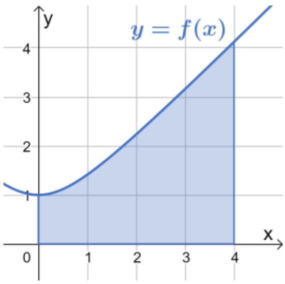
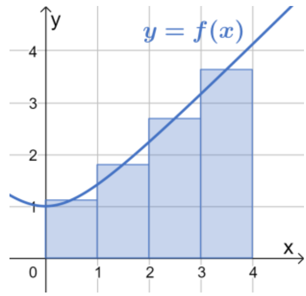
K1





Jaetaan väli $[0,\ 4]$ neljään osaväliin, jolloin yhden osavälin pituus $d = \dfrac{4-0}{4} = 1$.
Suorakulmion korkeuden laskentakohtana käytetään osavälin keskipistettä.

Lasketaan osavälien keskipisteet.

$\dfrac{0+1}{2} = 0{,}5$ 1. osavälin keskipiste

$\dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$ 2. osavälin keskipiste

$\dfrac{2+3}{2} = 2{,}5$ 3. osavälin keskipiste

$\dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$ 4. osavälin keskipiste

Lasketaan suorakulmioiden korkeudet.

$f(0{,}5) = \sqrt{1+0{,}5^2} = \sqrt{1{,}25}$ 1. suorakulmion korkeus

$f(1{,}5) = \sqrt{1+1{,}5^2} = \sqrt{3{,}25}$ 2. suorakulmion korkeus

$f(2{,}5) = \sqrt{1+2{,}5^2} = \sqrt{7{,}25}$ 3. suorakulmion korkeus

$f(3{,}5) = \sqrt{1+3{,}5^2} = \sqrt{13{,}25}$ 4. suorakulmion korkeus

Lasketaan arvio pinta-alalle.

$$A \approx 1 \cdot (\sqrt{1{,}25} + \sqrt{3{,}25} + \sqrt{7{,}25} + \sqrt{13{,}25}) = 9{,}25$$

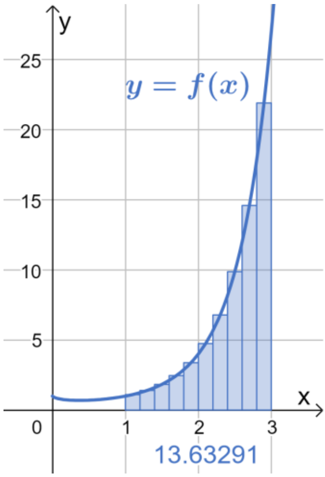
Vastaus
$9{,}25$

K2

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Piirretään funktion $f(x) = x^x$ kuvaaja.

a) Määritetään suorakulmiosumman arvo välillä $[1,\ 3]$, kun $n = 10$ ja laskentakohtana on osavälin keskipiste.



Suorakulmiosumma(f, 1, 3, 10, 0.5)

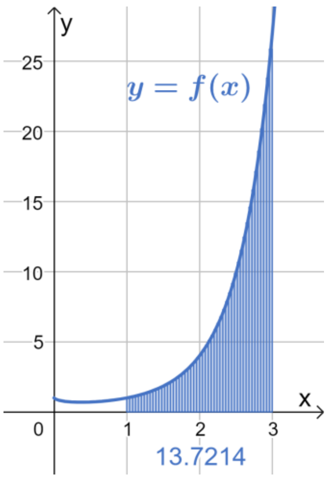
Suorakulmiosumman arvoksi saadaan kahden desimaalin tarkkuudella $13{,}63$.

Koska välillä $[1,\ 3]$ funktion f arvot ovat epänegatiivisia, pinta-alan arvio on suorakulmiosumman arvo:

$A \approx 13{,}63.$

b) Kun $n = 50$, suorakulmiosumman arvoksi saadaan kolmen desimaalin tarkkuudella $13,72$. Pinta-alan arvio on siis

$A \approx 13,72.$



Suorakulmiosumma (f, 1, 3, 50, 0.5)

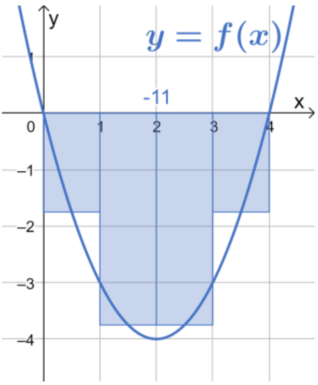
Vastaus

a) $A \approx 13,63$

b) $A \approx 13,72$

K3

Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.



Piirretään funktion $f(x) = x^2 - 4x$ kuvaaja.
Funktion f kuvaaja.

Määritetään kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteet.

(0, 0) ja (4, 0)

Siis funktion f kuvaaja ja x-akseli rajaavat alueen välillä $[0,\ 4]$.

Määritetään suorakulmiosumman arvo välillä $[0,\ 4]$, kun $n = 4$ ja laskentakohtana on osavälin keskipiste.

Suorakulmiosumman arvoksi saadaan kahden numeron tarkkuudella -11.

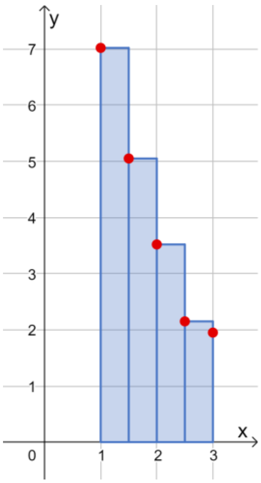
Koska funktion f arvot välillä $]0,\ 4[$ ovat negatiivisia, pinta-alan arvio on suorakulmiosumman itseisarvo.

$A \approx |-11| = 11$

Vastaus
$A \approx 11$

K4

Taulukosta nähdään, että osavälien lukumäärä on neljä ja yhden osavälin pituus $d = 0,5.$ Taulukon arvot kertovat suorakulmioiden korkeudet.



Lasketaan arvio pinta-alalle suorakaidesäännöllä. Käytetään laskentakohtana osavälin alkupistettä.

$$\begin{aligned} A &\approx d \cdot (f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5)) \\ &\approx 0,5 \cdot (7,02 + 5,05 + 3,52 + 2,15) \\ &\approx 8,87 \end{aligned}$$

Vastaus
$A \approx 8,87$

K5

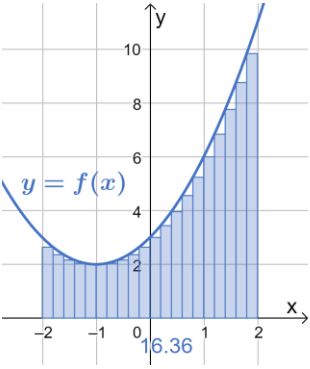
Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

a) Piirretään funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ kuvaaja.

Määritetään alasumma välillä $[-2, 2]$, kun $n = 20$.

Saadaan kahden desimaalin tarkkuudella $s_{20} \approx 16{,}36$.

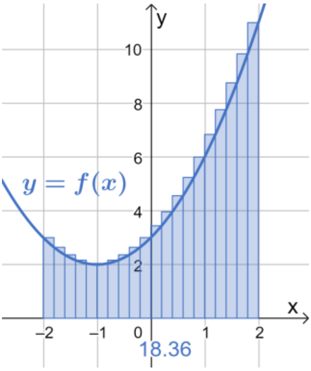
Alasumma(f,-2, 2, 20)



Määritetään yläsumma välillä $[-2, 2]$, kun $n = 20$.

Saadaan kahden desimaalin tarkkuudella $S_{20} \approx 18{,}36$.

Yläsumma(f,-2, 2, 20)



b) A-kohdan tulosten perusteella $16{,}3 < \int_{-2}^{2} (x^2 + 2x + 3)\mathrm{d}x < 18{,}4$.

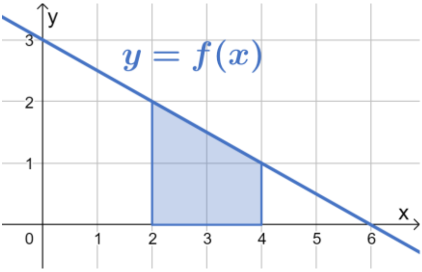
Vastaus

a) $s_{20} \approx 16{,}5$ ja $S_{20} \approx 18{,}36$

b) $16{,}3 < \int_{-2}^{2} (x^2 + 2x + 3)\mathrm{d}x < 18{,}4$

K6

a) Kuvasta nähdään, että välillä $[2,\ 4]$ funktion f kuvaajan ja *
x-akselin rajaama alue on puolisuunnikas, joka sijaitsee x-akselin yläpuolella.



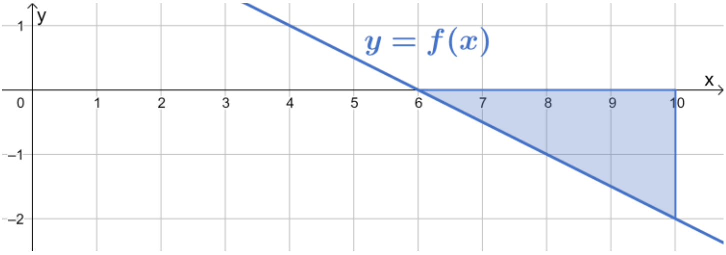
Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A_2 = \frac{2+1}{2} \cdot 2 = \frac{6}{2} = 3 \qquad A = \frac{a+b}{2}h$$

Määrätty integraali on yhtä suuri kuin alueen pinta-ala.

$$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = A = 3$$

b) Kuvasta nähdään, että välillä $[6,\ 10]$ funktion f kuvaajan ja x-akselin rajaama alue on suorakulmainen kolmio, joka sijaitsee x-akselin alapuolella.



Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \qquad A = \frac{1}{2}ah$$

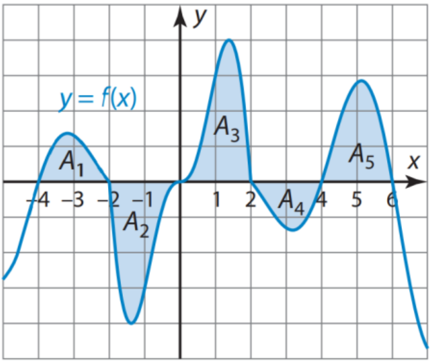
Määrätty integraali on yhtä suuri kuin alueen pinta-alan vastaluku.

$$\int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x = -A = -4$$

Välillä $]6,\ 10]$ funktion f kuvaajan on x-akselin alapuolella.

Vastaus
a) 3
b) -4

K7



a) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = A_3 = 12$

$A_3 = 12$

b) $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = -A_4 = -5$

$A_4 = 5$

c) $\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x$

$= \underbrace{\int_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x}_{-A_2} + \underbrace{\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x}_{A_3}$

$= -A_2 + A_3$

$= -12 + 12$

$= 0$

Jaetaan integraali osiin funktion nollakohtien mukaan.

Välillä $[-2,\ 0]$ funktion kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Välillä $[0,\ 2]$ funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

$A_2 = 12$ ja $A_3 = 12$

d)

$$\int_{-4}^{6} f(x)\mathrm{d}x$$

Jaetaan integraali osiin funktion nollakohtien mukaan.

$$= \underbrace{\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x}_{A_1} + \underbrace{\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x}_{-A_2} + \underbrace{\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x}_{A_3} + \underbrace{\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x}_{-A_4} + \underbrace{\int_{4}^{6} f(x)\mathrm{d}x}_{A_5}$$

$$= A_1 + (-A_2) + A_3 + (-A_4) + A_5$$

$$= A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

$A_1 = 5,\ A_2 = 12,\ A_3 = 12,$
$A_4 = 5$ ja $A_5 = 10$

$$= 5 - 12 + 12 - 5 + 10$$
$$= 10$$

Vastaus
a) 12
b) -5
c) 0
d) 10

K8

Osoitetaan, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathrm{D}((5+x^4)^3) \qquad\qquad\qquad \mathrm{D}(u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x) \\ &= 3(5+x^4)^2 \cdot \mathrm{D}(5+x^4) \\ &= 3(5+x^4)^2 \cdot 4x^3 \\ &= 12x^3(x^4+5)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio F on funktion f integraalifunktio. $\square$

K9

a)

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int (2x^3 - 4x + 1)\mathrm{d}x$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{2}} x^4 - \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 + 1 \cdot x + C$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + C$$

$f(x) = 2x^3 - 4x + 1$

Integroidaan jokainen termi erikseen.

Riittää merkitä yksi integroimisvakio.

b) $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int (1 - \pi)\mathrm{d}x$$

$$= 1 \cdot x - \pi \cdot x + C$$

$$= (1 - \pi)x + C$$

$f(x) = 1 - \pi$

Vastaus

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + C$

b) $F(x) = (1 - \pi)x + C$

K10

a) Funktion f eräs integraalifunktio on $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + x,$ sillä

$$
\begin{aligned}
F_0'(x) &= \mathrm{D}(\tfrac{1}{3}x^3 + x) \\
&= x^2 + 1 \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

b) Funktio F on funktion f integraalifunktio täsmälleen silloin, kun $F(x) = F_0(x) + C,$ missä $C \in \mathbf{R}$ on vakio.

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat siis

$$F(x) = F_0(x) + C = \frac{1}{3}x^3 + x + C.$$

c) Määritetään vakion C arvo niin, että integraalifunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$ kuvaaja kulkee pisteen $(3, \ -5)$ kautta.

$$
\begin{aligned}
F(3) &= -5 \\
\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 + C &= -5 \\
9 + 3 + C &= -5 \\
12 + C &= -5 \qquad \| -12 \\
C &= -17
\end{aligned}
$$

Integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(3, \ -5)$ kautta on siis $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 17.$

Vastaus

a) $F_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$

c) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 17$

K11

Määritetään funktion $f(x)=\frac{2x^2-3}{5}$ integraalifunktio.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2x^2-3}{5}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{5}(2x^2-3)\mathrm{d}x && \text{Siirretään vakio } \tfrac{1}{5} \text{ integraali-merkin eteen.} \\
&= \frac{1}{5}\int (2x^2-3)\mathrm{d}x && \text{Integroidaan termit erikseen.} \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}x^3-3\cdot x\right)+C \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}x^3-3x\right)+C && \text{Avataan sulut.} \\
&= \frac{2}{15}x^3-\frac{3}{5}x+C
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan, millä vakion C arvolla integraalifunktio $F(x)$ kulkee pisteen $(-5, 1)$ kautta.

$$F(-5)=1 \qquad F(x)=\frac{2}{15}x^3-\frac{3}{5}x+C$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{15}\cdot(-5)^3-\frac{3}{5}\cdot(-5)+C &= 1 \\
\frac{2}{15}\cdot(-125)+3+C &= 1 \qquad |\cdot 15 \\
2\cdot(-125)+45+15C &= 15 \\
-250+45+15C &= 15 \\
-205+15C &= 15 \qquad |+205 \\
15C &= 220 \qquad |:15 \\
C &= {}^{(5}\frac{220}{15} \\
C &= \frac{44}{3}
\end{aligned}
$$

Kysytty integraalifunktio on siis $F(x)=\frac{2}{15}x^3-\frac{3}{5}x+\frac{44}{3}$.

Vastaus $F(x)=\frac{2}{15}x^3-\frac{3}{5}x+\frac{44}{3}$

K12

a) $\int_{2}^{6} 4x\mathrm{d}x$

Määritetään funktion $f(x)=4x$ jokin integraalifunktio F.

$= \mathop{/}_{2}^{6} (\cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2)$

$= \mathop{/}_{2}^{6} \underbrace{2x^2}_{F(x)}$

Lasketaan erotus $F(6)-F(2)$.

$= \underbrace{2\cdot 6^2}_{F(6)} - \underbrace{2\cdot 2^2}_{F(2)}$

$= 72-8$

$= 64$

b)

$\int_{-1}^{2} (2x^2-6)\mathrm{d}x$

Määritetään funktion $f(x)=2x^2-6$ jokin integraalifunktio F.

$= \mathop{/}_{-1}^{2} (2\cdot \frac{1}{3} x^3 - 6\cdot x)$

$= \mathop{/}_{-1}^{2} (\frac{2}{3} x^3 - 6x)$

Lasketaan erotus $F(2)-F(-1)$.

$= (\frac{2}{3}\cdot 2^3 - 6\cdot 2) - (\frac{2}{3}\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1))$

$= \frac{16}{3} - 12 - (-\frac{2}{3}+6)$

$= \frac{16}{3} - 12 + \frac{2}{3} - 6$

$= 6-18$

$= -12$

Vastaus
a) 64
b) -12

K13

Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_a^{2a} (3-2x)\mathrm{d}x$$

Määritetään funktion $f(x) = 3-2x$ jokin integraalifunktio F.

$$= \Big/_{a}^{2a} (3\cdot x - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^2)$$

$$= \Big/_{a}^{2a} (3x - x^2)$$

Lasketaan erotus $F(2a)-F(a)$.

$$= (3\cdot 2a - (2a)^2) - (3a - a^2)$$
$$= 6a - 4a^2 - 3a + a^2$$
$$= -3a^2 + 3a$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\int_a^{2a} (3-2x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^{2a} (3-2x)\mathrm{d}x = -3a^2 + 3a$$

$$-3a^2 + 3a = 0$$

Otetaan yhteinen tekijä $3a$.

$$3a(-a+1) = 0$$

$3a = 0$ tai $-a+1 = 0$

$a = 0$ $\qquad$ $a = 1$

Vastaus

$a = 0$ tai $a = 1$

K14

Funktio $F(x) = x\sin x + \cos x$ on funktion $f(x) = x\cos x$ integraalifunktio jos $F'(x) = f(x)$.

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \mathrm{D}(x\sin x + \cos x) \\
&= \mathrm{D}x\sin x + \mathrm{D}\cos x \\
&= \mathrm{D}x \cdot \sin x + x \cdot \mathrm{D}\sin x + \mathrm{D}\cos x \\
&= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x \\
&= x\cos x \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{D}(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$\mathrm{D}\sin x = \cos x$$
$$\mathrm{D}\cos x = -\sin x$$

Funktio F on siis funktion f integraalifunktio.

Vastaus
on

K15

Määritetään funktion f integraalifunktio F.

$$f(x) = 3x^2 - 6$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int (3x^2 - 6)\mathrm{d}x \\ &= \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} x^3 - 6x + C \\ &= x^3 - 6x + C \end{aligned}$$

Koska $F'(x) = f(x)$, voidaan integraalifunktion F ääriarvoja tarkastella funktion f avulla.

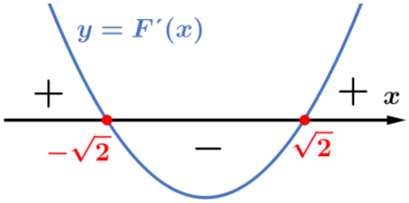
Määritetään derivaattafunktion F' nollakohdat.

$$\begin{aligned} F'(x) &= 0 \\ f(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6 &= 0 \quad |+6 \\ 3x^2 &= 6 \quad |:3 \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{2}$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio. Derivaattafunktio F' on kaikkialla jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.
Derivaattafunktion F' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$F'(x)$	$+$		$-$		$+$
$F(x)$	↗		↘		↗
		max		min	



Kulkukaaviosta nähdään, että integraalifunktiolla F on maksimikohta $x = -\sqrt{2}$. Integraalifunktion F maksimiarvo on siis -6, kun $F(-\sqrt{2}) = -6$. Ratkaistaan integroimisvakio C.

$$
\begin{aligned}
F\left(-\sqrt{2}\right) &= -6 & \qquad & F(x) = x^3 - 6x + C \\
\left(-\sqrt{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + C &= -6 \\
-2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + C &= -6 \\
4\sqrt{2} + C &= -6 & & \mid -4\sqrt{2} \\
C &= -6 - 4\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Kysytty integraalifunktio on siis

$$F(x) = x^3 - 6x - 6 - 4\sqrt{2}.$$

Vastaus

$F(x) = x^3 - 6x - 6 - 4\sqrt{2}$

K16

Selvitetään, milloin lausekkeen $2x-4$ arvot ovat epänegatiivisia.

$$\begin{aligned} 2x-4 &\geq 0 \quad && |+4 \\ 2x &\geq 4 && |:2 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Ilmaistaan integroitavan funktion lauseke paloittain määriteltynä ilman itseisarvoja.

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{kun } x \geq 2 \\ -(2x-4), & \text{kun } x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-4, & \text{kun } x \geq 2 \\ -2x+4, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$$

Integroitava lauseke siis muuttuu kohdassa $x = 2$.

Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_0^6 |2x-4|\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 |2x-4|\,\mathrm{d}x + \int_2^6 |2x-4|\,\mathrm{d}x \qquad |2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{kun } x \geq 2 \\ -2x+4, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$$

$$= \int_0^2 (-2x+4)\,\mathrm{d}x + \int_2^6 (2x-4)\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathop{/}_0^2 \left(-\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 + 4x\right) + \mathop{/}_2^6 \left(\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 - 4x\right)$$

$$= \mathop{/}_0^2 (-x^2 + 4x) + \mathop{/}_2^6 (x^2 - 4x)$$

$$= (-2^2 + 4 \cdot 2) - \underbrace{(-0^2 + 4 \cdot 0)}_{=0} + (6^2 - 4 \cdot 6) - (2^2 - 4 \cdot 2)$$

$$= -4 + 8 + 36 - 24 - 4 + 8$$

$$= 20$$

Vastaus

20

K17

a) $\int \frac{3}{x^2}\mathrm{d}x$

$= \int 3 \cdot \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$= 3\int x^{-2}\mathrm{d}x$

$= 3 \cdot (-1) \cdot x^{-1} + C$

$= -\frac{3}{x} + C, \quad \text{kun} \quad x > 0$

b) $\int \frac{3}{x}\mathrm{d}x$

$= \int 3 \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= 3\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= 3\ln|x| + C$

$= 3\ln x + C, \quad \text{kun} \quad x > 0$

$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

Koska $x > 0$, niin $|x| = x$.

Vastaus

a) $-\frac{3}{x} + C, \quad \text{kun} \quad x > 0$

b) $3\ln x + C, \quad \text{kun} \quad x > 0$

K18

a) $\int \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x$

$= \int x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$

$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$ $\qquad x^{\frac{5}{4}} = x^{1+\frac{1}{4}} = x^1 x^{\frac{1}{4}}$

$= \frac{4}{5}x^1 x^{\frac{1}{4}} + C$

$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C, \text{ kun } x > 0$

b) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$= \int 2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$

$= 2\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

$= 2 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C$

$= 4\sqrt{x} + C, \text{ kun } x > 0$

Vastaus

a) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C, \text{ kun } x > 0$

b) $4\sqrt{x} + C, \text{ kun } x > 0$

K19

a) $\int (5x-2)^7 \,\mathrm{d}x$

Yhdistetty funktio $(5x-2)^7$.

$s(x) = 5x-2 \quad s'(x) = 5$

$u(x) = x^7 \qquad U(x) = \frac{1}{8}x^8$

$\int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x)) + C$

$$= \frac{1}{5}\int 5(5x-2)^7 \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}(5x-2)^8 + C$$

$$= \frac{1}{40}(5x-2)^8 + C$$

b) $\int x\sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x$

Yhdistetty funktio $(x^2+5)^{\frac{1}{2}}$.

$s(x) = x^2+5 \quad s'(x) = 2x$

$u(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad U(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$\int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x)) + C$

$$= \int x(x^2+5)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+5)^1(x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + C$$

Vastaus

a) $\frac{1}{40}(5x-2)^8 + C$

b) $\frac{1}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + C$

K20

a) Funktio e^{2x} voidaan integroida yhdistetyn funktion integrointisääntöä käyttäen.

$$\int e^{2x}dx \qquad s(x) = 2x \qquad s'(x) = 2$$

$$= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx \qquad u(x) = e^x \qquad U(x) = e^x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + C \qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))dx = U(s(x)) + C$$

Oikea vastaus on vaihtoehto 4.

b) Funktiota e^{x^2} ei voida integroida yhdistetyn funktion integrointisääntöä käyttäen, sillä lausekkeeseen ei saada kertoimeksi sisäfunktion x^2 derivaattaa $2x$.

Oikea vastaus on vaihtoehto 6.

c) Funktio xe^{x^2} voidaan integroida yhdistetyn funktion integrointisääntöä käyttäen.

$$\int xe^{x^2}dx \qquad s(x) = x^2 \qquad s'(x) = 2x$$

$$= \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx \qquad u(x) = e^x \qquad U(x) = e^x$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C \qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))dx = U(s(x)) + C$$

Oikea vastaus on vaihtoehto 1.

d) Funktio $x^2e^{x^3}$ voidaan integroida yhdistetyn funktion integrointisääntöä käyttäen.

$$\int x^2 e^{x^3} \mathrm{d}x \qquad s(x) = x^3 \qquad s'(x) = 3x^2$$

$$= \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3} \mathrm{d}x \qquad u(x) = \mathrm{e}^x \qquad U(x) = \mathrm{e}^x$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + C \qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x)) + C$$

Oikea vastaus on vaihtoehto 2.

e) Funktio $\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$ voidaan integroida yhdistetyn funktion integrointisääntöä käyttäen.

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} \mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x \qquad s(x) = -2x \qquad s'(x) = -2$$

$$= -\frac{1}{2}\int -2\mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x \qquad u(x) = \mathrm{e}^x \qquad U(x) = \mathrm{e}^x$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + C \qquad \int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x)) + C$$

Oikea vastaus on vaihtoehto 5.

Vastaus

a) 4
b) 6
c) 1
d) 2
e) 5

K21

Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla funktion $f(x) = 5 - e^x$ ja x-akselin leikkauskohta eli funktion f nollakohta.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
5 - e^x &= 0 && \mid -5 \\
-e^x &= -5 && \mid \cdot(-1) \\
e^x &= 5 && \qquad a^x = b \iff x = \log_a b \\
x &= \ln 5 \ \ (\approx 1{,}6)
\end{aligned}
$$

Funktion $f(x) = 5 - e^x$ arvot ovat epänegatiivisia välillä $0, \ \ln 5$. Pinta-ala on funktion f määrätty integraali.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\ln 5} f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\ln 5} (5 - e^x)\,dx \\
&= \int_0^{\ln 5} 5\,dx - \int_0^{\ln 5} e^x\,dx \\
&= \Big/_{0}^{\ln 5} 5x - \Big/_{0}^{\ln 5} e^x \\
&= 5\ln 5 - 5 \cdot 0 - (\underbrace{e^{\ln 5}}_{5} - \underbrace{e^0}_{1}) \\
&= 5\ln 5 - 0 - 5 + 1 \\
&= 5\ln 5 - 4 \ (\approx 4{,}0)
\end{aligned}
$$

Tarkistetaan tuloksen mielekkyys likiarvon avulla.

Vastaus

$5\ln 5 - 4$

K22

a)

$$\int \sin(8x-1)\mathrm{d}x$$

Yhdistetty funktio $\sin(8x-1)$.

$s(x)=8x-1 \quad s'(x)=8$

$$=\frac{1}{8}\int 8\sin(8x-1)\,\mathrm{d}x$$

$u(x)=\sin x \qquad U(x)=-\cos x$

$$=\frac{1}{8}\cdot(-\cos(8x-1))+C$$

$$\int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x))+C$$

$$=-\frac{1}{8}\cos(8x-1)+C$$

b)

$$\int (5\cos x+1)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int 5\cos x\mathrm{d}x + \int 1\mathrm{d}x$$

$$=5\int \cos x\mathrm{d}x + \int 1\mathrm{d}x$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$=5\sin x + x + C$$

Vastaus

a) $-\frac{1}{8}\cos(8x-1)+C$

b) $5\sin x + x + C$

K23

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - \cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

Yhdistetty funktio $\cos 2x$.

$s(x) = 2x \qquad s'(x) = 2$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$u(x) = \cos x \qquad U(x) = \sin x$

$$= 2\Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x) - \frac{1}{2}\Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x$$

$\int s'(x)\cdot u(s(x))\mathrm{d}x = U(s(x)) + C$

$$= 2(-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos\frac{\pi}{4})) - \frac{1}{2}(\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 2\cdot\frac{\pi}{4})$$

$$= 2(\underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\underbrace{(\sin\pi}_{0}\underbrace{- \sin\frac{\pi}{2})}_{1}$$

$$= 2(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{1}{2}(0 - 1)$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

Vastaus

$\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

K24

a) $\int \sin x \cos^4 x \mathrm{d}x$

$= \int \sin x (\cos x)^4 \, \mathrm{d}x$

$= -\int -\sin x (\cos x)^4 \mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{5}(\cos x)^5 + C$

$= -\frac{1}{5}\cos^5 x$

Yhdistetty funktio $(\cos x)^4$.

$s(x) = \cos x \qquad s'(x) = -\sin x$

$u(x) = x^4 \qquad U(x) = \frac{1}{5}x^5$

$\int s'(x) \cdot u(s(x)) \mathrm{d}x = U(s(x)) + C$

b) $\int \frac{\cos x}{3\sin^2 x} \mathrm{d}x$

$= \int \frac{1}{3}\cos x \cdot \frac{1}{(\sin x)^2} \mathrm{d}x$

$\frac{1}{(\sin x)^2} = (\sin x)^{-2}$

$= \frac{1}{3}\int \cos x (\sin x)^{-2} \mathrm{d}x$

Yhdistetty funktio $(\sin x)^{-2}$.

$s(x) = \sin x \qquad s'(x) = \cos x$

$u(x) = x^{-2} \qquad U(x) = -x^{-1}$

$= \frac{1}{3}(-(\sin x)^{-1}) + C$

$\int s'(x) \cdot u(s(x)) \mathrm{d}x = U(s(x)) + C$

$= -\frac{1}{3\sin x} + C, \quad \text{kun} \quad 0 < x < \pi$

Vastaus

a) $-\frac{1}{5}\cos^5 x$

b) $-\frac{1}{3\sin x} + C, \quad \text{kun} \quad 0 < x < \pi$

K25

Määritetään funktion $f(x) = 4e^x - e^{3x}$ integraalifunktiot.

$$F(x) = \int (4e^x - e^{3x})dx$$ Integroidaan CAS-laskimella.

$$= 4e^x - \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Tehtävänä on määrittää vakio C niin, että integraalifunktion F suurin arvo on 5.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$F'(x) = f(x) = 4e^x - e^{3x}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4e^x - e^{3x} = 0$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \ln 2 \ (\approx 0{,}7)$$

Laaditaan funktion F kulkukaavio. Derivaattafunktio f on kaikkialla jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain sen nollakohdassa $x = \ln 2 \approx 0,7.$ Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$F'(x) = 4e^x - e^{3x}$

$F'(0) = 3 > 0$ $+$

$F'(1) \approx -9,21 < 0$ $-$

		$\ln 2$	
$F'(x) = f(x)$	$+$		$-$
$F(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Funktio F saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \ln 2$. Funktion suurimman arvon tulee olla 5. Ratkaistaan vakio C.

$$F(\ln 2) = 5$$

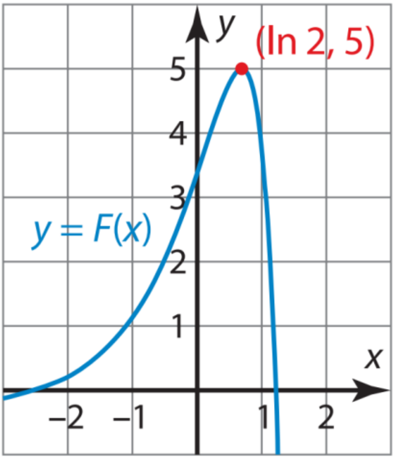
$$F(x) = 4e^{x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$4e^{\ln 2} - \frac{1}{3}e^{3\ln 2} + C = 5$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$C = -\frac{1}{3}$$

Integraalifunktio on $F(x) = 4e^{x} - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$. Tarkistetaan piirtämällä funktion kuvaaja.



Vastaus

$F(x) = 4e^{x} - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$

K26

a) Selvitetään funktion f määrittelyjoukko ratkaisemalla nimittäjän nollakohdat.

$$\begin{aligned} 2x-1&=0 \quad &&|+1 \\ 2x&=1 &&|:2 \\ x&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Funktio f on määritelty, kun $x \neq \frac{1}{2}$.

Määrittelyjoukko koostuu kahdesta erillisestä välistä: $x < \frac{1}{2}$ ja $x > \frac{1}{2}$.

1) Määritetään integraalifunktio välillä $x < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$$

Poistetaan itseisarvomerkit.

Kun $x < \frac{1}{2}$, niin $2x-1<0$.

Siis $|2x-1| = -(2x-1)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C \\ &= \frac{1}{2}\ln(-(2x-1))+C \\ &= \frac{1}{2}\ln(1-2x)+C \end{aligned}$$

Siis $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1-2x)+C$, kun $x < \frac{1}{2}$.

2) Määritetään integraalifunktio välillä $x > \frac{1}{2}$.

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + D$$

Kun $x > \frac{1}{2}$, niin $2x-1 > 0$.

Siis $|2x-1| = 2x-1$.

$$= \frac{1}{2}\ln(2x-1) + D$$

Siis $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1) + D$, kun $x > \frac{1}{2}$.

Integraalifunktio on $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1-2x) + C, \text{ kun } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(2x-1) + D, \text{ kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

b) Piste $(0,\ 0)$ kuuluu alueeseen $x < \frac{1}{2}$.

Määritetään vakio C.

$$F(0) = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(1-2\cdot 0) + C = 0$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{=0} + C = 0$$

$$C = 0$$

Piste $(1,\ 5)$ kuuluu alueeseen $x > \frac{1}{2}$.

Määritetään vakio D.

$$F(1) = 5$$

$$\frac{1}{2}\ln(2\cdot 1-1) + D = 5$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{=0} + D = 5$$

$$D = 5$$

Integraalifunktio on $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1-2x), & \text{kun } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(2x-1) + 5, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

Vastaus

a) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1-2x)+C, \text{ kun } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(2x-1)+D, \text{ kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1-2x), & \text{kun } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ln(2x-1)+5, & \text{kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

K27

a) $\int \frac{\ln x^2}{x} \mathrm{d}x$ $\quad\quad \log x^r = r \log x$

$= \int \frac{2 \ln x}{x} \mathrm{d}x$

$= \int 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$

$s(x) = \ln x \quad\quad s'(x) = \frac{1}{x}$

$= 2\int \frac{1}{x} \ln x \, \mathrm{d}x$

$u(x) = x \quad\quad U(x) = \frac{1}{2} x^2$

$\int s'(x) \cdot u(s(x)) \mathrm{d}x = U(s(x)) + C$

$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} (\ln x)^2 + C$

$= (\ln x)^2 + C, \quad \text{kun} \quad x > 0$

b) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$

$= \int \sin x \cdot \frac{1}{(\cos x)^2} \mathrm{d}x$

$= \int \sin x (\cos x)^{-2} \mathrm{d}x$ $\quad\quad s(x) = \cos x \quad\quad s'(x) = -\sin x$

$= -\int -\sin x (\cos x)^{-2}$ $\quad\quad u(x) = x^{-2} \quad\quad U(x) = -x^{-1}$

$= -(-(\cos x)^{-1}) + C$

$= \frac{1}{\cos x} + C, \quad \text{kun} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Vastaus

a) $(\ln x)^2 + C, \quad \text{kun} \quad x > 0$

b) $\frac{1}{\cos x} + C, \quad \text{kun} \quad 0 < x < \pi$

K28

a) Kun $x < 0$, niin $|x| = -x$.

Kun $x \geq 0$, niin $|x| = x$.

Ilmaistaan funktio f paloittain määriteltynä ilman itseisarvomerkkejä.

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

b) $$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+|x|}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^{0} \frac{-1}{1-x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$= -\mathop{/}_{-1}^{0} \ln|1-x| + \mathop{/}_{0}^{1} \ln|1+x|$$

$$= -(\ln|1-0| - \ln|1-(-1)|) + (\ln|1+1| - \ln|1+0|)$$

$$= -(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2) + (\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0})$$

$$= -(-\ln 2) + \ln 2$$

$$= 2\ln 2$$

Vastaus

a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

b) $2\ln 2$

K29

a) Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$|\cos x| = 0 \qquad\qquad |\cos x| = 0, \text{ kun } \cos x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ missä } n \text{ on kokonaisluku}$$

Välillä $0, \pi$ on vain nollakohta $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Kun $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, niin $\cos x \geq 0$ ja $|\cos x| = \cos x$.

Kun $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, niin $\cos x < 0$ ja $|\cos x| = -\cos x$.

Ilmaistaan funktio f ilman itseisarvomerkkejä.

$$f(x) = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

c) 1) Määritetään funktion f integraalifunktio välillä $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$F(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Piste $(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2})$ kuuluu alueeseen $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Ratkaistaan vakio C.

$$F(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} + C = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$C = -1$$

2) Määritetään integraalifunktio välillä $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

$$F(x) = \int -\cos x \, dx = -\sin x + D$$

Koska funktio F on derivoituva, sen tulee olla myös jatkuva kohdassa $\frac{\pi}{2}$. Tällöin funktion F oikeanpuoleinen raja-arvo sekä funktion arvo kohdassa $\frac{\pi}{2}$ ovat yhtä suuret. Ratkaistaan vakio D.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} (-\sin x + D) = \sin\frac{\pi}{2} - 1$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$D = 1$$

Integraalifunktio on siis

$$F(x) = \begin{cases} \sin x - 1, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\sin x + 1, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Vastaus

a) $x = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} \sin x - 1, & \text{kun } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\sin x + 1, & \text{kun } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

K30

Koska $f'(x)f(x)$ ja 1 ovat yhtä suuret kaikilla x, niin myös niiden integraalifunktiot ovat yhtä suuret kaikilla x.

Ratkaistaan funktion $f(x)$ lauseke.

$$f'(x)(f(x)) = 1$$

$$\int f'(x)(f(x))\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x$$

$s(x) = f(x),\ s'(x) = f'(x),$
$u(x) = x,\ U(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\frac{1}{2}(f(x))^2 = x + C \qquad | \cdot 2$$

$$(f(x))^2 = 2x + 2C \qquad | \sqrt{}$$

$$f(x) = \sqrt{2x + 2C}$$

Olkoon $a = 2C$.

$$f(x) = \sqrt{2x + a}$$

Funktio f on määritelty, kun $2x + a \geq 0$ eli $x \geq -\frac{a}{2}$.

Ratkaistaan vakio a ehdon $f(2) = 1$ avulla.

$$f(2) = 1$$

$$\sqrt{2 \cdot 2 + a} = 1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = -3$$

Ehdot täyttävä funktio on siis $f(x) = \sqrt{2x - 3}$, kun $x \geq \frac{3}{2}$.

Vastaus

$f(x) = \sqrt{2x - 3}$, kun $x \geq \frac{3}{2}$

K31

a) Koska hyttysten määrä $f(x) > 0$ ja sen kasvunopeus $f'(x)$ ovat suoraan verrannollisia, niiden osamäärä on vakio k. Koska $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ja k ovat yhtä suuret kaikilla $x \geq 0$, myös niiden integraalit ovat yhtä suuret kaikilla $x \geq 0$.

Ratkaistaan funktion $f(x)$ lauseke.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int k \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$\ln|f(x)| = kx + C$$

Koska $f(x) > 0$, niin $|f(x)| = f(x)$.

$$\ln f(x) = kx + C$$

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx+C}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{C}$$

Olkoon $a = \mathrm{e}^C$.

$$f(x) = a\mathrm{e}^{kx}$$

Olkoon ajanhetki $x = 0$ se ajanhetki, jolloin tilaisuus alkaa. Hyttysten määrä tilaisuuden alussa oli 100, joten $f(0) = 100$. Ratkaistaan vakio a.

$$f(0) = 100$$

$$a \cdot e^{k \cdot 0} = 100$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = 100$$

Neljä tuntia myöhemmin, eli ajanhetkellä $x = 4$, hyttysten määrä oli 1000, joten $f(4) = 1000$. Ratkaistaan vakio k.

$$f(4) = 1000$$
$$100e^{k\cdot 4} = 1000 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$k = \frac{\ln 10}{4}$$

Hyttysten määrää ajanhetkellä x tuntia tapahtuman alusta ilmaisee funktio $f(x) = 100e^{\frac{\ln 10}{4}x} = 100(e^{\ln 10})^{\frac{x}{4}} = 100 \cdot 10^{\frac{x}{4}}$.

b) Lasketaan hyttysten lukumäärä ajanhetkellä $x = 5$.

$$f(5) = 100e^{\frac{\ln 10}{4}\cdot 5} = 1778{,}28... \approx 1800$$

Vastaus

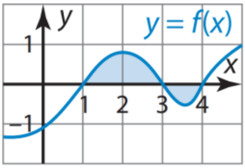
a) $f(x) = 100e^{\frac{\ln 10}{4}x}$ $(= 100 \cdot 10^{\frac{x}{4}})$, jos tilaisuus alkaa hetkellä $x = 0$.

b) Viiden tunnin kuluttua hyttysten lukumäärä on noin 1800.

K32

a) Väritetyn alueen pinta-alan ilmaisee

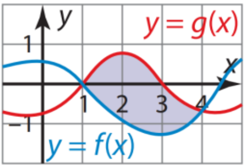
määrätty integraali $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x.$



Perustelu:
Aluetta rajaavat funktion f kuvaaja ja x-akseli. Välillä $[1,\ 3]$ on $f(x) \geq 0$ ja välillä $[3,\ 4]$ on $f(x) \leq 0.$

b) Väritetyn alueen pinta-alan ilmaisee

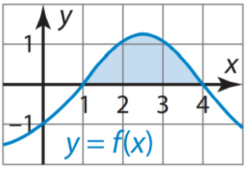
määrätty integraali $\int_1^4 (g(x) - f(x))\mathrm{d}x.$



Perustelu:
Aluetta rajaavat funktion g ja funktion f kuvaajat. Välillä $[1,\ 4]$ on $g(x) \geq f(x).$

c) Väritetyn alueen pinta-alan ilmaisee

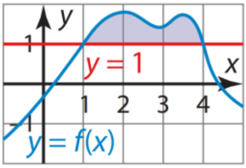
määrätty integraali $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x.$



Perustelu:
Aluetta rajaavat funktion f kuvaaja ja x-akseli. Välillä $[1,\ 4]$ on $f(x) \geq 0.$

d) Väritetyn alueen pinta-alan ilmaisee

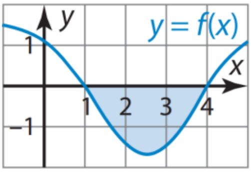
määrätty integraali $\int_1^4 (f(x) - 1)\mathrm{d}x.$



Perustelu:
Aluetta rajaavat funktion f kuvaaja ja suora $y = 1.$ Välillä $[1,\ 4]$ on $f(x) \geq 1.$

e) Väritetyn alueen pinta-alan ilmaisee

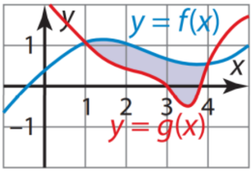
määrätty integraali $-\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.



Perustelu:
Aluetta rajaavat funktion f kuvaaja ja x-akseli. Välillä $[1, 4]$ on $f(x) \leq 0$.

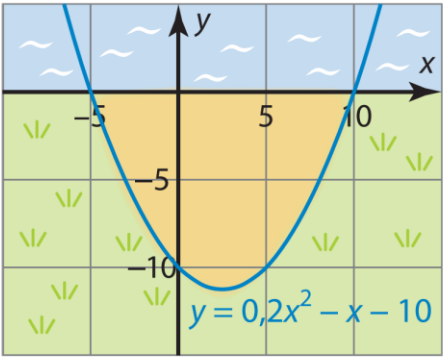
f) Väritetyn alueen pinta-alan ilmaisee

määrätty integraali $\int_1^4 (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$.



Perustelu:
Aluetta rajaavat funktion f ja funktion g kuvaajat. Välillä $[1, 4]$ on $f(x) \geq g(x)$.

K33



Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla paraabelin $y = 0,2x^2 - x - 10$ ja x-akselin leikkauskohdat.

$0,2x^2 - x - 10 = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -5$ tai $x = 10$

Alue sijaitsee x-akselin alapuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = -\int_{-5}^{10} (0,2x^2 - x - 10)\mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 112,5 \approx 110 \ \ (\mathrm{m}^2)$$

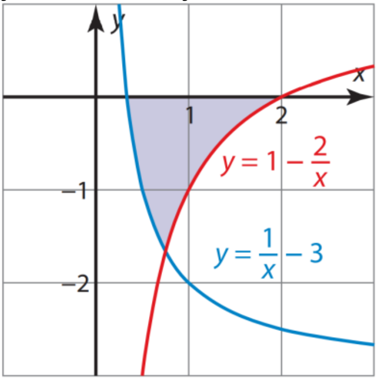
Hiekka-alueen pinta-ala on 110 m^2.

Vastaus

110 m^2

K34

a) Piirretään GeoGebralla käyrät $y=\frac{1}{x}-3$ ja $y=1-\frac{2}{x}$ sekä niiden ja x-akselin rajaama alue.



b) Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla käyrien ja x-akselin leikkauskohdat, sekä käyrien leikkauskohta.

$\frac{1}{x}-3=0$	$1-\frac{2}{x}=0$	$\frac{1}{x}-3=1-\frac{2}{x}$	Ratkaistaan CAS-laskimella.
$x=\frac{1}{3}$	$x=2$	$x=\frac{3}{4}$	

Välillä $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$ aluetta rajaa käyrä $y=\frac{1}{x}-3$ ja välillä $[\frac{3}{4}, 2]$ käyrä $y=1-\frac{2}{x}$. Alue on x-akselin alapuolella.

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A=-\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{x}-3\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{3}{4}}^{2}\left(1-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$=4\ln\frac{4}{3}$$

Lauseketta voi sieventää (tai laskin saattaa antaa tuloksen eri muodossa).

$$\begin{aligned}4\ln\frac{4}{3} &= 4(\ln 4 - \ln 3)\\ &= 4\ln 4 - 4\ln 3\\ &= 4\ln 2^2 - 4\ln 3\\ &= 8\ln 2 - 4\ln 3\end{aligned}$$

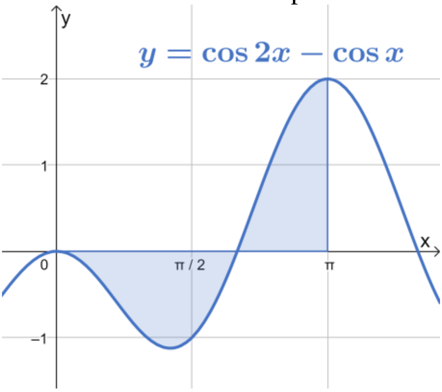
Vastaus

$8\ln 2 - 4\ln 3$

(TAI $4\ln\frac{4}{3}$)

K35

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.

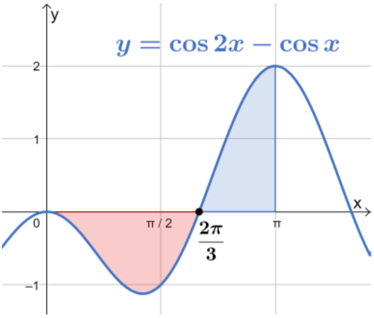


Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla käyrän ja x-akselin leikkauskohdat välillä $[0,\ \pi]$.

$\cos 2x + \cos x = 0$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = \frac{2\pi}{3}$ Rajataan ratkaisut välille $[0,\ \pi]$.

Kuvan perusteella välillä $[0,\ \frac{2\pi}{3}]$ alue on x-akselin alapuolella ja välillä $[\frac{2\pi}{3},\ \pi]$ x-akselin yläpuolella.



Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = -\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos 2x - \cos x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\cos 2x - \cos x)\mathrm{d}x$$

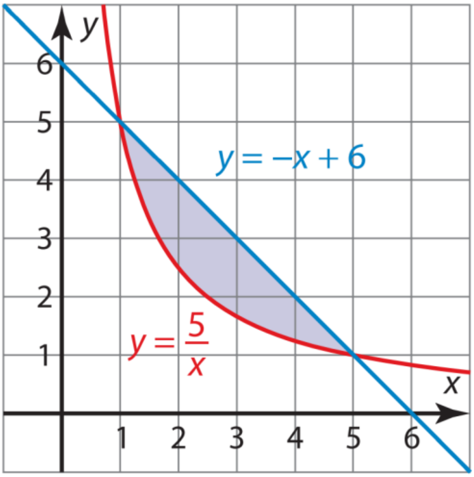
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vastaus

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

K36

a) Piirretään GeoGebralla hyperbeli $y = \frac{5}{x}$ ja suora $y = -x + 6$ sekä niiden rajaama alue.



b) Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla käyrien leikkauskohdat.

$\frac{5}{x} = -x + 6$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 5$

Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta suora ja alapuolelta hyperbeli. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_1^5 (-x + 6 - \frac{5}{x})\mathrm{d}x$$

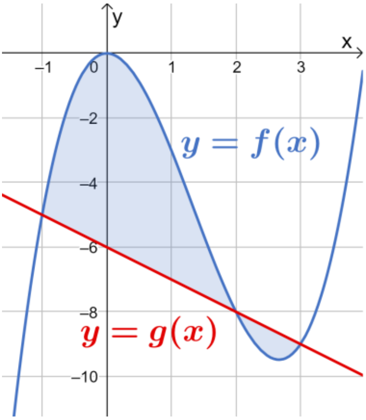
Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 12 - 5\ln 5 \quad (\approx 3{,}95)$$

Vastaus
b) $12 - 5\ln 5$

K37

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktioiden $f(x) = x^3 - 4x^2$ ja $g(x) = -x - 6$ kuvaajat sekä niiden rajaama alue.



Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla kuvaajien leikkauskohdat.

$$f(x) = g(x)$$

$$x^3 - 4x^2 = -x - 6$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Kuvan perusteella välillä $[-1,\ 2]$ on $f(x) \geq g(x)$ ja välillä $[2,\ 3]$ on $g(x) \geq f(x)$. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2} (x^3 - 4x^2 - (-x - 6))\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (-x - 6 - (x^3 - 4x^2))\mathrm{d}x$$

$$= \frac{71}{6} \quad (\approx 11{,}8)$$

Vastaus

$\frac{71}{6}$

K38

Käyrä

$$y^2 = 5y - x \quad \Big| -y^2 + x$$
$$x = -y^2 + 5y$$

on vasemmalle aukeava paraabeli. Siten se rajaa y-akselin leikkauskohtien välissä alueen y-akselin oikealla puolelle.

Integroidaan muuttujan y suhteen.

Integroimisrajat saadaan selville ratkaisemalla käyrän ja y-akselin leikkauskohdat.

$$-y^2 + 5y = 0 \qquad \text{Erotetaan yhteinen tekijä.}$$
$$-y(y-5) = 0 \qquad \text{Tulon nollasääntö}$$
$$y = 0 \quad \text{tai} \quad y - 5 = 0$$
$$y = 5$$

Lasketaan alueen pinta-ala.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^5 (-y^2 + 5y)\,\mathrm{d}y \\
&= \Big/_0^5 \left(-\frac{1}{3}y^3 + 5 \cdot \frac{1}{2}y^2\right) \\
&= \Big/_0^5 \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3} \cdot 5^3 + \frac{5}{2} \cdot 5^2\right) - \underbrace{\left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{5}{2} \cdot 0^2\right)}_{=0} \\
&= -\frac{1}{3} \cdot 125 + \frac{5}{2} \cdot 25 \\
&= -{}^{2)}\frac{125}{3} + {}^{3)}\frac{125}{2} \\
&= -\frac{250}{6} + \frac{375}{6} \\
&= \frac{125}{6}
\end{aligned}
$$

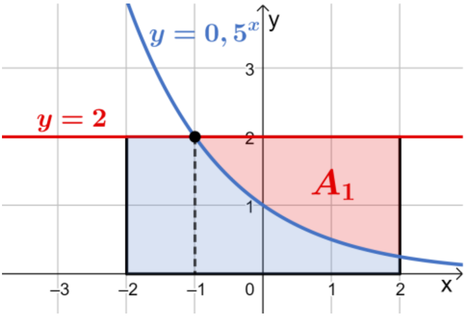
Vastaus

$\frac{125}{6}$

K39

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$$A = (2-(-2))\cdot(2-0)$$
$$= 4\cdot 2 = 8$$



Integroinnin alaraja saadaan selville ratkaisemalla käyrän ja suorakulmiota ylhäältä rajoittavan suoran $y = 2$ leikkauskohta.

$$0{,}5^x = 2$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.
$$x = -1$$

Käyrän yläpuolella olevaa aluetta A_1 rajaa yläpuolelta suora $y = 2$ ja alapuolelta käyrä $y = 0{,}5^x$. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A_1 = \int_{-1}^{2} (2 - 0{,}5^x)\,dx$$ Lasketaan CAS-laskimella.
$$= 6 - \frac{7}{4\ln 2} \quad (\approx 3{,}4752...)$$

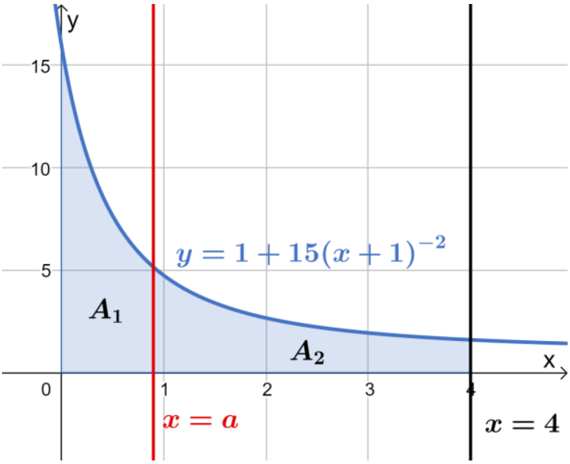
Lasketaan montako prosenttia alueen A_1 pinta-ala on koko suorakulmion pinta-alasta A.

$$\frac{A_1}{A} = \frac{6-\frac{7}{4\ln 2}}{8} = 0{,}4344... = 43{,}44...\,\% \approx 43\,\%$$

Vastaus
43 %

K40

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva. Jaetaan alue kahteen osaan suoralla $x = a$, missä $0 < a < 4$.



Käyrän ja x-akselin välillä $[0, a]$ rajaaman alueen pinta-alan tulee olla yhtä suuri kuin käyrän ja x-akselin välillä $[a, 4]$ rajaaman alueen pinta-ala. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$A_1 = A_2$$

$$\int_0^a (1+15(x+1)^{-2})\mathrm{d}x = \int_a^4 (1+15(x+1)^{-2})\mathrm{d}x$$

Lasketaan integraalit CAS-laskimella.

$$-\frac{15}{a+1} + a + 15 = \frac{15}{a+1} - a + 1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a = -2\sqrt{6} - 4 \ (\approx -8{,}9) \quad \text{tai} \quad a = 2\sqrt{6} - 4 \ (\approx 0{,}9)$$

Koska $0 < a < 4$, niin $a = 2\sqrt{6} - 4$. Alue voidaan siis jakaa kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan suoralla $x = 2\sqrt{6} - 4$.

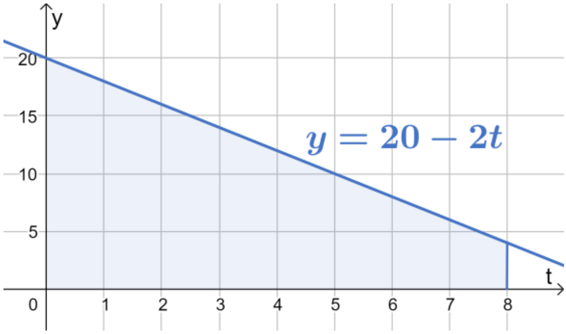
Vastaus

Voidaan jakaa esimerkiksi pystysuoralla suoralla $x = 2\sqrt{6} - 4$.

K41

Aikavälillä $[t_1,\ t_2]$ kuljettu matka on yhtä suuri kuin funktion v kuvaajan ja t -akselin välillä $[t_1,\ t_2]$ rajaaman alueen pinta-ala.

a) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $v(t) = 20 - 2t$ kuvaajan ja t -akselin välillä $[0,\ 8]$ rajaama alue.



Huomaa, että GeoGebralla piirrettäessä muuttujana täytyy käyttää kirjainta x.

Alue on x -akselin yläpuolella. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_0^8 v(t)\mathrm{d}t$$

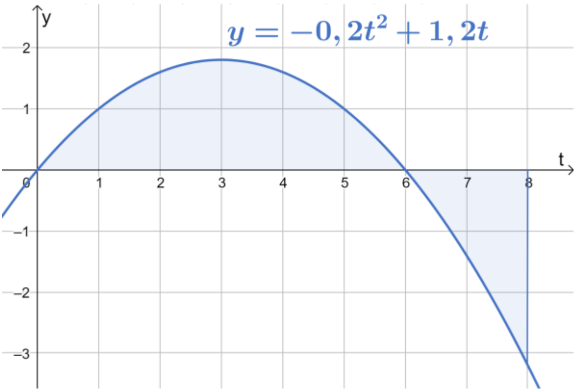
$$= \int_0^8 (20 - 2t)\mathrm{d}t$$

Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 96 \ \ (\mathrm{m})$$

Kappaleen aikavälillä $[0,\ 8]$ kulkema matka on 96 m.

b) Hahmotellaan tilannetta piirtämällä funktion $v(t) = -0,2t^2 + 1,2t$ kuvaajan ja t -akselin välillä $[0,\ 8]$ rajaama alue.



Kuvan perusteella välillä $[0,\ 6]$ on $v(t) \geq 0$ ja välillä $[6,\ 8]$ on $v(t) \leq 0$. Lasketaan alueen pinta-ala.

$$A = \int_0^6 v(t)\mathrm{d}t - \int_6^8 v(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^8 (-0,2t^2 + 1,2t)\mathrm{d}t - \int_6^8 (-0,2t^2 + 1,2t)\mathrm{d}t$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= 10,1 \approx 10 \ \ \text{(m)}$$

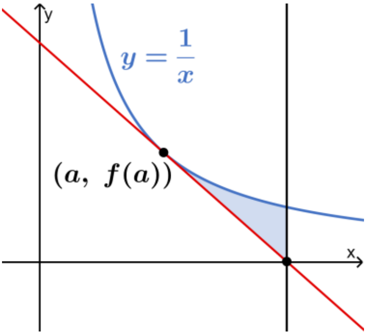
Kappaleen aikavälillä $[0,\ 8]$ kulkema matka on 10 m.

Vastaus

a) 96 m

b) 10 m

K42



a) Applettia käyttämällä huomataan, että vakion a arvosta riippumatta alueen pinta-ala $0{,}19.$ Pinta-ala näyttäisi siis aina olevan vakio.

b) Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(a).$ Derivoidaan funktio ja määritetään tangentin kulmakerroin.

$f(x) = \frac{1}{x}$ Derivoidaan CAS-laskimella.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$k = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(a, f(a)),$ eli $(a, \frac{1}{a}),$ missä $a > 0.$

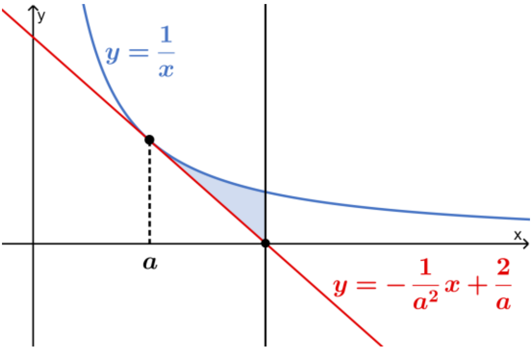
Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$ Ratkaistaan muuttuja y CAS-laskimella.

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva (jollain vakion a arvolla).



Ratkaistaan tangentin ja x-akselin leikkauskohta.

$$-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} = 0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 2a$$

Kuvan perusteella aluetta rajaa yläpuolelta funktion f kuvaaja ja alapuolelta tangenttisuora.

Lasketaan tangentin ja funktion kuvaajan välillä $[a,\ 2a]$ rajaaman alueen pinta-ala.

$$A = \int_a^{2a} \left(\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}\right)\right)\mathrm{d}x \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.}$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \quad (\approx 0{,}19)$$

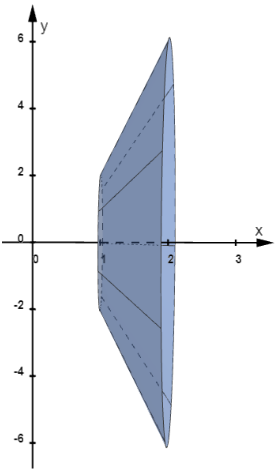
Alueen pinta-ala on aina $\ln 2 - \frac{1}{2}$, joten se ei riipu kohdasta, johon tangentti piirretään. $\square$

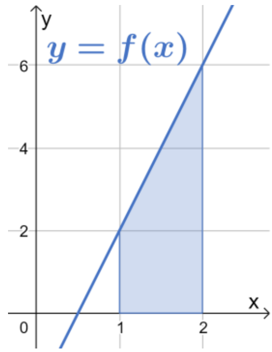
Vastaus

a) Pinta-ala näyttäisi aina olevan vakio.

K43

Funktion $f(x) = 4x - 2$ kuvaajan välillä $[1, 2]$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.





Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_1^2 (f(x))^2 \, dx$$

Sijoitetaan $f(x) = 4x - 2$.

$$= \pi \int_1^2 (4x - 2)^2 \, dx$$

Merkitään määrätty integraali näkyviin ja lasketaan se CAS-laskimella.

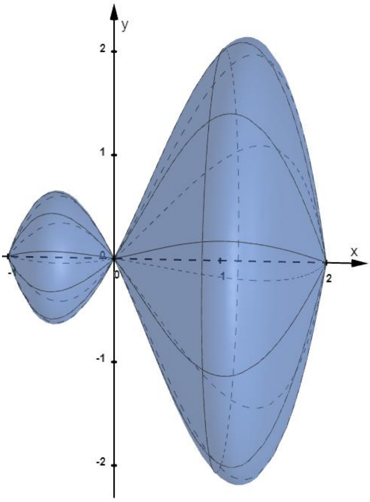
$$= \frac{52}{3}\pi \quad (\approx 54{,}45)$$

Vastaus

$\frac{52}{3}\pi$

K44

Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ kuvaajan välillä $-1 \leq x \leq 2$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (f(x))^2 \, dx$$ Sijoitetaan $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)^2 \, dx$$ Lasketaan CAS-laskimella.

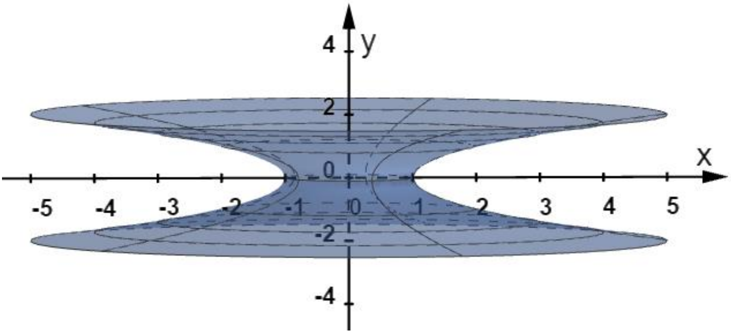
$$= \frac{162}{35}\pi \quad (\approx 14{,}5)$$

Vastaus

$\frac{162}{35}\pi$

K45

Käyrän $x = y^2 + 1$ välillä $-2 \leq y \leq 2$ oleva osa pyörähtää y-akselin ympäri, joten integroidaan muuttujan y suhteen. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on kuvaajan pisteen (x, y) etäisyys y-akselista eli $r = |x|$. Poikkileikkausympyrän säteen neliö on

$$r^2 = |x|^2 = x^2 = (y^2 + 1)^2.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (y^2 + 1)^2 \mathrm{d}y$$

Lasketaan CAS-laskimella.

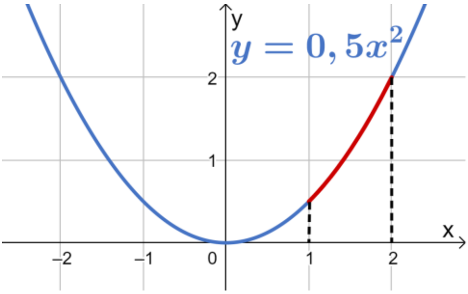
$$= \frac{412}{15}\pi \quad (\approx 86{,}3)$$

Vastaus

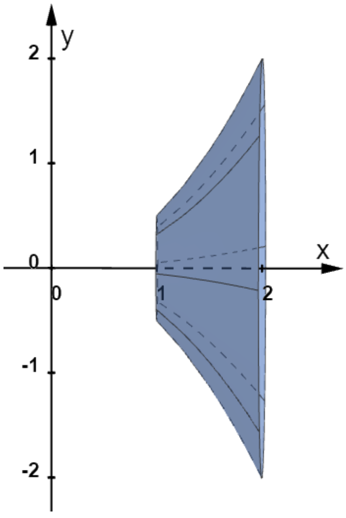
$\frac{412}{15}\pi$

K46

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä paraabeli $y = 0{,}5x^2$.



a) Paraabelin välillä $1 \leq x \leq 2$ oleva osa pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.

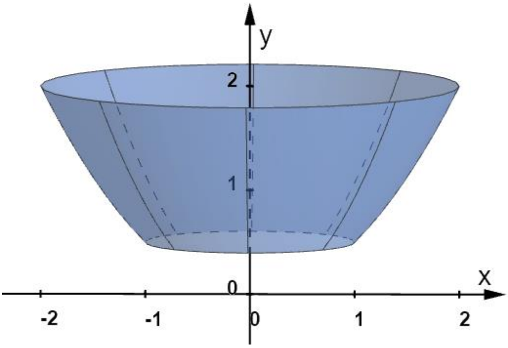


Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = \pi \int_1^2 (0{,}5x^2)^2 \mathrm{d}x$$ Lasketaan CAS-laskimella.

$$= \frac{31}{20}\pi$$

b) Paraabelin välillä $1 \leq x \leq 2$ oleva osa pyörähtää y -akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä muodostuva pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Integroidaan muuttujan y suhteen. Ratkaistaan integroimisrajat paraabelin yhtälön avulla.

$0{,}5 \cdot 1^2 = 0{,}5$ Sijoitetaan alaraja $x = 1$.

$0{,}5 \cdot 2^2 = 2$ Sijoitetaan yläraja $x = 2$.

Ratkaistaan integrointia varten paraabelin yhtälöstä muuttuja x.

$y = 0{,}5x^2$ Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

$\underbrace{x = \sqrt{2y}}_{\text{paraabelin oikea puoli}}$ tai $\underbrace{x = -\sqrt{2y}}_{\text{paraabelin vasen puoli}}$

Koska $1 \leq x \leq 2$, niin $x = \sqrt{2y}$.

Poikkileikkausympyrän säteen neliö on

$$r^2 = |x|^2 = x^2 = {\sqrt{2y}}^{\,2}.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{0,5}^{2} {\sqrt{2y}}^{\,2}\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{15}{4}\pi \end{aligned}$$

Lasketaan CAS-laskimella.

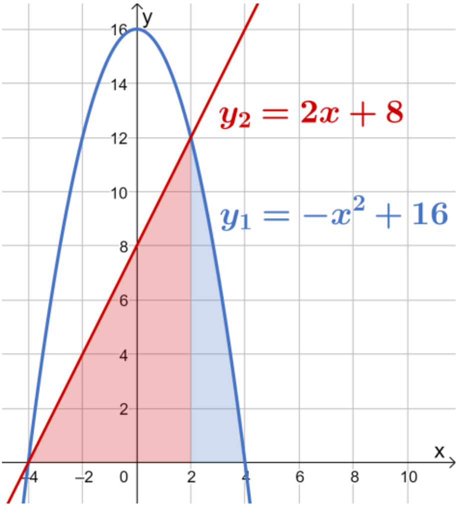
Vastaus

a) $\frac{31}{20}\pi$

b) $\frac{15}{4}\pi$

K47

Olkoon $y_1 = -x^2 + 16$ ja $y_2 = 2x + 8$. Käyrien ja x-akselin rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät ja pyörähtävä alue.



Tilavuus on laskettava kahdessa osassa, koska pyörähdyskappaleen rajaava käyrä vaihtuu.

Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauskohdat.

$$y_1 = y_2$$
$$-x^2 + 16 = 2x + 8$$
$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

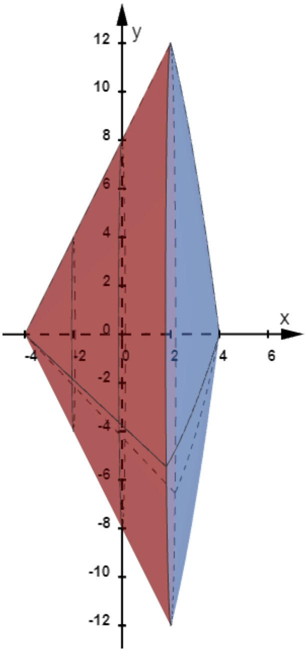
Aluetta rajaava käyrä vaihtuu kohdassa $x = 2$.

Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien ja x-akselin leikkauskohdat.

$$y_1 = 0$$
$$-x^2 + 16 = 0$$
$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

$$y_2 = 0$$
$$2x + 8 = 0$$
$$x = -4$$

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Rajataan käyrä

$y_1 = -x^2 + 16$ välille $2 \leq x \leq 4$

ja käyrä

$y_2 = 2x + 8$ välille $-4 \leq x \leq 2.$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$V = V_2 + V_1$$

$$= \pi \int_{-4}^{2} (y_2(x))^2 \, dx + \pi \int_{2}^{4} (y_1(x))^2 \, dx$$

Välillä $[-4,\ 2]$ pyörähtää käyrä $y_2(x) = 2x + 8$ ja välillä $[2,\ 4]$ pyörähtää käyrä $y_1(x) = -x^2 + 16.$

$$= \pi \int_{-4}^{2} (2x+8)^2 \, dx + \pi \int_{2}^{4} (-x^2 + 16)^2 \, dx$$

Lasketaan CAS-laskimella.

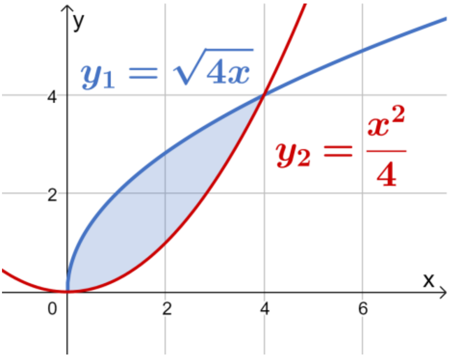
$$= \frac{6016}{15}\pi \quad (\approx 1260{,}0)$$

Vastaus

$\frac{6016}{15}\pi$

K48

Olkoon $y_1 = \sqrt{4x}$ ja $y_2 = \dfrac{x^2}{4}$. Käyrien rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrät ja pyörähtävä alue.



Ratkaistaan integroimisrajoja varten käyrien leikkauskohdat.

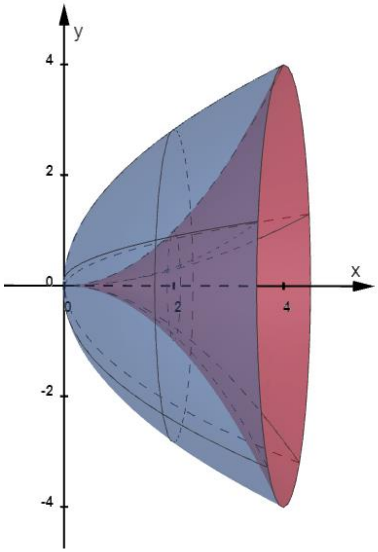
$$y_1 = y_2$$

$$\sqrt{4x} = \frac{x^2}{4} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Pyörähdyskappaleen ulkopinta muodostuu käyrän $y_1 = \sqrt{4x}$ ja sisäpinta käyrän $y_2 = \dfrac{x^2}{4}$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $0 \le x \le 4$.

Piirretään pyörähdyskappale geometriaohjelmalla.



Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

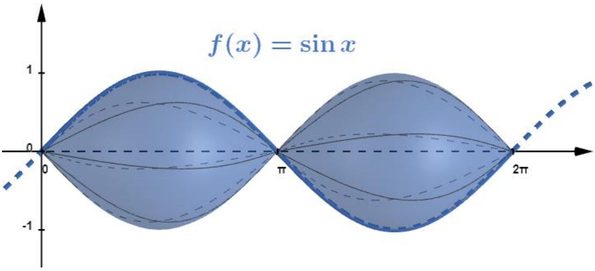
$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\
&= \pi \int_0^4 (y_1(x))^2 \, dx - \pi \int_0^4 (y_2(x))^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^4 \sqrt{4x}^{\;2} \, dx - \pi \int_0^4 \frac{x^2}{4}^{\;2} \, dx \qquad \text{Lasketaan CAS-laskimella.} \\
&= \frac{96}{5}\pi \quad (\approx 60{,}3)
\end{aligned}
$$

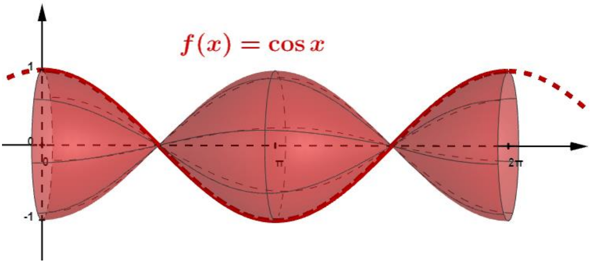
Vastaus

$\frac{96}{15}\pi$

K49

Käyrien välillä $0 \leq x \leq 2\pi$ rajaamat alueet pyörähtävät x-akselin ympäri. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuvat.





Koska integroidessa tullaan käsittelemään funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ neliöitä, ilmaistaan taulukkokirjan muunnoskaavoja hyödyntäen funktiot $\sin^2 x$ ja $\cos^2 x$ muodossa, jossa ei ole potensseja.

Ratkaistaan $\sin^2 x$ kosinin kaksinkertaisen kulman kaavasta.

$$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \qquad | -1$$

$$-2\sin^2 x = \cos 2x - 1 \qquad |:(-2)$$

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

Ratkaistaan $\cos^2 x$ kosinin kaksinkertaisen kulman kaavasta.

$$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x \qquad | +1$$

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1 \qquad |: 2$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

Lasketaan molempien pyörähdyskappaleiden tilavuudet.

$$V_{\sin} = \pi \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx \qquad \sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}) \, dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2x - 1) \, dx \qquad \text{Yhdistetty funktio } \cos 2x.$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2(\cos 2x - 1) \, dx$$

$$= -\frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} (\underset{s'(x)}{2} \underbrace{\cos 2x}_{u(s(x))} - 2) \, dx$$

$$= -\frac{\pi}{4} \Big/_0^{2\pi} (\underset{U(s(x))}{\sin 2x} - 2x)$$

$$= -\frac{\pi}{4}(\sin 2 \cdot 2\pi - 2 \cdot 2\pi - (\sin 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0))$$

$$= -\frac{\pi}{4}(\underbrace{\sin 4\pi}_{=0} - 4\pi - \underbrace{(\sin 0 - 0)}_{=0})$$

$$= -\frac{\pi}{4} \cdot (-4\pi)$$

$$= \pi^2$$

$$V_{\cos} = \pi \int_0^{2\pi} (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2x + 1) \,\mathrm{d}x \qquad \text{Yhdistetty funktio } \cos 2x.$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2(\cos 2x + 1) \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} (\underset{s'(x)}{2} \underbrace{\cos 2x}_{u(s(x))} + 2) \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} \Big/_0^{2\pi} (\underset{U(s(x))}{\sin 2x} + 2x)$$

$$= \frac{\pi}{4} (\sin(2 \cdot 2\pi) + 2 \cdot 2\pi - (\sin(2 \cdot 0) + 2 \cdot 0))$$

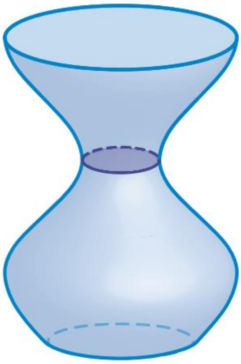
$$= \frac{\pi}{4} (\underbrace{\sin 4\pi}_{=0} + 4\pi - \underbrace{(\sin 0 + 0)}_{=0})$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 4\pi$$

$$= \pi^2$$

On osoitettu, että kappaleiden tilavuudet ovat yhtä suuret, kummankin kappaleen tilavuus on π^2. $\square$

K50



Lasketaan taidemaljakon tilavuus.

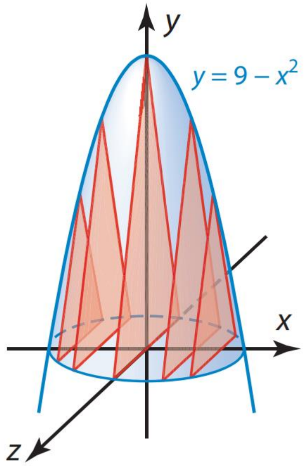
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^8 A(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^8 \frac{\pi(\sin x + 2)^2}{3}\mathrm{d}x \qquad \text{Integroidaan CAS-laskimella.} \\
&= 42,572...\ (\mathrm{dm}^3)
\end{aligned}
$$

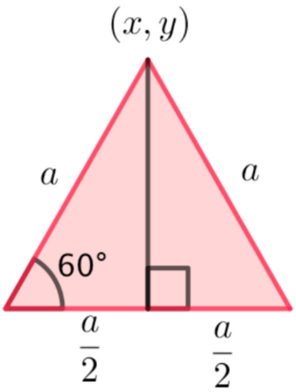
Taidemaljakon tilavuus on $42,572...\ \mathrm{dm}^3 \approx 42,6\ \mathrm{L}$.

Vastaus

$42,6\ \mathrm{L}$

K51





Määritetään integroimisrajat.

$$y = 0$$

$$9 - x^2 = 0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Merkitään kohtaan x piirretyn tasasivuisen kolmion sivun pituutta kirjaimella a. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat $60°$. Näin ollen kolmion pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Ratkaistaan a^2 Pythagoraan lauseen avulla.

$$\frac{a}{2}^{2}+y^2=a^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a^2=\frac{4}{3}y^2$$

Toisaalta kolmion korkeus on paraabelin yhtälön mukaan $y=9-x^2$, joten

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3}y^2=\frac{\sqrt{3}}{3}y^2=\frac{\sqrt{3}}{3}(9-x^2)^2.$$

Lasketaan kappaleen tilavuus.

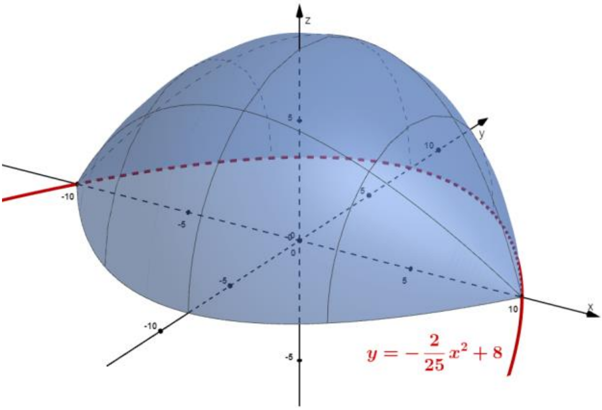
$$\begin{aligned}V&=\int_{-3}^{3}A(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-3}^{3}\frac{\sqrt{3}}{3}(9-x^2)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{432\sqrt{3}}{5}\quad(\approx 149{,}6)\end{aligned}$$

Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

$$\frac{432\sqrt{3}}{5}$$

K52



Määritetään integroimisrajat.

$$y = 0$$

$$-\frac{2}{25}x^2 + 8 = 0 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -10 \quad \text{tai} \quad x = 10$$

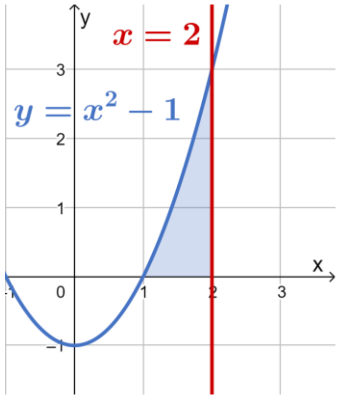
Lasketaan kaarihallin tilavuus.

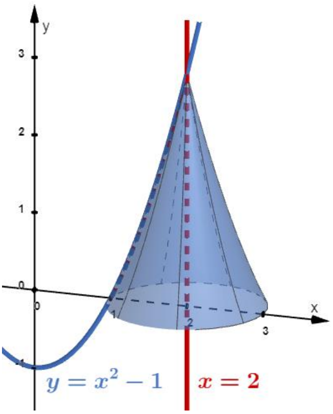
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\pi \int_{-10}^{10} (f(x))^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\pi \int_{-10}^{10} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 8\right)^2 \mathrm{d}x \qquad \text{Integroidaan CAS-laskimella.} \\ &= 1072{,}330... \\ &= 1072 \ (\mathrm{m}^3) \end{aligned}$$

Vastaus
1072 m^3

K53

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä käyrän $y = x^2 - 1$ kuvaaja, suora $x = 2$ ja pyörähtävä alue.





Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus integroimalla muuttujan y suhteen, joten ratkaistaan käyrän $y = x^2 - 1$ yhtälöstä muuttuja x.

$$y = x^2 - 1$$

Ratkaistaan muuttuja x CAS-laskimella.

$$x = -\sqrt{y+1} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{y+1}$$

Pyörähdyskappale sijaitsee alueessa $x \geq 0$, joten vain $x = \sqrt{y+1}$ kelpaa.

Poikkileikkausympyrän säde kohdassa y on funktion f kuvaajan pisteen (x, y) etäisyys suorasta $x = 2$ eli $r = |2 - x|$.

Poikkileikkausympyrän pinta-ala on

$$A(y) = \pi r^2 = \pi(|2-x|)^2 = \pi(2-x)^2 = \pi(2-\sqrt{y+1})^2.$$

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

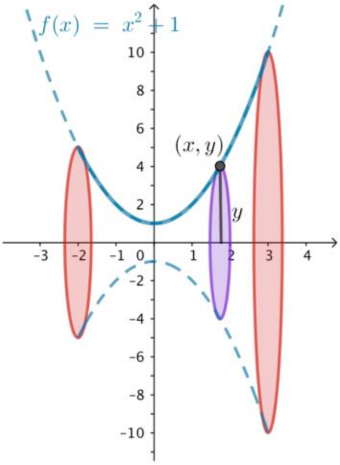
$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 A(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^3 \pi(2-\sqrt{y+1})^2\mathrm{d}y \\ &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

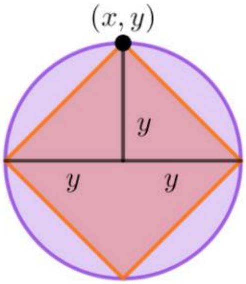
Integroidaan CAS-laskimella.

Vastaus

$\frac{5\pi}{6}$

K54





Pyörähdyskappaleen säde y on puolet neliön lävistäjästä, eli neliö koostuu neljästä kolmiosta, joiden kanta sekä korkeus on y.

Neliön pinta-ala kohdassa x on $A(x) = 4 \cdot \frac{y \cdot y}{2} = 2y^2 = 2(x^2+1)^2$.

Lasketaan pyörähdyskappaleen tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{3} A(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{3} 2(x^2+1)^2\mathrm{d}x \qquad \text{Integroidaan CAS-laskimella.} \\
&= 166{,}666... \\
&\approx 167 \text{ (cm}^3\text{)}
\end{aligned}
$$

Vastaus
167 cm^3