A1

Funktiot $F(x) = x + 4 + \ln(x+1)$ ja $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ ovat molemmat määriteltyjä, kun $x > -1$.

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x > -1$.

$$D u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= D(x + 4 + \ln(x+1)) \\
&= \underbrace{Dx}_{=1} + \underbrace{D5}_{=0} + D\underbrace{\ln(x+1)}_{u(s(x))} \\
&= 1 + 0 + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{1}_{s'(x)} \\
&\overset{x+1)}{=} 1 + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{x+1+1}{x+1} \\
&= \frac{x+2}{x+1} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio F on eräs funktion f integraalifunktio. $\square$

A2

a) $\int_{-1}^{3} (2x^3 - 4x)\mathrm{d}x$

$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

$= \mathop{/}_{-1}^{3} (2 \cdot \frac{1}{4} x^4 - 4 \cdot \frac{1}{2} x^2)$

$= \mathop{/}_{-1}^{3} (\frac{1}{2} x^4 - 2x^2)$

$= \frac{1}{2} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^2 \; - \; \frac{1}{2} \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2$

$= \frac{81}{2} - 18 - \frac{1}{2} + 2$

$= \frac{80}{2} - 16$

$= 40 - 16$

$= 24$

b) $\int_{1}^{3} (\sqrt{x} + x^2)\mathrm{d}x$

$= \int_{1}^{3} (x^{\frac{1}{2}} + x^2)\mathrm{d}x$

$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

$= \mathop{/}_{1}^{3} (\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} x^3)$

$x^{\frac{3}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^1 x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$

$= \mathop{/}_{1}^{3} (\frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{3} x^3)$

$= \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot 3^3 - (\frac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1} + \frac{1}{3} \cdot 1^3)$

$= 2\sqrt{3} + 9 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

$= 2\sqrt{3} + 8$

Vastaus

a) 24 **b)** $2\sqrt{3} + 8$

A3

a) $\int x^3\sqrt{2x^4+7}\,\mathrm{d}x$

$= \int x^3(2x^4+7)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad s(x)=2x^4+7 \;\; s'(x)=8x^3$

$= \frac{1}{8}\int 8x^3(2x^4+7)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad u(x)=x^{\frac{1}{2}} \qquad U(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(2x^4+7)^{\frac{3}{2}}+C$ $\qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x))+C$

$= \frac{1}{12}(2x^4+7)^1(2x^4+7)^{\frac{1}{2}}+C$

$= \frac{1}{12}(2x^4+7)\sqrt{2x^4+7}+C$

b) Nimittäjä $1+5x^2>0$ kaikilla x.

$\int \frac{x}{1+5x^2}\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{10}\int \frac{10x}{1+5x^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$

$= \frac{1}{10}\ln|1+5x^2|+C$ $\qquad$ Koska $1+5x^2>0$, niin $|1+5x^2| = 1+5x^2$.

$= \frac{1}{10}\ln(1+5x^2)+C$

Vastaus

a) $\frac{1}{12}(2x^4+7)\sqrt{2x^4+7}+C$

b) $\frac{1}{10}\ln(1+5x^2)+C$ (myös $\frac{1}{10}\ln|1+5x^2|+C$ hyväksytään)

A4

Integroidaan funktio f.

$$\begin{aligned}F(x) &= \int (\mathrm{e}^{-x} - \cos 4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \int \cos 4x\,\mathrm{d}x \\ &= -\int -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int 4\cos 4x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\sin 4x + C\end{aligned}$$

Funktion F arvo kohdassa 0 on $1.$ Määritetään vakio C.

$$F(0) = 1 \qquad F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

$$\begin{aligned}\underbrace{-\mathrm{e}^{-0}}_{=1} - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(4\cdot 0)}_{=0} + C &= 1 \\ -1 + C &= 1 \quad | +1 \\ C &= 2\end{aligned}$$

Integraalifunktio on $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\sin 4x + 2.$

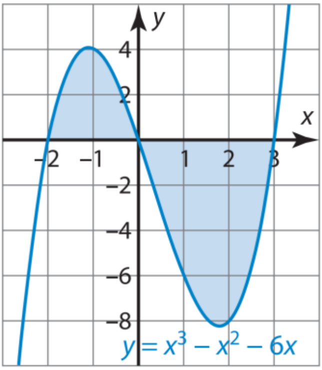
Vastaus

$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{4}\sin 4x + 2$

A5

Opiskelija on saanut alueen pinta-alaksi negatiivisen arvon. Hän ei tutkinut, onko alue x-akselin yläpuolella vai alapuolella.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Kuvan perusteella osa alueesta on x-akselin alapuolella.

Integroimisrajat, eli funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauskohdat, opiskelija on ratkaissut oikein:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -2, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3.$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{253}{12} \end{aligned}$$

Lasketaan CAS-laskimella.

A6

Kun $x > 0$, on $y = \dfrac{1}{x} > 0$. Siis käyrä on x-akselin yläpuolella.

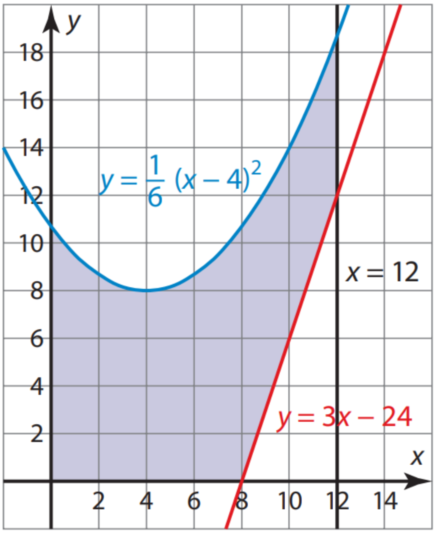
Lasketaan käyrän ja x-akselin välillä $[a,\ 3a]$ rajaaman alueen pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^{3a} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{a}^{3a} \ln|x| && a > 0 \\
&= \Big/_{a}^{3a} \ln x \\
&= \ln 3a - \ln a && \ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y} \\
&= \ln \frac{3\cancel{a}}{\cancel{a}} \\
&= \ln 3, \quad \text{kun } a > 0
\end{aligned}
$$

Alueen pinta-ala on $\ln 3$ kaikilla $a > 0$. Pinta-ala ei siis riipu vakion a arvosta. $\square$

A7

a) Piirretään GeoGebralla suorat $x = 12$ ja $y = 3x - 24$, käyrä $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + 8$ sekä rajattu alue.



Alueen voi värittää monikulmiotyökalulla tai integroimalla kahdessa osassa: `Integraali(`$\frac{1}{6}$`(x-4)`^{2}`,0,8)` ja `IntegraaliVäli(`$\frac{1}{6}$`(x-4)`^{2}`,3x-24,8,12)`

b) Integroimisraja saadaan selville ratkaisemalla suoran $y = 3x - 24$ ja x-akselin leikkauskohta.

$$3x - 24 = 0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = 8$$

Välillä $[0,\ 8]$ aluetta rajaa yläpuolelta käyrä $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + 8$ ja alapuolelta x-akseli.

Välillä $[8,\ 12]$ aluetta rajaa yläpuolelta käyrä $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + 8$ ja alapuolelta suora $y = 3x - 24$.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_0^8 \left(\frac{1}{6}(x-4)^2 + 8\right)\mathrm{d}x + \int_8^{12} \left(\frac{1}{6}(x-4)^2 + 8 - (3x - 24)\right)\mathrm{d}x$$

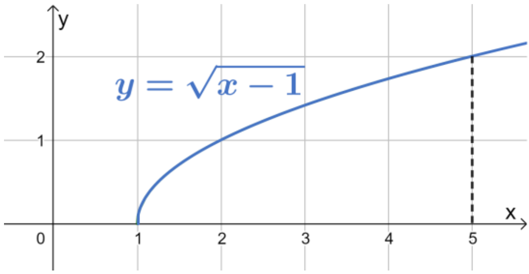
Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 104$$

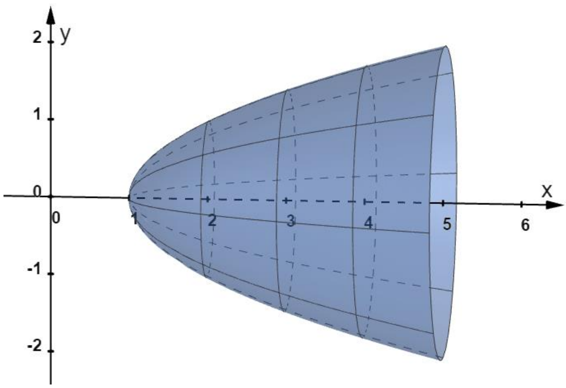
Vastaus
b) 104

A8

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrä $y = \sqrt{x-1}$.



a) Käyrän välillä $1 \leq x \leq 5$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale.



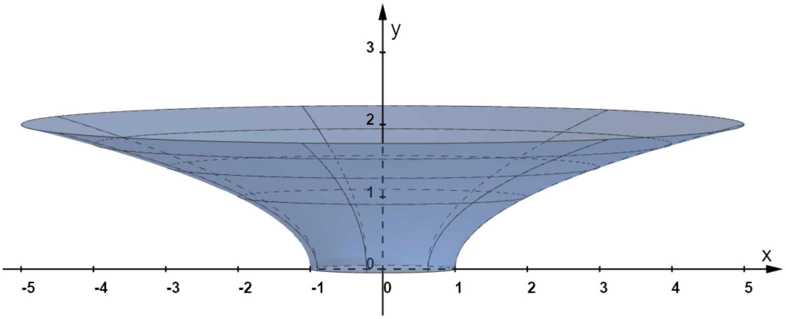
Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 8\pi \quad (\approx 25{,}1)$$

b) Käyrän välillä $1 \le x \le 5$ oleva osa pyörähtää y -akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale.



Integroidaan muuttujan y suhteen. Ratkaistaan integroimisrajat käyrän yhtälön avulla.

$y = \sqrt{x-1} = \sqrt{1-1} = 0$ Sijoitetaan alaraja $x = 1$.

$y = \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$ Sijoitetaan yläraja $x = 5$.

Ratkaistaan integrointia varten käyrän yhtälöstä muuttuja x.

$y = \sqrt{x-1}$ Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

$x = y^2 + 1$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_0^2 (y^2+1)^2 \, \mathrm{d}y$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{206}{15}\pi \quad (\approx 43{,}1)$$

Vastaus

a) 8π

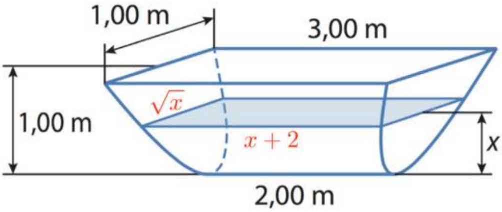
b) $\frac{206}{15}\pi$

A9

Poikkileikkauksen pinta-ala korkeudella x on

$A(x)=(x+2)\cdot\sqrt{x}$,

missä $0\leq x\leq 1$.



Lasketaan altaan tilavuus.

$$V=\int_0^1 A(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 (x+2)\cdot\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$=1{,}7333...\ (\mathrm{m}^3)$

Altaan tilavuus on $1{,}7333...\ \mathrm{m}^3=1733{,}3...\ \mathrm{dm}^3\approx 1730\ \mathrm{L}$.

Vastaus
1730 L

A10

a) Ratkaistaan polynomin P nollakohdat.

$$P(x) = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-1+3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-3}{2}$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -2$$

Jaetaan polynomi P tekijöihin.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + x - 2 \\ &= 1 \cdot (x-1)(x-(-2)) \\ &= (x-1)(x+2) \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan vakioiden A ja B arvot.

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = {}^{x+2)}\frac{A}{x-1} + {}^{x-1)}\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A - B}{(x-1)(x+2)}$$

Yhtälö toteutuu, kun osoittajat ovat yhtä suuret.

Pitää siis olla

$$(A+B)x+2A-B=1$$
$$(A+B)\cdot x+2A-b=0\cdot x+1.$$

Muodostetaan yhtälö pari ja ratkaistaan A ja B.

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{array}\right. \\ \hline 3A=1 \quad |:3 \\ A=\dfrac{1}{3} \end{array}$$

Ratkaistaan vakio B sijoittamalla $A=\dfrac{1}{3}$ ensimmäiseen yhtälöön.

$$A+B=0$$
$$\frac{1}{3}+B=0 \quad |-\frac{1}{3}$$
$$B=-\frac{1}{3}$$

c) Integroidaan funktio $\frac{1}{P(x)}$. Käytetään hyödyksi kohdan b tietoa, että

$$\frac{1}{P(x)}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+2}.$$

$$\int\frac{1}{P(x)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C$$

Koska $x\geq 2$, niin $x-1>0$ ja $x+2>0$, joten $|x-1|=x-1$ ja $|x+2|=x+2.$

$$=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)+C$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\ \ln(x-1)-\ln(x+2)\ \ +C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}+C,\quad \text{kun } x\geq 2$$

Vastaus

a) $P(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

b) $A=\frac{1}{3}$ ja $B=-\frac{1}{3}$

c) $\int\frac{1}{P(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}+C,\quad \text{kun } x\geq 2$