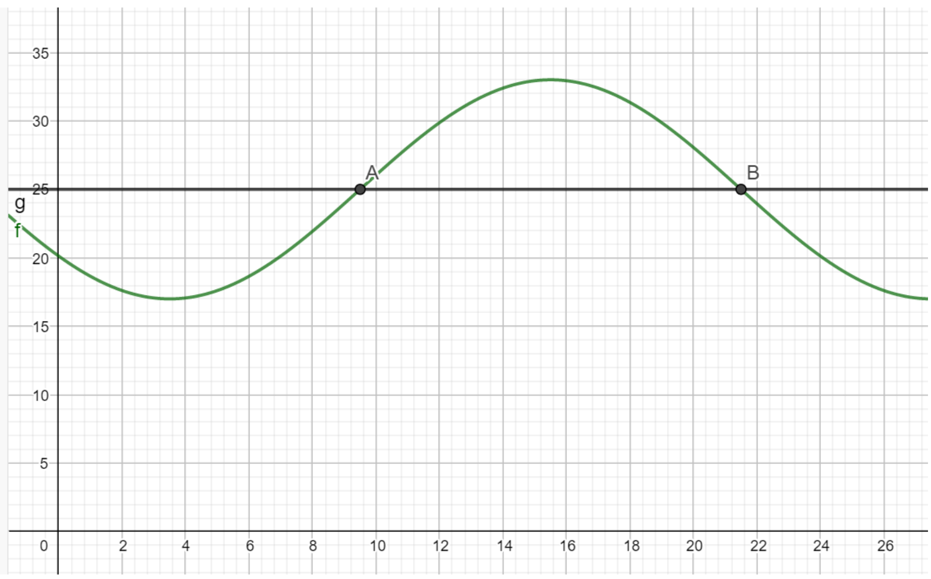
A = Leikkauspiste(f, g, (9.5, 25))

→ (9.5, 25)

B = Leikkauspiste(f, g, (21.5, 25))

→ (21.5, 25)

Syöttökenttä...



Lämpötila on yli 25 astetta aikavälillä 9,5....21,5h keskiyön jälkeen.
Lämpötila nousee yli 25°C klo 9.30.

(alunperin ajattelin tehtävän kysyvän aikaväliä, jolloin lämpötila on yli 25, mutta näinhän tekstissä ei oikeastaan lue)

5. Richterin asteikko 12 p.

Maanjäristyksen voimakkuus voidaan ilmaista Richterin asteikolla. Maanjäristyksen voimakkuus eli magnitudi M Richterin asteikolla on paljas luku, joka voidaan laskea kaavalla $M = 0{,}67 \lg E - 4{,}8$, missä E on järistyksessä vapautunut energia jouleina.

5.1 6 p.

Voimakkain Suomessa mitattu maanjäristys tapahtui Perämerellä vuonna 1882. Sen magnitudi oli 4,9. Kuinka monta joulea energiaa tässä järistyksessä vapautui?

$M = 0{,}67 \lg E - 4{,}8$

Perämeren järistyksessä $M = 4{,}9$

Saadaan yhtälö $4{,}9 = 0{,}67 \lg E - 4{,}8$ Ratkaistaan energia E laskimella (laskin vaihtaa kirjaimen pieneksi):

$$\text{solve}\left(4.9=0.67\cdot \log_{10}(e)-4.8, e\right)$$

$\blacktriangleright\ e=3.00339\text{E}14$

$E \approx 3{,}0 \cdot 10^{14}\,\text{J}$

5.2 6 p.

Vuonna 2004 Intian valtameren pohjassa tapahtui maanjäristys, jonka magnitudi oli noin 9,2. Järistys synnytti suurta tuhoa tuottaneen tsunamiaallon.

Vuonna 2011 tapahtui Tyynen valtameren pohjassa maanjäristys, jonka magnitudi oli noin 9,0. Järistys synnytti tsunamin, joka aiheutti mm. ydinvoimalaonnettomuuden Japanin Fukushimassa.

Kuinka monta prosenttia suurempi energia vapautui vuoden 2004 järistyksessä kuin vuoden 2011 järistyksessä?

Ratkaistaan molempiin järisyksiin liittyvät energiat laskimella:

$$\text{solve}\left(9.2=0.67\cdot \log_{10}(e)-4.8, e\right)$$

$\blacktriangleright\ e=7.86181\text{E}20$

$$\text{solve}\left(9.=0.67\cdot \log_{10}(e)-4.8, e\right) \blacktriangleright\ e=3.9538\text{E}20$$

$E_{2004} = 7{,}86181 \cdot 10^{20}\, J$

$E_{2011} = 3{,}9538 \cdot 10^{20}\, J$

Verrataan fuoden 2004 energiaa vuoden 2011 energiaan

$$\frac{7.86181\text{E}20}{3.9538\text{E}20} \blacktriangleright\ 1.98842$$

$\dfrac{E_{2004}}{E_{2011}} \approx 1{,}988$ Vuoden 2004 on 1,988-kertainen, eli $98{,}8\%$ suurempi.

VAIHTOEHTOINEN TAPA:

Voisi myös käyttää laskinohjelmistoa tehtävässä annetun yhtälön muokkaamiseen niin, että se on ratkaistu E:n suhteen. *(Fysiikkaa...)* Tällöin kaikissa kohdissa selvitään pelkällä magnitudin M sijoituksella.

$$\text{solve}\left(m=0.67\cdot \log_{10}(e)-4.8, e\right)$$

$\blacktriangleright\ e=1.45942\text{E}7\cdot(31.084)^{m}$

Oikean puolen kopioi laskimella seuraavalle riville ja vaihtaa lukua m, esim a)-kohta:

$$14594200\cdot(31.084)^{4.9} \blacktriangleright\ 3.00339\text{E}14$$

6. Gammasäteilyn annos 12 p.

Lyijysuoja vaimentaa erästä gammasäteilyä niin, että 4,0 cm:n paksuinen suoja päästää lävitseen 2,2% säteilystä.

Gammasäteilyn lähde aiheuttaa vieressä olevassa mittauskohdassa yhdessä tunnissa säteilyannoksen, jonka suuruus on 2,5 mSv (millisievertiä).

Säteilyannos tunnissa halutaan pudottaa mittauskohdassa arvoon 8,0 μSv (mikrosievertiä). Kuinka paksu lyijysuoja on asetettava säteilylähteen ja mittauskohdan väliin, jotta tavoite täytyy?

HUOM! Säteilyn vaimeneminen noudattaa eksponentiaalista mallia. Tehtävässä ei vaadita, että säteilyannos halutaan pudottaa alle 8,0mikroSv, joten pyöristys voidaan tehdä tavallisten pyöristyssääntöjen mukaan. Jos perustelee valintansa ja pyöristää (pyöristyssääntöjen vastaisesti) ylöspäin, niin sekin on ok. Kaksi vaihtoehtoista ratkaisua:

Vaihtoehto 1: ratkaistaan ensin paljonko 1cm lyijysuoja vaimentaisi säteilyä

4 cm paksu suoja päästää läpi 2,2%. Aluksi säteilyannos on a, lopuksi $0{,}022a$. Muodostetaan lauseke:

$$a \cdot k^4 = 0{,}022a$$

missä kerroin k kuvaa sitä, paljonko säteilyä pääsee 1cm suojan läpi. a supistuu pois, ratkaistaan k.

$$\text{solve}\left(k^4=0.022,k\right)$$

▸ $k=-0.385129$ or $k=0.385129$

vain positiivinen ratkaisu kelpaa muutoskertoimeksi, eli jokaista cm kohti säteily tulee 0,385129-kertaiseksi.

Lähtöarvo 2,5 mSv, loppuarvo 8,0μSv. Tutkitaan, mikä tarvitaan kertoimen k eksponentiksi, että vaikutus saadaan aikaiseksi:

$$\text{solve}\left(2.5\cdot 10^{-3}\cdot (0.385129)^x=8\cdot 10^{-6},x\right)$$

▸ $x=6.02048$

Lyijysuojan on siis oltava 6,0cm paksu.

Vaihtoehto 2: tutkitaan 'montako' 4cm suojaa tarvitaan vaikutuksen aikaansaamiseksi.

eksponentiaalisen mallin mukaisesti

$$alkuarvo \cdot 0{,}022^x = loppuarvo$$

missä x kertoo kuinka monta 4 cm suojakerrosta tarvittaisiin.

$$\text{solve}\left(2.5\cdot 10^{-3}\cdot (0.022)^x=8\cdot 10^{-6},x\right)$$

▸ $x=1.50512$

tarvitaan noin 1,5-kertainen suoja

$1.50512\cdot 4.$ ▸ 6.02048

Suojan on oltava 6.0cm

7. Suuret luvut 12 p.

Normaaleilla marginaaliasetuksilla ja fonttikoolla 11 kirjoitettuna tavallisen A4-paperin sivulle mahtuu n. 4200 merkkiä. Yhden paperin paksuus on noin 0,10 mm.

Kuinka korkea pino papereista syntyisi, jos luku $2025^{202\,520\,252}$ kirjoitettaisiin ja tulostettaisiin näillä sivuasetuksilla kaksipuoleisesti A4-papereille?

Ilmoita vastaus kilometreinä kahden numeron tarkkuudella.

Ratkaisu:

Numeroiden lukumäärä annetussa luvussa:

$$\lg 2025^{202520252} = 202520252 \cdot \lg 2025 = 669618029.79865$$

$$2025^{202520252} \approx 10^{669618029.79865}$$

Luvussa on siis 669618029+1=669618030 merkkiä

Yhdelle sivulle mahtuu 4200 merkkiä, kaksipuoleiselle arkille siis 8400 merkkiä. Arkkeja tarvitaan

$$\frac{669618030}{8400} \approx 79716.4$$

Koko luvun tulostamiseen tarvitaan 79717 arkkia paperia.

Jokaisen arkin paksuus on 0,10mm

$$79717 \cdot 0{,}10mm = 7971{,}7mm = 7{,}9717m \approx 8{,}0m$$

Osoittautuu, että tehtävässä annettu kehotus antaa vastaus kilometreina on liioiteltu... (tehtävä on kirjasarjan koepaketista)

TI-Nspire -laskimella tehdyt laskut:

$202520252. \cdot \log_{10}(2025)$	6.69618E8
669618029.79865	6.69618E8
$\frac{669618030}{8400}$	79716.4

Keskimmäisessä vaiheessa olen vain kopioinut ensimmäisen vaiheen vastauksen ja liittänyt seuraavaan kenttään, koska halusin nähdä luvun kokonaislukuosan kokonaan.

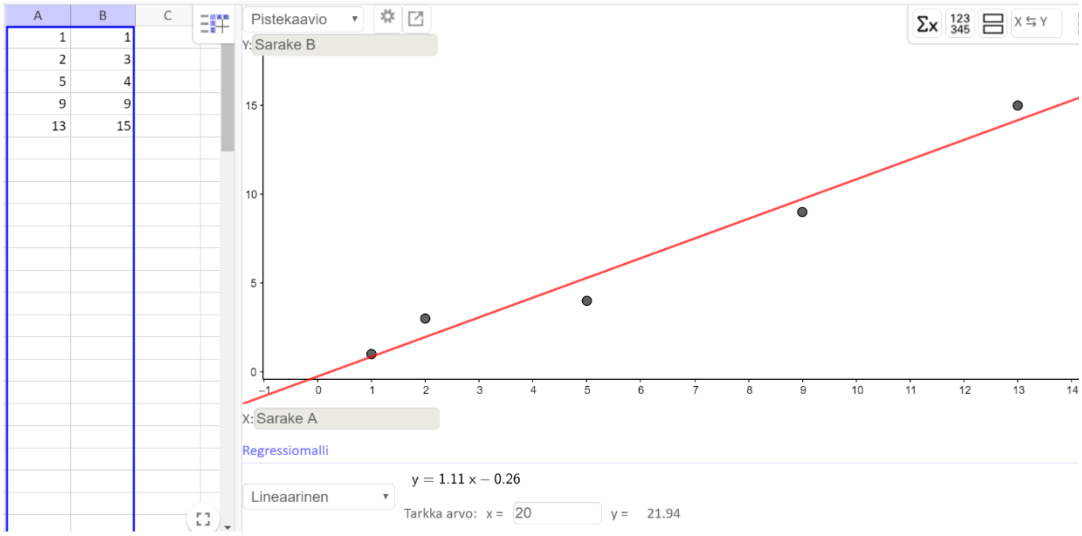
Näihin laskuihin voidaan käyttää mitä tahansa ei-CAS-laskintakin, koska yhtälönratkaisua tai lausekkeen sieventämistä ei tarvita.

8. Mallin sovitus (12 p.)

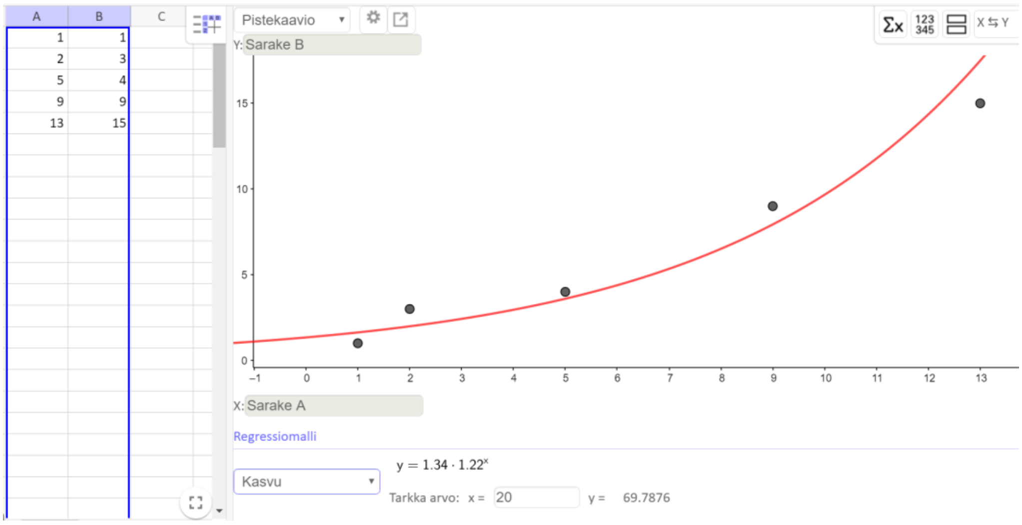
Taulukkoon on koottu mittaustulokset toisistaan riippuvien suureiden x ja y arvoista.

x	y
1	1
2	3
5	4
9	9
13	15

8.1 Lineaarinen malli. Kuvasta näkyy myös, että jos x=20, saadaan y=21.94



8.2 Eksponentiaalisen kasvun malli. Kuvasta näkyy myös, että jos x=20, saadaan y=69.8



8.3

Molempien mallien antamiin yhtälöihin on sijoitettu x=20. Huomataan, että eksponentiaalinen malli antaa paremman ennusteen, jos tiedetään, että pitäisi olla y=65.