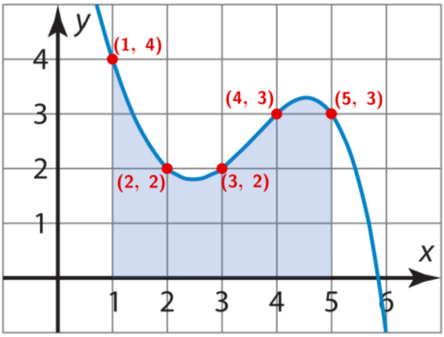
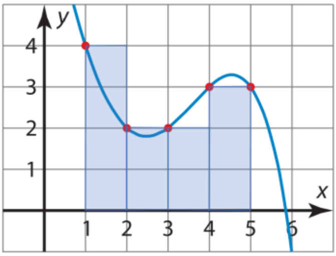
B1



Jaetaan väli $[1,\ 5]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus $d = \frac{5-1}{4} = 1.$ Alue sijaitsee x-akselin yläpuolella, joten määrätty integraali $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ on yhtä suuri kuin funktion kuvaajan ja x-akselin välillä $[1,\ 5]$ rajaaman alueen pinta-ala.

a) Suorakulmion korkeuden laskentakohtana käytetään osavälin alkupistettä. Luetaan suorakulmioiden korkeudet annettujen pisteiden y-koordinaateista.

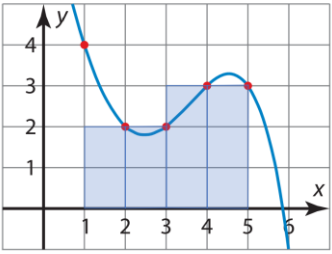
Lasketaan suorakaidesäännöllä arvio alueen pinta-alalle.



$$\begin{aligned} A &\approx d \cdot (f(1) + f(2) + f(3) + f(4)) \\ &= 1 \cdot (4 + 2 + 2 + 3) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Siis määrätty integraali $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x \approx 11.$

b) Suorakulmion korkeuden laskentakohtana käytetään osavälin loppupistettä.



Lasketaan suorakaidesäännöllä arvio alueen pinta-alalle.

$$A \approx d \cdot (f(2) + f(3) + f(4) + f(5))$$
$$= 1 \cdot (2 + 2 + 3 + 3)$$
$$= 10$$

Siis määrätty integraali $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x \approx 10.$

Vastaus

a) 11

b) 10

B2

Alue on x-akselin yläpuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{6-3x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2} (6-3x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad s(x) = 6-3x \quad s'(x) = -3$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot \int_{-1}^{2} \underbrace{-3}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(6-3x)^{\frac{1}{2}}}_{u(s(x))}\,\mathrm{d}x \qquad u(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad U(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3} \mathop{/}_{-1}^{2} \underbrace{\frac{2}{3}(6-3x)^{\frac{3}{2}}}_{U(s(x))} \qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x)) + C$$

$$= -\frac{2}{9} \mathop{/}_{-1}^{2} \sqrt{(6-3x)^3}$$

$$= -\frac{2}{9}\left(\sqrt{(6-3\cdot 2)^3} - \sqrt{(6-3\cdot(-1))^3}\right)$$

$$= -\frac{2}{9}\left(\sqrt{0^3} - \sqrt{9^3}\right)$$

$$= -\frac{2}{9}\cdot\left(-\sqrt{729}\right)$$

$$= -\frac{2}{9}\cdot(-27)$$

$$= 6$$

Vastaus

6

B3

a) $\int (\sin 4x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int \sin 4x\,\mathrm{d}x - \int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int 4\sin 4x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos 4x) - \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

b) $\int x^2 \mathrm{e}^{x^3-1}\mathrm{d}x$

$s(x) = x^3 - 1$ $\quad s'(x) = 3x^2$

$u(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad U(x) = \mathrm{e}^x$

$$= \frac{1}{3}\int 3x^2 \mathrm{e}^{x^3-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3-1} + C$$

Vastaus

a) $-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

b) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3-1} + C$

B4

a) Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_{-2}^{1}(x^2 - ax)\mathrm{d}x = \Big/_{\!-2}^{\,1}\left(\frac{1}{3}x^3 - a\cdot\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - a\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - a\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a - \left(-\frac{8}{3} - 2a\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a + \frac{8}{3} + 2a$$

$$= \frac{2}{3}a + 3$$

Sijoitetaan määrätyn integraalin arvo tehtävän yhtälöön ja ratkaistaan vakio a.

$$\int_{-2}^{1}(x^2 - ax)\mathrm{d}x = 6$$

$$\frac{3}{2}a + 3 = 6 \qquad | -3$$

$$\frac{3}{2}a = 3 \qquad | \cdot\frac{2}{3}$$

$$a = 2$$

b) Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_0^a e^{2x}dx$$

Yhdistetty funktio e^{2x}.

$s(x) = 2x \qquad s'(x) = 2$

Lisätään kertoimeksi $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a 2e^{2x}dx$$

$$\int s'(x) \cdot u(s(x))dx = U(s(x)) + C$$

$$= \frac{1}{2}\Big/_0^a e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2a} - e^{2\cdot 0})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2a} - 1)$$

Sijoitetaan määrätyn integraalin arvo tehtävän yhtälöön ja ratkaistaan vakio a.

$$\int_0^a e^{2x}dx = 4$$

$$\frac{1}{2}(e^{2a} - 1) = 4 \qquad | \cdot 2$$

$$e^{2a} - 1 = 8 \qquad | +1$$

$$e^{2a} = 9$$

$$2a = \ln 9 \qquad |: 2$$

$$a = \frac{1}{2}\ln 9 \quad \left(= \frac{1}{2}\ln 3^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\ln 3 = \ln 3\right)$$

Vastaus

a) $a = 2$

b) $a = \frac{1}{2}\ln 9 \quad (= \ln 3)$

B5

Selvitetään funktion f määrittelyjoukko ratkaisemalla nimittäjän nollakohdat.

$$\begin{aligned} x-1&=0 \quad |+1 \\ x&=1 \end{aligned}$$

Funktio f on määritelty, kun $x \neq 1$.
Määrittelyjoukko koostuu kahdesta erillisestä välistä: $x < 1$ ja $x > 1$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x < 1$.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

$$F(x) = 2\ln|x-1| + C$$

Poistetaan itseisarvomerkit.

Kun $x < 1$, niin $x-1 < 0$.
Siis $|x-1| = -(x-1)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\ln|x-1| + C \\ &= 2\ln(-(x-1)) + C \\ &= 2\ln(1-x) + C \end{aligned}$$

Piste $(0,\ 2)$ kuuluu alueeseen $x < 1$.
Määritetään vakio C.

$$\begin{aligned} F(0) &= 2 \\ 2\ln(1-0) + C &= 2 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis $F(x) = 2\ln(1-x) + 2,$ kun $x < 1$.

2) Määritetään integraalifunktio välillä $x > 1$.

$$F(x) = 2\ln|x-1| + D$$
$$= 2\ln(x-1) + D$$

Kun $x > 1$, niin $x - 1 > 0$.
Siis $|x-1| = x-1$.

Piste $(2,-1)$ kuuluu alueeseen $x > 1$.
Määritetään vakio D.

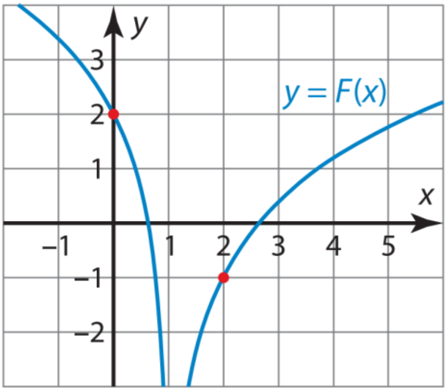
$$F(2) = -1$$
$$2\ln(2-1) + D = -1$$
$$D = -1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Siis $F(x) = 2\ln(x-1) - 1$, kun $x > 1$.

Integraalifunktio on $F(x) = \begin{cases} 2\ln(1-x) + 2, & \text{kun } x < 1 \\ 2\ln(x-1) - 1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$

Piirretään funktion F kuvaaja.



Vastaus

$$F(x) = \begin{cases} 2\ln(1-x) + 2, & \text{kun } x < 1 \\ 2\ln(x-1) - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

B6

a) Määritetään funktion $f(x)$ lauseke laskemalla määrätty integraali.

$$f(x)=\int_0^1 (2x-4t)\mathrm{d}t$$

Integroidaan muuttujan t suhteen, jolloin x on vakio.

$$=\Big/_0^1 (2x\cdot t-\cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}t^2)$$

$$=\Big/_0^1 (2xt-2t^2)$$

$$=(2x\cdot 1-2\cdot 1^2)-(\underbrace{2x\cdot 0-2\cdot 0^2}_{=0})$$

$$=2x-2$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f(x)&=0 \\ 2x-2&=0 \quad &&|+2 \\ 2x&=2 \quad &&|:2 \\ x&=1 \end{aligned}$$

b) Määritetään funktion $f(t)$ lauseke laskemalla määrätty integraali.

$$f(t) = \int_0^1 (2x - 4t)\mathrm{d}x$$

Integroidaan muuttujan x suhteen, jolloin t on vakio.

$$= \Big/_0^1 \left(\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 - 4t \cdot x\right)$$

$$= \Big/_0^1 (x^2 - 4tx)$$

$$= (1^2 - 4t \cdot 1) - (\underbrace{0^2 - 4t \cdot 0}_{=0})$$

$$= 1 - 4t$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 0 \\
1 - 4t &= 0 \qquad | -1 \\
-4t &= -1 \qquad |: (-4) \\
t &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

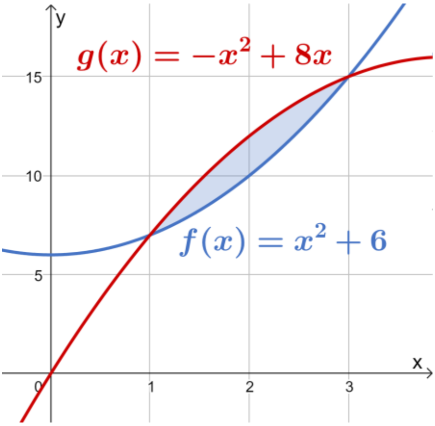
Vastaus

a) $x = 1$

b) $t = \frac{1}{4}$

B7

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktioiden $f(x)=x^2+6$ ja $g(x)=-x^2+8x$ kuvaajat sekä niiden rajaama alue.



Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauskohdat.

$f(x)=g(x)$

$x^2+6=-x^2+8x$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=1$ tai $x=3$

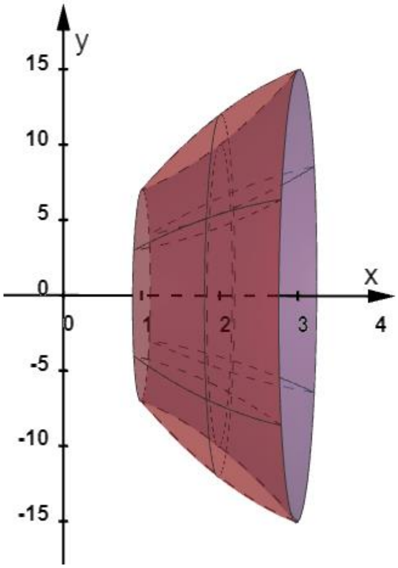
a) Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta funktion g ja alapuolelta funktion f kuvaaja. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A=\int_1^3(-x^2+8x-(x^2+6))\mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$=\frac{8}{3}$$

b) Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu funktion g kuvaajan ja sisäpinta funktion f kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi \int_1^3 (-x^2 + 8x)^2 \, dx - \pi \int_1^3 (x^2 + 6)^2 \, dx \\
&= \frac{176}{3}\pi \quad (\approx 184{,}3)
\end{aligned}
$$

Lasketaan CAS-laskimella.

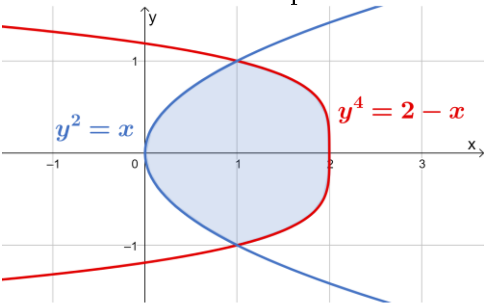
Vastaus

a) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{176}{3}\pi$

B8

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Integroidaan muuttujan y suhteen. Ratkaistaan integrointia varten käyrien yhtälöistä muuttuja x.

$y^2 = x$	$y^4 = 2 - x \quad \vert +x - y^4$
$x = y^2$	$x = 2 - y^4$

Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla käyrien leikkauspisteiden y -koordinaatit.

$y^2 = 2 - y^4$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$y = -1 \quad \text{tai} \quad y = 1$

Välillä $-1 \le y \le 1$ aluetta rajaa oikealta käyrä $x = 2 - y^4$ ja vasemmalta käyrä $x = y^2$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-1}^{1} (2 - y^4 - y^2)\,\mathrm{d}y$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{44}{15}$$

Vastaus

$\frac{44}{15}$

B9

Kirjan 1. painoksessa tehtävänannossa on virhe. Pitää olla $a > 0$.

Käyrä $y = x^2 - a^2$ on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrän ja koordinaattiakselien leikkauskohdat.

x-akselin leikkauskohdat:

$x^2 - a^2 = 0$ $\quad$ $y = 0$

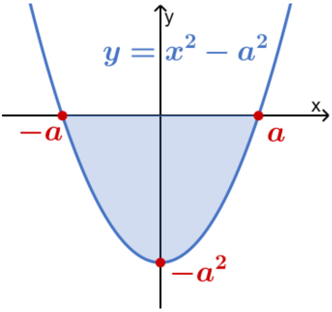
$x = -a$ tai $x = a$

y-akselin leikkauskohta:

$y = 0^2 - a^2$ $\quad$ $x = 0$

$y = -a^2$

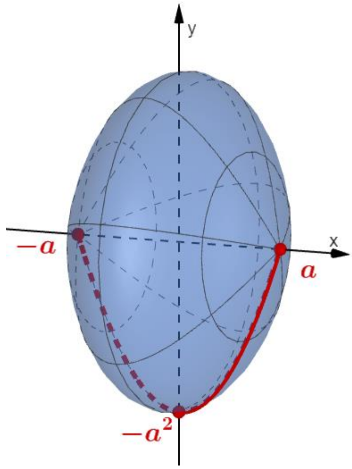
Käyrä leikkaa x-akselin kohdissa $x = -a$ ja $x = a$. Käyrä leikkaa y-akselin kohdassa $y = -a^2$.



Koska $a > 0$, niin käyrä ja x-akseli rajaavat alueen x-akselin alapuolella välillä $-a \leq x \leq a$.

a) Alue pyörähtää x-akselin ympäri välillä $-a \leq x \leq a$.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale.

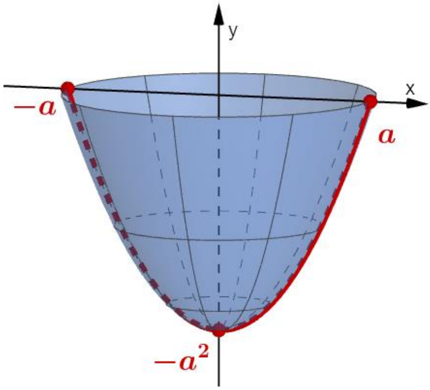


Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_{-a}^{a} (f(x))^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-a}^{a} (x^2 - a^2)^2 \, dx \\
&= \frac{16\pi}{15} a^5
\end{aligned}
$$

Lasketaan CAS-laskimella.

b) Alue pyörähtää y-akselin ympäri välillä $-a^2 \leq y \leq 0$. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale.



Ratkaistaan integrointia varten käyrän $y = x^2 - a^2$ yhtälöstä muuttuja x.

$$y = x^2 - a^2$$

Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

$$\underbrace{x = -\sqrt{y + a^2}}_{\text{paraabelin vasen puoli}} \quad \text{tai} \quad \underbrace{x = \sqrt{y + a^2}}_{\text{paraabelin oikea puoli}}$$

Siis poikkileikkausympyrän säteen neliö on

$$r^2 = |x|^2 = x^2 = \sqrt{y + a^2}^{\,2}.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V_y = \pi \int_{-a^2}^{0} \sqrt{y + a^2}^{\,2} \, \mathrm{d}y$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{\pi}{2} a^4$$

Ratkaistaan lopuksi millä vakion a arvolla pyörähdyskappaleiden tilavuudet ovat yhtä suuret.

$$V_x = V_y$$

$$\frac{16\pi}{15} a^5 = \frac{\pi}{2} a^4$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = 0 \quad \text{tai} \quad a = \frac{15}{32}$$

Koska $a > 0$, niin $a = \frac{15}{32}$.

Vastaus

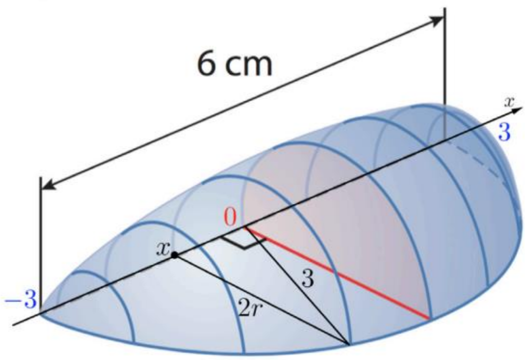
a) $\frac{16\pi}{15} a^5$

b) $\frac{\pi}{2} a^4$

Tilavuudet ovat yhtä suuret, kun $a = \frac{15}{32}$.

B10

Sijoitetaan koru koordinaatistoon niin, että x-akseli kulkee pitkin korun takareunaa ja origo on pohjana olevan puoliympyrän keskipisteessä.



Määritetään poikkileikkauspuoliympyrän säde kohdassa x käyttämällä Pythagoraan lausetta.

$x^2 + (2r)^2 = 3^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$r = -\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$ tai $r = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$

Koska $r \geq 0$, niin $r = \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$.

Kohdassa x poikkileikkauspuoliympyrän pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}\right)^2 = \frac{1}{8}(9-x^2).$$

Lasketaan korun tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-3}^{3} A(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{3} \frac{1}{8}(9-x^2)\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\
&= \frac{9\pi}{2}\ (\mathrm{cm}^3)
\end{aligned}
$$

Lasketaan korun massa.

$$m = \frac{9\pi}{2}\ \mathrm{cm}^3 \cdot 1{,}2\ \mathrm{g/cm}^3 = 16{,}964...\ \mathrm{g} \approx 17\ \mathrm{g}$$

Vastaus
17 g