Helsingin yliopisto
Matemaattisten tieteiden kandiohjelma ja taloustieteen kandiohjelma
Valintakoe 30.5.2022 – mallivastaukset

Tehtävä 1 (10 pistettä)

1a) Ratkaise epäyhtälö $x^2 \leq 4$. 5 pistettä
1b) Mitkä luvut x ∈ R toteuttavat molemmat epäyhtälöt $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ja $x^2 - 4 \leq 0$? 5 pistettä

Ratkaisut:

$$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2$$
$$\Leftrightarrow x \leq 2 \; ja \; x \geq -2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; tai \; x = 3 \; (toisen\ asteen\ yhtälön\ ratkaisukaavalla)$$
$$Ylöspäin\ aukeava\ paraabeli\ ja\ epäyhtälö\ toteutuu, kun\ 1 \leq x \leq 3$$
$$Yhdistämällä\ a - kohtaan\ saadaan: 1 \leq x \leq 2$$

Tehtävä 2 (10 pistettä)

2a) Muodosta ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (2,1) ja säde 2. Laske ympyrän niiden pisteiden y-koordinaatit, joiden x-koordinaatti on 1. 5 pistettä

2b) Määritä a-kohdan ympyrän pienin etäisyys suorasta 3y = 4x + 20. 5 pistettä

Ratkaisu:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$
$$x = 1 \Rightarrow (y-1)^2 = 4 - 1 = 3$$
$$y = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$Piste\ (-2,4) on\ lähin\ piste\ suoralla, sillä\ normaali\ tässä\ pisteessä\ kulkee\ pisteen\ (2,1)\ kautta$$
$$Keskipisteen\ etäisyys\ suorasta\ |(2,1) - (-2,4)| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$
$$Ympyrän\ etäisyys\ suorasta\ on\ 5 - 2 = 3$$

Tehtävä 3 (10 pistettä)

Pakkausautomaatti täyttää kaakaopaketteja. Kaakaon määrä on normaalijakautunut ja keskihajonta on 10 grammaa. Odotusarvoa voidaan säätää. Mikä pitäisi säätää odotusarvoksi, kun tavoitteena on valmistaa kaakaopaketteja, joista enintään 2,0 % sisältää alle 500 grammaa kaakaota? Anna vastaus gramman tarkkuudella.

Ratkaisu:

$$Kaakaon\ määrä\ X \sim N(\mu, 10) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{10} \sim N(0,1)$$

$$Kaakaopaketti\ on\ alipainonen\ todennäköisyydellä\ P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\mu - 500}{10}\right)$$

$$Tämän\ on\ oltava\ \le 0{,}02, joten\ \Phi\left(\frac{\mu-500}{10}\right) \ge 0{,}98$$

$$Kertymäfunktiotaulukon\ mukaan\ \left(\frac{\mu-500}{10}\right) \ge 2{,}05$$

$$Tästä\ saadaan\ \mu \ge 20{,}5 + 500 = 520{,}5$$

$$Kaakaon\ odotusarvoksi\ on\ säädettävä\ 521\ grammaa$$

Tehtävä 4 (10 pistettä)

Tehtaassa valmistetaan ananastölkkejä. Ananaksen paloja pakataan suoran ympyrälieriön muotoiseen peltitölkkiin. Tölkin pohja- ja kansilevyjen materiaalin hinta on 2,00 e/m2 ja vaipan materiaalin hinta 1,00 e/m2. Suunnittele materiaalikustannuksiltaan mahdollisimman halpa peltitölkki, jonka tilavuus on 1 000 cm3. Anna vastauksena tölkin korkeuden ja pohjan halkaisijan suhteen tarkka arvo.

Ratkaisu:

$$Tölkin\ pohjaympyrän\ säde\ on\ r\ ja\ korkeus\ h$$

$$Tilavsuus\ on\ \pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$Vaippapellin\ hinta\ on \frac{1€}{m^2}\ ja\ pohjapellin\ \frac{2€}{m^2}$$

$$Pellin\ hinta\ on\ yhteenä\ H(r) = 2\pi r^2 * 2 + 2\pi rh * 1$$

$$4\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r}, jossa\ r > 0$$

$$A'(r) = 8\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 8\pi r^3 - 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi r^3 = 250 \Leftrightarrow r^3 = \frac{250}{\pi} \Leftrightarrow r = 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

$$Derivaatan\ H'(r)\ merkkikaavion\ mukaan\ r\ on\ minimikohta\ ja\ halvimman\ tölkin\ pohjan\ säde$$

$$Suhde\ on\ \frac{h}{2r} = \frac{1000}{\pi r^2 * 2r} = \frac{500}{\pi r^3} = \frac{500}{\pi \frac{250}{\pi}} = 2$$

Tehtävä 5 (10 pistettä)

5a) Määritä käyrien $y = 12x^3 - 36x$ ja $y = -12x^2 + 36x$ leikkauspisteet. 5 pistettä
5b) Näiden käyrien väliin jää kaksi rajoitettua aluetta. Laske näiden pinta-alojen summa. 5 pistettä

Ratkaisu:

$$Leikkauspisteiden\ x - koordinaatit\ saadaan$$
$$12x^3 - 36x == -12x^2 + 36x \Leftrightarrow 12x^3 \pm 12x^2 - 72x$$
$$\Leftrightarrow 12x\left(x^2 + x - 6\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ tai\ x^2 + x - 6 = 0\ \Leftrightarrow x = 0\ tai\ x = -3\ tai\ x = 2$$
$$Edelliset\ sijoittamalla\ yhtälöihin\ saadaan\ leikkauspisteet\ (-3, -216), (0,0)\ ja\ (2,24)$$

$$Merkitään\ f(x) = 12x^3 - 36x\ ja\ y = 12x^2 + 36x$$
$$Koska\ f(x) \geq g(x)\ välillä - 3 \leq x \leq 0\ ja\ g(x) \geq f(x)\ välillä\ 0 \leq x \leq 2\ ja\ pinta - ala\ on$$
$$\int_{-3}^{0}\left(f(x) - g(x)\right)dx + \int_{0}^{2}\left(g(x) - f(x)\right)dx =$$
$$\int_{-3}^{0}\left(12x^3 + 12x^2 - 72x\right)dx + \int_{0}^{2}\left(-12x^3 - 12x^2 + 72x\right)dx = 253$$