Vastaa viiteen tehtävään.

1. Yhtälöitä ja lausekkeita **12 p.**

Valitse sopivin vastausvaihtoehto.

1.1 Yhtälöllä $-5\,(x+3) = -3\,(x+2) - 2x$ **2 p.**

ei ole ratkaisuja.	on useampi kuin yksi ratkaisu.	on täsmälleen yksi ratkaisu ja se on kokonaisluku.
on täsmälleen yksi ratkaisu ja se ei ole kokonaisluku.		

PERUSTELU

$-5\,(x+3) = -3\,(x+2) - 2x$
$-5x - 15 = -3x - 6 - 2x$
$-5x - 15 = -5x - 6$
$5x - 5x = 15 - 6$
$0x = 9$

Mikään luku x ei toteuta yhtälöä, koska yhtälön vasen puoli on aina 0 .
Oikea vastaus on "yhtälöllä ei ole ratkaisua".

1.2 Yhtälöllä $8 - (4 - 3x) = x - \dfrac{x}{2} - \dfrac{2x-1}{6}$ **2 p.**

on ratkaisu $x = \frac{23}{19}$.	on ratkaisu $x = \frac{17}{25}$.	on ratkaisu $x = -\frac{23}{17}$.	on kokonaislukuratkaisu.	ei ole ratkaisua.

PERUSTELU

$8 - (4 - 3x) = x - \frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} \quad \| \cdot 6$ Kerrotaan yhtälö luvulla 6, jotta saadaan nimittäjät pois.
$6 \cdot 8 - 6 \cdot (4 - 3x) = 6x - \frac{6x}{2} - \frac{6(2x-1)}{6}$

$48 - 24 + 18x = 6x - 3x - 2x + 1$
$17x = -23$
$x = -\frac{23}{17}$

Oikea vastaus on $x = -\frac{23}{17}$.

1.3 Millä vakion a arvolla yhtälön $4a^2 + 1 = (5x - 2a)^2$ eräs ratkaisu on $x = 2$? **3 p.**

$a = \frac{99}{40}$	$a = 1$	$a = \frac{40}{99}$	$a = -\frac{99}{40}$	Ei millään vakion a arvolla.	Kaikilla vakion a arvoilla.

PERUSTELU

Sijoitetaan annettu muuttujan x arvo yhtälöön ja ratkaistaan a :
$4a^2 + 1 = (5 \cdot 2 - 2a)^2$
$4a^2 + 1 = (10 - 2a)^2$
$4a^2 + 1 = 100 - 40a + 4a^2$
$40a = 99$
$a = \frac{99}{40}$

Oikea vastaus on $a = \frac{99}{40}$.

1.4 Suomessa yleinen arvonlisäveroprosentti nousi 1.9.2024. Aikaisemmin se oli $24\ \%$ ja on nyt $25{,}5\ \%$. Montako prosenttia kuluttajahinnat muuttuivat tämän seurauksena (kun verottomat hinnat säilyivät ennallaan)? **2 p.**

$1{,}5\ \%$	$1{,}4\ \%$	$1{,}3\ \%$	$1{,}2\ \%$	$1{,}1\ \%$

PERUSTELU

Olkoon alkuperäinen veroton hinta x €.

Korotusprosentti saadaan lausekkeella $\frac{1{,}255x-1{,}24x}{1{,}24x} \cdot 100\ \%$.

$$\frac{1{,}255x-1{,}24x}{1{,}24x} \cdot 100\ \% = 1{,}20...\% \approx 1{,}2\ \%.$$

(1,255-1,24)/1,24
= 0,0120967741935

Oikea vastaus on siis 1,2 %.

1.5 Suorakaiteen pituus kasvaa $12\ \%$. Montako prosenttia leveyttä on pienennettävä, kun suorakaiteen pinta-ala kasvaa vain $5\ \%$? **3 p.**

$7{,}5\ \%$	$7\ \%$	$6{,}5\ \%$	$6{,}25\ \%$	$5{,}25\ \%$	$5\ \%$

PERUSTELU
Olkoon x suorakaiteen alkuperäinen leveys ja y sen alkuperäinen pituus.
Suorakaiteen uusi pituus on $1{,}12x$ ja sen uusi leveys on $a \cdot y$.
Suorakaiteen uusi pinta-ala on $1{,}12axy$, joten saadaan
$1{,}12axy = 1{,}05xy$.
Siten $a = \frac{1{,}05}{1{,}12} = 0{,}9375$.
Kun alkuperäinen leveys kerrotaan luvulla $0{,}9375$, pienenee se $6{,}25\ \%$.

Oikea vastaus on siis $6{,}25\ \%$.

2. Suoran ja x-akselin välinen pinta-ala **12 p.**

Suora s kulkee pisteiden $\left(5,\ \frac{13}{4}\right)$ ja $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ kautta. Suora t kulkee pisteen $(15,\ -5)$ kautta ja muodostaa suoran kulman suoran s kanssa.

2.1 Muodosta suoran t yhtälö. Älä käytä likiarvoja laskuissa. **6 p.**

RATKAISU

Suoran s kulmakerroin on $k_s = \frac{1-\frac{13}{4}}{\frac{1}{2}-5} = \frac{-\frac{9}{4}}{-\frac{9}{2}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{2}$.
Suoran t kulmakerroin saadaan yhtälöstä $k_s \cdot k_t = -1$
$\frac{1}{2}k_t = -1$
$k_t = -2$.

Muodostetaan suoran t yhtälö yhtälön $y - y_0 = k\,(x - x_0)$ avulla.
Sijoitetaan piste $(x_0,\ y_0) = (15, -5)$ ja saadaan

$y - (-5) = -2 \cdot (x - 15)$
$y + 5 = -2x + 30$
$y = -2x + 25$
Vastaus: $y = -2x + 25$ (tai $2x + y - 25 = 0$)

PISTEYTYS

- Kulmakerroin suoralle s oikein (1 p.)
- Idea suoran t yhtälön muodostamiseksi (esim. yllä mainitulla yhtälöllä) (1 p.)
- Saatu tarkka kulmakerroin suoralle t perusteluineen. (1 p. + 1 p.)
- Sijoitus yhtälöön ja saatu suoran t oikea yhtälö muodossa $y = -2x + 25$ tai sievennetyssä normaalimuodossa. (1 p.+ 1 p.)

Huom. Oikea ratkaisu, jossa on käytetty likiarvoja max. 4 p.

2.2 Olkoon A_t suoran t ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala, kun $x \in [0,\, 25]$.
Laske pinta-alan A_t tarkka arvo. Laske sen jälkeen määrätyn integraalin $I_t = \int_0^{25} t\,(x)\,dx$ tarkka arvo. Miksi määrätyn integraalin arvo ei ole yhtä suuri kuin pinta-ala A_t ? **6 p.**

RATKAISU

Suoran t nollakohta saadaan yhtälöstä $-2x + 25 = 0$.
$2x = 25$
$x = \frac{25}{2}$
Integroidaan ensin välillä $\left[0,\, \frac{25}{2}\right]$, jolloin suoran lauseke saa epänegatiivisia arvoja (laskeva suora ennen nollakohtaa):

Suoran t ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on siten

$$A_1 = \int_0^{\frac{25}{2}} (-2x + 25)\,dx = \Big/_{0}^{\frac{25}{2}} \left(-x^2 + 25x\right) = -\left(\tfrac{25}{2}\right)^2 + 25 \cdot \tfrac{25}{2} - (0 + 0) =$$
$$= -\tfrac{625}{4} + \tfrac{625}{2} = \tfrac{625}{4} .$$

Koska suoran lauseke saa negatiivisia arvoja välillä $\left]\, \frac{25}{2},\, 25\right]$, niin suoran t ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala kyseisellä välillä on symmetrian perusteella
$$A_2 = -\int_{\frac{33}{2}}^{25} (-2x + 25)\,dx = A_1 .$$

Suoran t ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $x \in [0,\, 25]$ on $2 \cdot \frac{625}{4} = \frac{625}{2}$.

Laskemalla saadaan määrätyn integraalin arvoksi
$$I = \int_0^{25} (-2x + 25)\,dx = \Big/_{0}^{25} \left(-x^2 + 25x\right) = -(25)^2 + 25 \cdot 25 - (0 + 0) = -625 + 625 = 0$$

Suoran t ja x -akselin väliin jäävän alueen pinta-ala ei kuitenkaan ole 0 vaan pitää huomioida, että suoran lauseke saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja kyseisellä välillä ja laskea pinta-ala kahdella eri integraalilla.

Vastaus: $A_{kok.} = \frac{625}{2}$

Huom. *Kysytyn pinta-alan voi laskea vaikkapa suorakulmaisia kolmioita käyttäen. Välillä* $\left[0,\, \frac{25}{2}\right]$ *muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat* 25 *ja* $\frac{25}{2}$*. Tämän kolmion pinta-ala on* $A = \frac{25 \cdot \frac{25}{2}}{2} = \frac{625}{4}$*. Välillä* $\left]\, \frac{25}{2},\, 25\right]$ *muodostuu edellisen kolmion kanssa yhtenevä kolmio, joten kysytty pinta-ala on* $\frac{625}{2}$*.*

PISTEYTYS

- Laskettu suoran t tarkka nollakohta. (1 p.)
- 1. integraalissa oikea integroitava + oikea tarkka tulos (1+1 p.)
- Laskettu oikea integraali 2. osavälillä, tai perusteltu miksi pinta-ala 2. välillä on yhtä suuri kuin 1. välillä (1 p.)
- Kysytty pinta-ala on $\frac{625}{2}$ p.a.y. (1 p.)
- Perusteltu, miksi kokonaispinta-ala ei ole 0. (1 p.)

3. Juuria ja logaritmeja **12 p.**

3.1 Olkoot funktiot $f(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ ja $g(x) = 2 - 2x$. Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$. **6 p.**

RATKAISU

$2\sqrt{1+x^2} = 2 - 2x$
Koska yhtälön vasemman puolen juurrettava on positiviinen ja juuren edessä on positiivinen kerroin, yhtälön oikean puolen lausekkeen (etumerkin) on oltava positiivinen, eli $x < 1$.

Korotetaan yhtälön molemmat puolet potenssiin 2:
$4\left(1+x^2\right) = (2-2x)^2$
$4 + 4x^2 = 4 - 8x + 4x^2$
$8x = 0$
$x = 0$

Koska $0 < 1$ ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus: $x = 0$

PISTEYTYS

- Yhtälön molemmat puolet neliöity oikein. (1 p.)
- Saatu oikea toisen asteen yhtälö. (1 p.)
- Poistettu sulkeet oikein. (1 p.)
- Saatu yhtälö $8x = 0$. (1 p.)
- Todettu, että $x = 0$ kelpaa (tarkistus tehty). (1 p.)
- Vastaus: $x = 0$ (1 p.)

Huom. Jos $x = 0$ löytyy kokeilun kautta, ja sijoitus alkuperäiseen yhtälöön on tehty, annetaan tehtävästä max 1 p.

3.2 Olkoot funktiot $p(x) = \log_4(x-4)$ ja $r(x) = 2 + \log_2(x-4)$. Ratkaise yhtälö $p(x) = r(x)$ ja anna tarkka vastaus murtolukumuodossa. **6 p.**

RATKAISU

Vaihtoehto 1:

$\log_4(x-4) = 2 + \log_2(x-4)$ ja määrittelyehto: $x > 4$

Kantaluvun vaihto: $\log_a f(x) = \frac{\log_b f(x)}{\log_b a}$

Vaihdetaan yhtälön oikean puolen logaritmilausekkeen kantaluku luvuksi 4 ja ratkaistaan yhtälö:

$\log_4(x-4) = 2 + \log_2(x-4)$
$\log_4(x-4) - \frac{\log_4(x-4)}{\log_4(2)} = 2$
$\log_4(x-4) = 2 + \frac{\log_4(x-4)}{\log_4(2)}$

$\log_4(x-4) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 2$
$\log_4(x-4) \cdot (-1) = 2$
$\log_4(x-4) = -2$
$x - 4 = 4^{-2}$
$x = \frac{65}{16}$

Ratkaisu täyttää määrittelyehdon $x > 4$

Vastaus: $x = \frac{65}{16}$

PISTEYTYS

- Todettu määrittelyehto $x > 4$ (1 p.)
- Muutettu yhtälö muotoon, jossa jokaisen logaritmilausekkeen kantaluku on 4. (1 p.)
- Saatu yhtälö $x - 4 = 4^{-2}$. (1 p.)
- Yhtälö ratkaistu oikein ja saatu $x = \frac{65}{16}$. (1 p.)
- Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 4$ (1 p.)
- Vastaus: $x = \frac{65}{16}$ (1 p.)

Vaihtoehto 2:

Vaihdetaan yhtälön vasemman puolen logaritmilausekkeen kantaluku luvuksi 2 ja ratkaistaan yhtälö.

$\log_4(x-4) = 2 + \log_2(x-4)$
$\frac{\log_2(x-4)}{\log_2(4)} = 2 + \log_2(x-4)$
$\log_2(x-4) = 4 + 2\log_2(x-4)$
$\log_2(x-4) = -4$
$x - 4 = 2^{-4}$
$x = 4 + \frac{1}{16} = \frac{65}{16}$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 4$

PISTEYTYS

- Todettu määrittelyehto $x > 4$ (1 p.)
- Vaihdettu yhtälön vasemman puolen logaritmilausekkeen kantaluku luvuksi 2 ja ratkaistu yhtälö. (1 p.)
- Saatu yhtälö $x - 4 = 4^{-2}$. (1 p.)
- Yhtälö ratkaistu oikein ja saatu $x = \frac{65}{16}$. (1 p.)
- Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 4$ (1 p.)
- Vastaus: $x = \frac{65}{16}$ (1 p.)

Vaihtoehto 3:

Sijoitetaan yhtälön kumpikin puoli luvun 4 eksponentiksi:

$\log_4(x-4) = 2 + \log_2(x-4)$
$4^{\log_4(x-4)} = 4^{2+\log_2(x-4)}$
$4^{\log_4(x-4)} = 4^2 \cdot \left(2^2\right)^{\log_2(x-4)}$
$x - 4 = 16 \cdot (x-4)^2$
$(x-4)\left(16 \cdot (x-4) - 1\right) = 0$
$(x-4)(16x - 65) = 0$
$x = 4 \vee x = \frac{65}{16}$
Näistä vain jälkimmäinen ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 4$.

PISTEYTYS

- Todettu määrittelyehto $x > 4$ (1 p.)
- Muutettu yhtälö eksponentiaaliyhtälöksi, jossa jokaisen eksponenttilausekkeen kantaluku on 4. (1 p.)
- Saatu yhtälö $x - 4 = 4^{-2}$. (1 p.)
- Yhtälö ratkaistu oikein ja saatu $x = \frac{65}{16}$. (1 p.)
- Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x > 4$ (1 p.)
- Vastaus: $x = \frac{65}{16}$ (1 p.)

4. Kolmion kulmat ja trigonometrinen yhtälö **12 p.**

Aineisto

4.A Kuva: Kolmio

4.1 Tutki aineistossa 4.A olevaa kolmion kuvaa.
Laske kuvan kolmion kulmien β ja γ suuruudet, kun kolmion pinta-ala on $15{,}8\ \mathrm{cm}^2$. **8 p.**

RATKAISU

Olkoon kulman α vastakkaisen sivun pituus a ja kulman β vastakkaisen sivun pituus b.
Koska pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot b \cdot 8{,}41 \cdot \sin(42{,}6°) = 15{,}8$,
on $b = \frac{2 \cdot 15{,}8}{8{,}41 \cdot \sin(42{,}6°)} = 5{,}55\ldots\ \ cm$.

```
b=(2*15,8)/(8,41*sin(42,6))
= 5,55113757513754489639
```

Kosinilauseen perusteella on
$a^2 = 8{,}41^2 + b^2 - 2 \cdot 8{,}41 \cdot b \cdot \cos(42{,}6°)$, josta laskimella saadaan positiivinen juuri $a = 5{,}728\ldots\ cm$.

```
8,41^2+b^2-2*8,41*b*cos(42,6)
= 32,81374470655659297774

sqrt(ans)
= 5,72832826455996610056
```

Sinilauseen nojalla $\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(42{,}6°)}{a}$, joten $\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(42{,}6°)}{a}\right) \approx 41{,}0°$.

```
arcsin(b*sin(42,6)/ans)
= 40,99085803807904373667

180-42,6-ans
= 96,40914196192095626333
```

Tällöin kulma $\gamma = 180° - 42{,}6° - 41{,}0° = 96{,}4°$.

Huom. Opiskelijan ei tarvitse mainita toista sinilauseesta saatavaa kulmaa, joka on noin $139°$.

PISTEYTYS

- Merkitty sivujen pituudet ja kulmien suuruudet kirjaimilla, josta käy ilmi että kulman α vastakkaisen sivun pituus on a ja kulman β vastakkaisen sivun pituus on b. (1 p.)
- Sijoitus pinta-alan kaavaan oikein. (1 p.)
- Laskettu sivun b pituus. (1 p.)
- Sijoitus kosinilauseeseen. (1 p.)
- Laskettu sivun a pituus. (1p.)
- Sijoitus sinilauseeseen. (1 p.)
- Laskettu kulma β oikein. (1 p.)
- Laskettu kulma γ oikein. (1 p.)

Huom. Jos käytetty liian karkeasti pyöristettyjä likiarvoja välivaiheissa, niin yllä olevasta tehtävästä annetaan max 6 p.

4.2 Ratkaise yhtälö $2\cos(3x) = \sqrt{3}$, kun $0 < x < \pi$. Anna tarkka vastaus radiaaneina. **4 p.**

RATKAISU

$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$3x = \tfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \ \vee 3x = -\tfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$
$$x = \tfrac{\pi}{18} + n \cdot \tfrac{2\pi}{3} \vee x = -\tfrac{\pi}{18} + n \cdot \tfrac{2\pi}{3}$$

Ratkaisuista $x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ saadaan
$x = -\frac{11\pi}{18} < 0$, kun $n = -1$ (ei toteuta määrittelyehtoa)
$x = \frac{\pi}{18} \in]0,\ \pi[$, kun $n = 0$ (toteuttaa määrittelyehdon)
$x = \frac{13\pi}{18} \in]0,\ \pi[$, kun $n = 1$ (toteuttaa määrittelyehdon)
$x = \frac{25\pi}{18} > \pi$, kun $n = 2$ (ei toteuta määrittelyehtoa)

Ratkaisuista $x = -\frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ saadaan
$x = -\frac{\pi}{18} < 0$, kun $n = 0$ (ei toteuta määrittelyehtoa)
$x = \frac{11\pi}{18} \in]0,\ \pi[$, kun $n = 1$ (toteuttaa määrittelyehdon)
$x = \frac{23\pi}{18} > \pi$, kun $n = 2$ (ei toteuta määrittelyehtoa)

Ratkaisut, jotka kuuluvat välille $[0,\ \pi]$ ovat $x = \frac{\pi}{18}$, $x = \frac{11\pi}{18}$, $x = \frac{13\pi}{18}$.

PISTEYTYS

- Saatu yhtälö $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (1 p.)
- Ratkaistu $3x$ oikein. (1 p.)
- Ratkaistu x oikein. (1 p.)
- Ratkaisut, jotka kuuluvat välille $[0,\ \pi]$ ovat $x = \frac{\pi}{18}$, $x = \frac{11\pi}{18}$, $x = \frac{13\pi}{18}$. (1 p.)

5. Menninkäisiä ja keijukaisia **12 p.**

Pikku menninkäiset tekivät taikojaan; seitsemän kertaa päivässä, seitsemänä päivänä viikossa, seitsemän viikon ajan jokainen pikku menninkäinen laittoi seitsemään säkkiin seitsemän pussukkaa. Jokainen pussukka sisälsi seitsemän sinapinsiementä.

Menninkäisten taikojen jälkeen pienet keijukaiset tulivat kuitenkin keppostelemaan. Kukin keijukaisista poltti kolme menninkäisten säkeistä sinapinsiemenineen. Jäljelle jääneistä sinapinsiemenistä he söivät kaikki paitsi joka seitsemännen.

5.1 Oletetaan, että menninkäisiä oli 6 ja keijukaisia oli 40. Osoita laskemalla, että menninkäisille jää keijukaisten kepposten jälkeen 100 002 sinapinsiementä. **2 p.**

RATKAISU

Menninkäisillä on yhteensä $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6$ sinapinsiementä, joista keijukaiset polttavat $7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 40$. Jäljelle jäävistä sinapinsiemenistä he syövät $\frac{6}{7}$ jättäen jäljelle $\frac{1}{7}$, jolloin menninkäisille jää yhteensä $\frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 - 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 40}{7} = 100002$ sinapinsiementä.

PISTEYTYS
- Erotus $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 - 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 40$ muodostettu oikein. (1 p.)
- Vastaus (1 p.)

5.2 Osoita, että kepposten jälkeen jäljellä olevien sinapinsiementen lukumäärä on jaollinen seitsemällä riippumatta menninkäisten ja keijukaisten lukumääristä. **4 p.**

RATKAISU

Merkitään menninkäisten lukumäärää muuttujalla x ja keijukaisten lukumäärää muuttujalla y.

Tällöin kepposista selviytyvien sinapinsiementen lukumäärä on
$\frac{7^6 x - 7 \cdot 7 \cdot 3y}{7} = 7^5 x - 7 \cdot 3y = 7\left(7^5 x - 3y\right)$
Sulkeissa oleva luku on kokonaisluku, koska se on muodostettu kokonaisluvuista yhteenlaskun ja kertolaskun avulla. Koska luku $7\left(7^5 x - 3y\right)$ on muotoa $7m$, missä m on kokonaisluku, on sinapinsiementen lukumäärä jaollinen seitsemällä.

PISTEYTYS

- Lauseke $\frac{7^6 x - 7\cdot7\cdot3y}{7}$ muodostettu oikein. (1 p.)
- Lauseke $7\left(7^5 x - 3y\right)$ muodostettu oikein. (1 p.)
- Perusteltu, että sulkeissa oleva luku on kokonaisluku. (1 p.)
- Perusteltu, että tutkittava luku on jaollinen seitsemällä. (1 p.)

5.3 Jos menninkäisiä oli $7^{7777777}$ ja keijukaisia oli 5, niin menninkäisille jää lopulta todella suuri määrä sinapinsiemeniä. Osoita, että menninkäisille jäävien sinapinsiementen määrä on luku, jonka viimeinen numero on 4. **6 p.**

RATKAISU

Tarkastellaan kongruenssin avulla sinapinsiementen lukumäärän jakojäännöstä kymmenellä jaettaessa. Jakojäännös (0-9) on luvun viimeinen numero.

$$\frac{7^6\cdot7^{7777777}-7\cdot7\cdot3\cdot5}{7} \equiv 7^{7777782} - 3\cdot7\cdot5 \pmod{10}$$
$$\equiv \left(7^4\right)^{1944445}\cdot7^2 - 3\cdot7\cdot5$$
$$\equiv 1^{1944445}\cdot49 - 105$$
$$\equiv 1\cdot9 - 5 \;\equiv\; 4 \pmod{10}$$

Koska jakojäännökseksi saatiin 4, on luvun viimeinen numero 4.

PISTEYTYS

- Todettu, että jakojäännös luvulla 10 jaettaessa antaa viimeisen numeron. (1 p.)
- Lauseke $\frac{7^6\cdot7^{7777777}-7\cdot7\cdot3\cdot5}{7}$ muodostettu oikein. (1 p.)
- Kongruenssin modulo 10 käyttäminen. (1 p.)
- Laskettu jakojäännös 4 kongruenssilla. (3 p.)

6. Liikkuva piste **12 p.**

Piste P liikkuu xy - tasossa siten, että sen paikkavektori hetkellä t on $\overline{r}\left(t\right) = \left(1-3t\right)\,\overline{\mathrm{i}} + \left(3+t\right)\,\overline{\mathrm{j}}$, kun $t \in \mathbb{R}$.

6.1 Minkä käyrän piste P piirtää, kun parametri t käy läpi kaikki reaaliluvut? Anna vastauksena käyrän yhtälö. **4 p.**

RATKAISU

Pisteen P paikkavektori määrää pisteen P koordinaatit, jotka ovat $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 3+t \end{cases}$.

Eliminoidaan parametri t . Aloitetaan kertomalla alempi yhtälö luvulla 3: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ 3y = 9 + 3t \end{cases}$

Lasketaan yhtälöt yhteen: $x + 3y = 10 \Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0$

(Toinen tapa eliminoida parametri t : Ratkaistaan t vaikkapa alemmasta yhtälöstä, jolloin saadaan $t = y - 3$. Sijoitetaan tämä lauseke ylempään yhtälöön, jolloin saadaan $x = 1 - 3\left(y - 3\right)$ ja edelleen $x = 1 - 3y + 9 = 10 - 3y$. Päädytään samaan yhtälöön $x + 3y - 10 = 0$.)

Vastaus: Piste P piirtää suoran $x + 3y - 10 = 0$, kun parametri t käy läpi kaikki reaaliluvut.

PISTEYTYS

- Pisteen koordinaatit lausuttu parametrin t avulla. (1 p.)
- Kerrottu jompikumpi yhtälö sopivalla luvulla tarkoituksena eliminoida t ja laskettu yhtälöt yhteen (Vaihtoehtoisesti: Ratkaistu parametri t jommastakummasta yhtälöstä ja sijoitettu saatu lauseke toiseen yhtälöön.) (1 p.)
- Todettu että kyseessä on suoran yhtälö ja annettu se joko muodossa $x + 3y - 10 = 0$ tai $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$. (1 p.+ 1 p.)

6.2 Pisteen P piirtämältä käyrältä valitaan piste P_0 , joka on lähimpänä origoa. Määritä pisteen P_0 koordinaatit. **8 p.**

RATKAISU

Olkoon origo piste $O = (0,\ 0)$. Suoran yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.
Merkitään kysyttyä pistettä $P_0 = \left(x, -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\right)$.

Vaihtoehto 1:

Ratkaistaan tehtävä käyttäen vektorien ominaisuuksia.

Pisteen P_0 paikkavektori on $\overline{OP_0} = x\overline{\mathrm{i}} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\right)\overline{\mathrm{j}}$.
Suoran $y = kx + b$ suuntavektori on $\overline{\mathrm{i}} + k\overline{\mathrm{j}}$.
Suoran s suuntavektori on siten $\overline{s} = \overline{\mathrm{i}} - \frac{1}{3}\overline{\mathrm{j}}$.

Tiedetään, että vektori $\overline{OP_0}$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{s}$ vastaan silloin, kun piste P on lähimpänä origoa. Vektorien $\overline{s}$ ja $\overline{OP_0}$ pistetulo on siis nolla:
$\overline{OP_0} \cdot \overline{s} = 0 \Leftrightarrow x \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$
$x + \frac{1}{9}x - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{9}x = \frac{10}{9} \Rightarrow x = 1$

Sijoittamalla $x = 1$ suoran s yhtälöön saadaan $y = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{10}{3} = \frac{9}{3} = 3$.
Pisteen P_0 koordinaatit ovat siten $P_0 = (1{,}3)$.

Vastaus: $P_0 = (1,\ 3)$

PISTEYTYS

- Muodostettu suoran s yhtälön ratkaistu muoto. (1 p.)
- Muodostettu suoran s suuntavektori $\overline{s} = \overline{\mathrm{i}} - \frac{1}{3}\overline{\mathrm{j}}$. (1 p.)
- Muodostettu etsityn pisteen paikkavektori $\overline{OP_0}$. (1 p.)
- Kohtisuoruusehto todettu. (1 p.)

- Muodostettu yhtälö $\overline{OP_0} \cdot \overline{s} = 0$. (1 p.)
- Ratkaistu $x = 1$. (1 p.)
- Laskettu $y = 3$ sijoittamalla. (1 p.)
- Vastaus $P_0 = (1,\, 3)$ (1 p.)

Vaihtoehto 2:

Ratkaistaan tehtävä käyttäen derivaattaa.

Pisteen koordinaatit ovat $P_0 = \left(x, -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\right)$.
Etsityn pisteen paikkavektori on $\overline{OP_0} = x\,\bar{\text{i}} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\right)\bar{\text{j}}$.
Etsitään sellainen muuttujan arvo x , jolla pisteen P_0 paikkavektorin pituus on mahdollisismman pieni.

Muodostetaan "pituusfunktio" $f(x) = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\right)^2}$.

Derivointivaihtoehto 1:

Neliöjuurifunktio on aidosti kasvava funktio. Siten funktio f saa pienimmän arvonsa, kun juurrettava on pienin. Juurrettava on kahden neliön summana aina epänegatiivinen.
Muodostetaan juurrettavasta lausekkeesta uusi funktio $g(x) = x^2 + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}\right)^2$ ja etsitään tämän pienin arvo.

$g(x) = x^2 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{100}{9} = \frac{10}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{100}{9}$

Funktio g on polynomifunktiona derivoituva. Derivoidaan funktiota g ja saadaan

$g'(x) = \frac{20}{9}x - \frac{20}{9}$

Etsitään derivaatan nollakohta:

$\frac{20}{9}x - \frac{20}{9} = \frac{20}{9}(x-1) = 0$
$x = 1$

Koska funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, saa se pienimmän arvon kohdassa $x = 1$. Tällöin funktio f saa pienimmän arvonsa samassa kohdassa.

Sijoittamalla saadaan $y = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{10}{3} = \frac{9}{3} = 3$.
Pisteen P_0 koordinaatit ovat siten $P_0 = (1,\, 3)$.

Derivointivaihtoehto 2:

Voidaan derivoida funktiota f , jolloin saadaan:

$f(x) = \left(\frac{10}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{100}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{100}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{20}{9}x - \frac{20}{9}\right) =$
$= \frac{10x-10}{9 \cdot \sqrt{\frac{10}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{100}{9}}}$

Derivaatan nollakohta saadaan etsimällä osoittajan nollakohta:

$10x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Perustelu minimikohdalle: Derivaattalausekkeen nimittäjä on aina epänegatiivinen, joten osoittaja määrää derivaattafunktion etumerkin. Osoittaja on ensimmäisen asteen polynomilauseke, jonka ensimmäisen asteen kerroin on positiivinen. Siten osoittajan lauseke on aidosti kasvava, joten sen etumerkki muuttuu nollakohtaa ohittaessa negatiivisesta positiiviseen. Derivaattafunktion etumerkki on siten negatiivinen, kun $x < 1$ ja positiivinen kun $x > 1$. Tällöin $x = 1$ on minimikohta.

PISTEYTYS

- Muodostettu suoran yhtälön ratkaistu muoto. (1 p.)
- On merkitty suoran piste P_0 . (1 p.)
- Muodostettu paikkavektori $\overline{OP_0}$. (1 p.)
- Muodostettu pisteen P_0 paikkavektorin pituutta kuvaava funktio. (1 p.)
- Derivoitu oikein (koko funktion lauseketta tai juurrettavan lauseketta) ja saatu derivaatan nollakohdaksi $x = 1$. (1 p.)
- Perusteltu, että saatu derivaatan nollakohta on funktion f minimikohta. (1 p.)
- Laskettu $y = 3$ sijoittamalla. (1 p.)
- Vastaus $P_0 = (1,\ 3)$. (1 p.)

Voit käydä tarkastelemassa A-osan vastauksiasi nyt.
Palautettuasi A-osan et voi enää muokata A-osan vastauksia.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit palata kokeeseen jatkamaan tehtäviin vastaamista.

...

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöösi palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

B1-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

7. Arvotaan palkinto 12 p.

Arpajaisissa suoritetaan neljä arvontaa ja osallistujalla on mahdollisuus voittaa kussakin arvonnassa muista arvonnoista riippumatta. Arpajaisten järjestäjä valitsee etukäteen todennäköisyyden, jolla osallistuja voittaa yksittäisessä arvonnassa. Tämä todennäköisyys on sama jokaisessa arvonnassa. Merkitään tätä todennäköisyyttä kirjaimella p.

Kuvalähde: https://pixabay.com/sv/photos/lotter-f%C3%A4rgad-osorterade-lotta-ut-1422098/
Luettu: 17.12.2024

7.1 Oletetaan, että $p = \frac{2}{3}$. Millä todennäköisyydellä osallistuja voittaa täsmälleen kahdessa neljästä arvonnasta? Anna vastaus tarkkana murtolukuna tai desimaalilukuna kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. **3 p.**

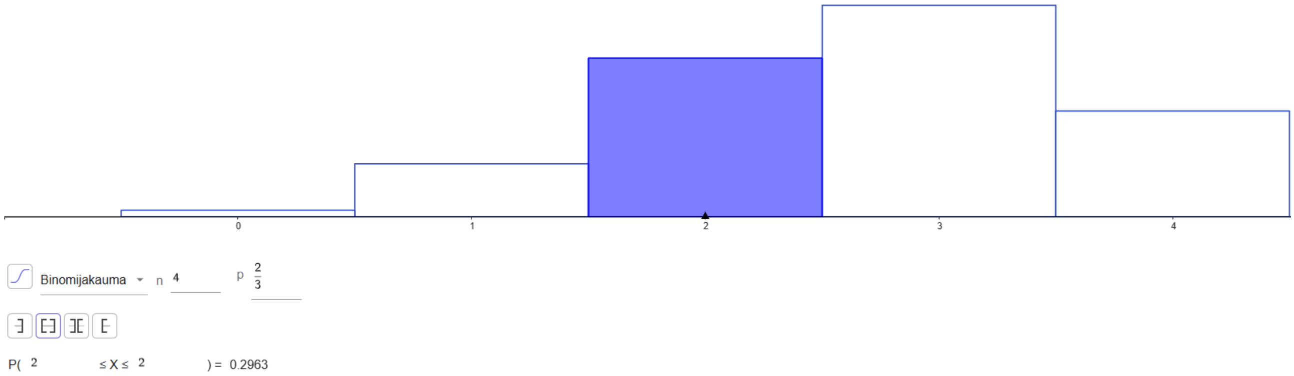
RATKAISU

Kyseessä on toistokoe johon voidaan soveltaa binomitodennäköisyyttä.

Täsmälleen kahden voiton todennäköisyys neljällä arvonnalla on
$P(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$.

Vastaus: $\frac{8}{27}$ tai $0{,}30$

Geogebran todennäköisyyslaskurin avulla saadaan



ja desimaalivastaukseksi $0{,}296\ldots \approx 0{,}30$.

PISTEYTYS

- Todettu, että kyseessä on toistokoe. (1p.)
- Sijoitettu oikein binomitodennäköisyyden kaavaan tai käytetty sopivan ohjelmiston todennäköisyyslaskuria. (1 p.)
- Laskettu oikea vastaus. (1 p.)

7.2 Oletetaan, että $p = \frac{2}{3}$. Millä todennäköisyydellä osallistuja voittaa vähintään kolmessa neljästä arvonnasta? Anna vastaus tarkkana murtolukuna tai desimaalilukuna kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. **3 p.**

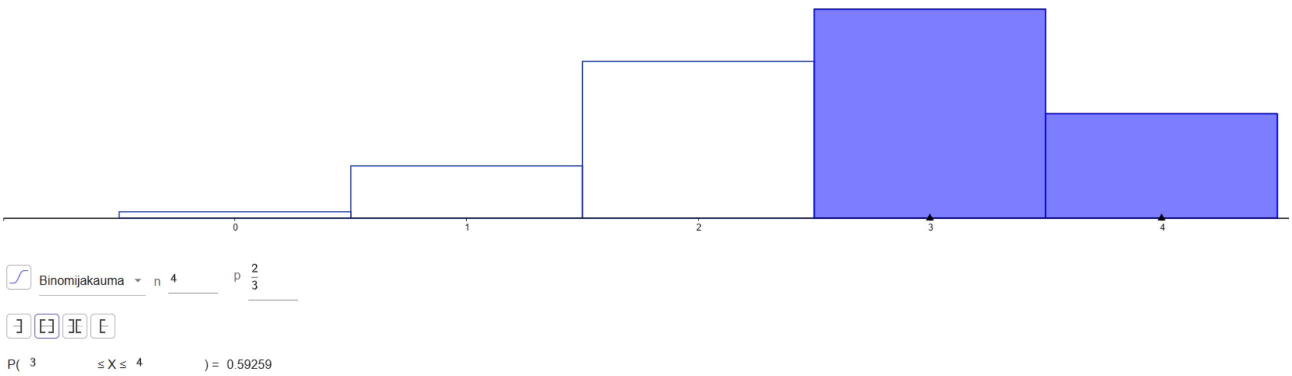
RATKAISU

Vähintään kolmen voiton todennäköisyys neljällä arvonnalla on

$$P(3) + P(4) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-3} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-4} = 4 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{16}{81} \cdot 1 =$$
$$= \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27} .$$

Vastaus: $\frac{16}{27}$ tai $0{,}59$

Geogebran todennäköisyyslaskurin avulla saadaan



ja desimaalivastaukseksi $0{,}592\ldots \approx 0{,}59$.

PISTEYTYS

- Sijoitettu oikein binomitodennäköisyyden kaavaan tai käytetty geogebran todennäköisyyslaskuria. (1 p.)
- Erillisten tapahtumien yhdisteen todennäköisyys: $P(3) + P(4)$. (1 p.)
- Laskettu oikea vastaus. (1 p.)

7.3 Arpajaisten järjestäjä haluaa maksimoida osallistujan todennäköisyyden voittaa täsmälleen kolmessa neljästä arvonnasta. Kuinka suureksi järjestäjän tulee tällöin valita luvun p arvo? Anna vastaus tarkkana murtolukuna tai desimaalilukuna kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. **6 p.**

RATKAISU

Kyseessä on toistokoe.
Osallistuja voittaa tasan kolmesti neljällä arvontakierroksella todennäköisyydellä
$P(3) = \binom{4}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)$, kun $0 \leq p \leq 1$.

$P(3) = 4p^3(1-p) = 4p^3 - 4p^4 = f(p)$

Funktio f on suljetulla välillä määritelty polynomifunktio, joten se on jatkuva ja derivoituva.
Derivoidaan funktio ja saadaan $f'(p) = 12p^2 - 16p^3$.

Etsitään derivaatan nollakohdat:

$4p^2(3-4p) = 0$
$p = 0 \vee 3 - 4p = 0$
$p = 0 \vee p = \frac{3}{4}$

Funktio saa jatkuvana ja derivoituvana funktiona suljetulla välillä suurimman arvonsa joko derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteissä (Voidaan myös tässä vaiheessa viitata suoraan Fermat:n lauseeseen.). Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = f(1) = 0$
$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4\right) = \frac{27}{64} > 0$

Tasan kolmen voiton todennäköisyys on suurimmillaan, kun voiton todennäköisyys yksittäisellä arvontakierroksella on $p = \frac{3}{4}$.
Vastaus: $p = \frac{3}{4}$ tai $0{,}75$

PISTEYTYS

- Saatu $P(3) = 4p^3(1-p) = 4p^3 - 4p^4 = f(p)$ (1 p.)
- Funktio f derivoitu oikein. (2 p.)
- Ratkaistu derivaatan nollakohdat ja saatu $p = 0 \vee p = \frac{3}{4}$ (1 p. yhtälöstä + 1p. ratkaisuista)
- Perusteltu Fermat:n lauseeseen viitaten, että $p = \frac{3}{4}$ antaa suurimman todennäköisyyden tasan kolmelle voitolle neljällä arvontakierroksella. (1 p.)

Huom. Jos kokelas on esimerkiksi käyttänyt Geogebran todennäköisyyslaskuria ja löytänyt luvun p arvon haarukoimalla, niin osatehtävästä max 4 p.

8. Tertun vertailut 12 p.

Terttu Talousosaaja harkitsee ottavansa pankista asuntolainaa. Hän tarvitsee 300 000 euron lainan ja haluaa maksaa sen pois 20 vuoden laina-ajalla. Pankki tarjoaa hänelle kahta eri, kuukausittain lyhennettävää lainatyyppiä:
A) tasalyhennyslaina kiinteällä 7 % vuosikorolla tai
B) annuiteettilaina 2,717 % Euribor 12 kk viitekorolla + 1,0 % marginaalilla.

8.1 Tarkastellaan vaihtoehtoa A. Laske lainan ensimmäisen ja viimeisen maksuerän suuruudet sekä koko summa (laina ja korot), jonka Terttu maksaa pankille. Anna vastauksesi sentin tarkkuudella. **6 p.**

RATKAISU

Vaihtoehto 1:

Lainan kuukausittainen korkokerroin $q = 1 + \frac{7}{100 \cdot 12} = 1{,}00583333\ldots$.
Kuukausieriä on yhteensä $n = 20 \cdot 12 = 240$ kappaletta.

Lainan kuukausittaisen lyhennyksen suuruus on $\frac{300000}{240} = 1250$ euroa.
Ensimmäinen maksuerä on $1250 + 300000 \cdot (q-1) = 1250 + 1750 = 3000$ euroa.
Viimeinen maksuerä on $1250 + 1250 \cdot (q-1) \approx 1257.29$ euroa.

Pankille maksettava summa on aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen ja viimeinen jäsen ovat äsken lasketut maksuerät:
$240 \cdot \frac{(1250+300000\cdot(q-1))+(1250+1250\cdot(q-1))}{2} = 510\ 875$ euroa.
Koko summa, jonka Terttu maksaa pankille, on $510\ 875{,}00$ euroa.

PISTEYTYS
- Kuukausierien lukumäärä on laskettu. (1 p.)
- Lainan kuukausittainen lyhennys on 1250. (1 p.)
- Ensimmäisen erän suuruus on laskettu oikein. (1 p.)
- Viimeisen erän suuruus oikein laskettu. (1 p.)
- Koko maksettava summa (2 p.)

Rahasummille riittävät sentin tarkkuudella annetut likiarvot, myös väliarvoissa. Tällöin koko maksettava summa hyväksytään myös tarkkuudella 510 874,80 euroa. Mikäli vastaus eroaa merkittävästi välipyöristysten vuoksi niin -1p. Esimerkiksi viimeisen maksuerän euron tarkkuudelle pyöristetyllä arvolla laskettuna koko summa on 510 840 euroa.

Vaihtoehto 2:
Ratkaistaan tehtävä taulukkolaskentaohjelmassa.
Taulukko alkaa tällä tavalla:

			Kuukausinro	Lyhennys	Korko	Maksuerä	Lainaa jäljellä
Lainan suuruus	300000		0				300000
			1	1250	1750	3000	298750
Laina-aika vuosina	20		2	1250	1742,708333	2992,708333	297500
			3	1250	1735,416667	2985,416667	296250
Kuukausierien lukumäärä	240		4	1250	1728,125	2978,125	295000
			5	1250	1720,833333	2970,833333	293750
Vuosikorko prosentteina	7		6	1250	1713,541667	2963,541667	292500
			7	1250	1706,25	2956,25	291250
Kuukausittainen korkokerroin	1,005833333		8	1250	1698,958333	2948,958333	290000
			9	1250	1691,666667	2941,666667	288750
Lainan (kuukausi)lyhennys	1250		10	1250	1684,375	2934,375	287500
			11	1250	1677,083333	2927,083333	286250
			12	1250	1669,791667	2919,791667	285000
			13	1250	1662,5	2912,5	283750
			14	1250	1655,208333	2905,208333	282500
			15	1250	1647,916667	2897,916667	281250
			16	1250	1640,625	2890,625	280000
			17	1250	1633,333333	2883,333333	278750
			18	1250	1626,041667	2876,041667	277500

Taulukko loppuu tällä tavalla:

	227	1250	102,0833333	1352,083333	16250
	228	1250	94,79166667	1344,791667	15000
	229	1250	87,5	1337,5	13750
	230	1250	80,20833333	1330,208333	12500
	231	1250	72,91666667	1322,916667	11250
	232	1250	65,625	1315,625	10000
	233	1250	58,33333333	1308,333333	8750
	234	1250	51,04166667	1301,041667	7500
	235	1250	43,75	1293,75	6250
	236	1250	36,45833333	1286,458333	5000
	237	1250	29,16666667	1279,166667	3750
	238	1250	21,875	1271,875	2500
	239	1250	14,58333333	1264,583333	1250
	240	1250	7,291666667	1257,291667	0
Yhteensä:		300000	210875	510875	

Ensimmäinen maksuerä on 3000 euroa, viimeinen maksuerä on 1257,29 euroa ja koko summa on 510 875 euroa.

PISTEYTYS
- Kuukausierien lukumäärä on laskettu oikein. (1 p.)
- Lainan kuukausittainen lyhennys on 1250. (1 p.)
- Maksuerätaulukko laadittu oikein. (3 p.)
- Vastaus (1 p.)

Kaavojen sisältöä ei tarvitse näyttää tai kirjoittaa erikseen, jos laskut ovat oikein.

8.2 Terttu valitsee vaihtoehdon B. Kun lainaa on maksettu viisi vuotta, Euribor 12 kk viitekorko nousee. Kuinka korkeaksi viitekoron pitäisi nousta, että lainasta maksettaisiin koko laina-aikana yhtä paljon kuin vaihtoehdossa A? Inflaatiota ei tarvitse huomioida. Anna vastauksesi 4 merkitsevän numeron tarkkuudella. **6 p.**

Käytäthän laskuissasi rahasummille senttien tarkkuutta, myös välivaiheissa ja laskuissa.

RATKAISU
Lasketaan annuiteetti alkuperäisellä korolla:
Korkokerroin on $q_1 = 1 + \frac{2{,}717+1}{100 \cdot 12} = 1{,}0030975$, jolloin annuiteetti on $A_1 = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$
$= 300\ 000 \cdot 1{,}0030975^{240} \cdot \frac{1-1{,}0030975}{1-1{,}0030975^{240}}$
$= 1773{,}517... \approx 1773{,}52$ euroa.
Kun laina-aikaa on kulunut 5 vuotta, on lainaa lyhennetty 60 kertaa. Tällöin lainaa on jäljellä $V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$
$V_{60} = 300\ 000 \cdot 1{,}0030975^{60} - 1773{,}52 \cdot \frac{1-1{,}0030975^{60}}{1-1{,}0030975}$
$= 244425{,}1603... \approx 244\ 425{,}16$ euroa.
Jäljellä olevasta lainasta V_{60} tehdään uusi lainapääoma. Selvitetään, kuinka suuri korkokertoimen q_2 tulisi olla, jotta tähän mennessä maksetut ja tulevat annuiteetit yhteensä olisivat yhtä suuret kuin kiinteäkorkoisen lainan maksuerät yhteensä. Merkitään uutta annuiteettia $A_2 = V_{60} \cdot q_2^{180} \frac{1-q_2}{1-q_2^{180}} = 244\ 425{,}16 \cdot q_2^{180} \cdot \frac{1-q_2}{1-q_2^{180}}$, jolloin
$A_1 \cdot 60 + A_2 \cdot 180 = 210\ 875 + 300\ 000$
Tästä saadaan laskimella (ainoaksi järkeväksi) ratkaisuksi $q_2 = 1{,}006136... \approx 1{,}00614$

$$\text{solve}\left(244425.16 * x\char`^180 * \frac{1-x}{1-x\char`^180} * 180 + 60 * 1773.52 = 510875\right)$$
$$\{x=-0.9705949206, x=1.006136778\}$$

Tämän perusteella $q_2 = 1 + \frac{p+1}{100 \cdot 12} = 1{,}00614$, jolloin korkoprosentti on $p \approx 6{,}368$.
Korkoprosentin tulisi kasvaa 6,368 prosenttiin, jotta vaihtoehdosta B tulisi yhtä kallis kuin vaihtoehto A.

PISTEYTYS
- Annuiteettilainan korkokerroin laskettu oikein. (1 p.)
- Alkuperäinen annuiteetti laskettu oikein. (1 p.)
- Jäljellä oleva lainapääoma viiden vuoden kuluttua laskettu oikein. (1 p.)
- Lainojen vertailuyhtälö muodostettu oikein. (1 p.)
- Uusi korkokerroin laskettu oikein. (1 p.)
- Uusi korkoprosentti laskettu oikein. (1 p.)

Huomautus: Lainojen vertailuyhtälön $A_2 = V_{60} \cdot q_2^{180} \frac{1-q_2}{1-q_2^{180}} = 244\ 425{,}354... \cdot q_2^{180} \cdot \frac{1-q_2}{1-q_2^{180}}$ *ratkaiseminen laskinohjelmistoilla voi antaa poikkeavia tuloksia, minkä vuoksi tehtävänannossa pyydetään antamaan myös laskuissa käytetyt välitulokset senttien tarkkuudella. Käyttämällä raha-arvoissa suurempia tarkkuuksia, antavat Geogebra ja Casion Classpad poikkeavia, mutta järkeviä tuloksia, joskin Classpad laskee laskua pitkään. TI-Nspire sen sijaan ei anna järkevää kokoluokkaa olevia vastauksia. Alla on annettu kuvat tilanteista, joissa liian tarkkojen arvojen käyttö muuttaa tulosta.*
Casio Classpad ja tarkemmat arvot:

```
244425.3543
solve(ans*x^180*(1-x)/(1-x^180)*180+60*1773.517053=510875
{x=-0.9705949187, x=1.006136773}
```

Geogebra ja tarkemmat arvot:

$$244425.3543 \cdot x^{180} \cdot \frac{1-x}{1-x^{180}} \cdot 180 + 60 \cdot 1773.517053 = 510875$$

RatkaiseNumeerisesti: $\{x = -0.9731827657, x = 1.0062137739\}$

TI-Nspire ja tarkemmat arvot:

$$\text{solve}\left(244425.3543 \cdot x^{180} \cdot \frac{1-x}{1-x^{180}} \cdot 180 + 60 \cdot 1773.517053 = 510875, x\right)$$

$x=^-31474.4$ or $x=^-2668.59$ or $x=^-1798.19$ or $x=^-511.191$ or $x=^-283.328$ or $x=^-11.157$ or $x=^-1.65211$ or $x=^-0.970595$ or $x=1.35916$ or $x=1.627$

Riippuen likiarvon q_2 tarkkuudesta saadaan kysytystä korkoprosentista hieman eri arvoja. Korkoprosentiksi kelpaavat luvut välillä $[6{,}36;\ 6{,}37]$.

9. Rusetin leikkauspisteitä **12 p.**

Yhtälön $x^4 + y^3 - x^2 y = 0$ määräämä pistejoukko on rusettia muistuttava käyrä. Kutsutaan käyrää jatkossa rusettikuvaajaksi.

9.1 Määritä rusettikuvaajan ja suoran $y = -2$ leikkauspisteet. Anna vastauksena leikkauspisteiden koordinaattien tarkat arvot. **3 p.**

RATKAISU

Ratkaistaan rusettikuvaajan yhtälö muuttujan x suhteen, kun $y = -2$:

$x^4 + (-2)^3 - x^2(-2) = 0$

$x^4 - 8 + 2x^2 = 0$

Tästä saadaan CAS-laskimella ratkaisuiksi $x = \pm\sqrt{2}$.

Kysytyt leikkauspisteet ovat $\left(\sqrt{2}, -2\right)$ ja $\left(-\sqrt{2}, -2\right)$.

PISTEYTYS

Tehtävän voi ratkaista myös yhtälöparilla.

- Yhden muuttujan yhtälö muodostettu sijoittamalla $y = -2$ TAI yhtälöpari muodostettu (1 p.)
- Yhtälön TAI yhtälöparin ratkaiseminen (1 p.)
- Vastaus (1 p.)

Jos leikkauspisteiden koordinaatit annetaan likiarvoina max 1 p.

9.2 Rusettikuvaajan ja paraabelin $x^2 = a - y$, missä $a \in \mathbb{R}$, leikkauspisteiden lukumäärä riippuu vakion a arvosta.

Anna esimerkki sellaisesta vakion a arvosta, jolla leikkauspisteiden lukumäärä on
i) 0.
ii) 2.
iii) 6.
Esimerkkejä ei tarvitse perustella. **3 p.**

RATKAISU
i) $a = -1$
ii) $a = 1$
iii) $a = 0{,}1$

PISTEYTYS
Tehtävään on useita ratkaisuja. Alla ovat parametrin a likiarvoiset rajat leikkauspisteiden eri määrille:
0 leikkauspistettä, kun $a < -0{,}3849$
2 leikkauspistettä, kun $a > 0{,}3849$
6 leikkauspistettä, kun $0 < a < 0{,}3849$
Oikealta väliltä valittu arvo antaa 1 p. Perusteluja ei tarvita.
(Vakion arvoilla $a = 0$ käyrillä on 3 leikkauspistettä ja arvoilla $-0{,}3849 < a < 0$ niillä on 4 leikkauspistettä)

Leikkauspisteitä on 0 kappaletta, kun $a =$ [ ] 1 p.
Leikkauspisteitä on 2 kappaletta, kun $a =$ [ ] 1 p.
Leikkauspisteitä on 6 kappaletta, kun $a =$ [ ] 1 p.

9.3 Osoita, että rusettikuvaajalla ja paraabelilla $x^2 = a - y$, missä $a \in \mathbb{R}$, on enintään 6 leikkauspistettä. **6 p.**

Vihje: Polynomilla, jonka asteluku on n, on enintään n nollakohtaa.

RATKAISU
Paraabelin yhtälöstä $x^2 = a - y$ saadaan $x = \pm\sqrt{a-y}$. Sijoittamalla nämä rusettikuvaajan yhtälöön saadaan muuttujan x lausekkeen etumerkistä riippumatta
$(a-y)^2 + y^3 - (a-y)\,y = 0$
$y^3 + 2y^2 - 3ay \ + a^2 = 0$
Tämä on kolmannen asteen polynomiyhtälö muuttujan y suhteen, joten sillä on enintään 3 ratkaisua muuttujan y suhteen.
Jokaista muuttujan y suhteen saatua ratkaisua vastaa (enintään) kaksi eri muuttujan x arvoa yhtälön $x = \pm\sqrt{a-y}$ mukaisesti. Tällöin leikkauspisteitä voi olla enintään 6.

PISTEYTYS

- Paraabelin yhtälön sijoitus rusettikuvaajan yhtälöön TAI muodostettu yhtälöpari paraabelin ja rusettikuvaajan yhtälöiden avulla. (2 p.)
- Muodostettu kolmannen asteen yhtälö muuttujan y suhteen. (1 p.)
- Ratkaisujen maksimimäärä muuttujan y suhteen perusteltu. (1 p.)
- Perusteltu, että jokaista muuttujan y arvoa vastaa enintään kaksi muuttujan x arvoa. (1 p.)
- Leikkauspisteiden lukumäärä perusteltu. (1 p.)

Jos leikkauspisteiden lukumäärä perustellaan piirto-ohjelmalla piirretyn kuvan avulla (eikä täsmällisesti) niin max 1 p.
Jos leikkauspisteiden lukumäärä perustellaan likiarvoratkaisuina yhtälöiden muodostamasta yhtälöparista jollain esimerkkiluvulla parametrin a tilalla, niin max 2 p.

Tehtävän voi ratkaista myös sijoittamalla paraabelin yhtälöstä saatavan muuttujan y lausekkeen rusettikuvaajan yhtälöön, jolloin saadaan kuudennen asteen yhtälö $x^4 + \left(-x^2 + a\right)^3 - x^2\left(-x^2 + a\right) = 0$. Tällöin viimeiset 4 pistettä jakautuvat seuraavasti:
- Oikea kuudennen asteen yhtälö muodostettu. (2 p.)

- Kuudennen asteen yhtälön nollakohtien maksimimäärä perusteltu. (1 p.)
- Leikkauspisteiden maksimimäärä perusteltu. (1 p.)

10. Liikevaihtojen vertailua **12 p.**

Aineisto

10.A Kuva: Funktoiden kuvaajat

10.B Teksti: Harjoittelijan ratkaisu

Videovuokraamoyrityksen ja suoratoistopalveluyrityksen liikevaihtoja mallinnettiin funktioilla, joissa muuttujan arvot kuvaavat vuosilukuja ja funktioiden arvot kuvaavat liikevaihtoja euroissa. Aineistossa 10.A on kuva funktioiden kuvaajista.

Mallit toimivat vuosien 2000-2006 välillä ja muuttujien desimaaliosat tarkoittavat tarkempia ajankohtia tarkasteltavina vuosina. Esimerkiksi 2001,25 tarkoittaa huhtikuun 2. päivää kalenterivuonna 2001, koska $0{,}25 \cdot 365 = 91{,}25 = 31 + 28 + 31 + 1{,}25.$

Videovuokraamoyrityksen liikevaihtoa kuvaava funktio on $f\left(x\right) = 1000000 \cdot e^{-0{,}2(x-2001{,}28)^3+x-2001{,}28}$ ja suoratoistopalveluyrityksen liikevaihtoa kuvaava funktio on $g\left(x\right) = 1000000 \cdot e^{x-2004{,}28}$.

Ilmoita muuttujan arvot päivämäärinä ja funktion arvot tuhannen euron tarkkuudella. Vuosien 2000 ja 2004 karkauspäiviä ei tarvitse ottaa huomioon.

10.1 Eräs harjoittelija pyrki selvittämään, minä ajankohtana videovuokraamoyrityksen liikevaihto oli suurimmillaan ja kuinka suuri se tuolloin oli. Harjoittelijan ratkaisu on aineistoissa 10.B. Kerro, minkä virheen harjoittelija teki ratkaisussaan ja ratkaise sitten tehtävä harjoittelijan valitsemalla tavalla loppuun ilman virheitä. **4 p.**

RATKAISU
Harjoittelija väittää eksponenttilausekkeen h suurinta arvoa funktion f suurimmaksi arvoksi. Tämä ei pidä paikkaansa, vaikka funktiot h ja f saavatkin suurimman arvonsa samalla muuttujan x arvolla. Todellinen liikevaihdon suurin arvo on $f\left(2002{,}570994\right) = 2364727{,}908 \approx 2365000\ euroa.$ Päivämäärä on sama kuin harjoittelijan määrittämä päivämäärä, eli 28.7.2002.

PISTEYTYS
- Virheen löytäminen, eli harjoittelija on laskenut väärän funktion suurimman arvon. (2 p.)
- Korjatun (loppu)ratkaisun esittäminen (2 p.)

10.2 Minä ajankohtana molempien yritysten liikevaihdot olivat yhtä suuret ja kuinka suuret ne tällöin olivat? **4 p.**

RATKAISU
Ratkaistaan yhtälö $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ laskimella. Rajataan pois ratkaisut, jotka eivät kuulu välille $[2000,\ 2006]$. Ainoaksi ratkaisuksi saadaan $x = 2003{,}74621207433$.
Lasketaan päivämäärä: $0{,}74621207433 \cdot 365 = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 29{,}367\ldots$ Tästä

saadaan päivämäärä 30.9.2003.
Liikevaihdon suuruus 30.9.2023 on $f\left(2003{,}74621207433\right) = 586379{,}7107 \approx 586000$ euroa.

PISTEYTYS
- Hoksattu, että kysytään yhtälön $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ ratkaisua (1 p.)
- Yhtälö ratkaistu oikein. (1 p.)
- Ratkaisun arvoa vastaava päivämäärä oikein päätelty. (1 p.)
- Liikevaihto kysyttynä päivämääränä laskettu oikein. (1 p.)

10.3 Minä ajankohtana molempien yritysten liikevaihdot kasvoivat yhtä nopeasti? **4 p.**

RATKAISU
Liikevaihtojen muutosnopeuksia kuvaavat derivaattafunktiot
$f'\left(x\right) = -7{,}163730786 \cdot 10^{-864} \cdot e^{-0.2(x-2001.28)^3+x} \cdot \left(0{,}6x^2 - 2401.536x + 2403071{,}983\right)$
ja $g'\left(x\right) = g\left(x\right) = 1000000 \cdot e^{x-2004{,}28}$.
Välillä $[2000,\ 2006]$ $f'\left(x\right) = g'\left(x\right)$ kun $x = 2000{,}01050405258$ tai $x = 2002{,}5229414272$.
Nämä molemmat ovat liikevaihdon kasvutilanteita, koska
$g'\left(2000{,}01050405258\right) = 13988{,}83248 > 0$ ja
$g'\left(2002{,}5229414272\right) = 172551{,}6663 > 0$, joten ne kelpaavat vastauksiksi. Lasketaan päivämäärät, joita muuttujan arvot $x = 2000{,}01050405258$ ja $x = 2002{,}5229414272$ vastaavat:

$0{,}01050405258 \cdot 365 = 3{,}833979\ldots$
Tästä saadaan päivämäärä 4.1.2000.

$0{,}5229414272 \cdot 365 = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 9{,}87362\ldots$ Tästä saadaan päivämäärä 10.7.2002.

Liikevaihdot kasvoivat yhtä nopeasti 4.1.2000 ja 10.7.2002.

PISTEYTYS
- Ymmärretty, että liikevaihtoa kuvaavan funktion derivaatta on positiivinen. (1 p.)
- Derivaattafunktioiden lausekkeet oikein. (1 p.)
- Yhtälö $f'\left(x\right) = g'\left(x\right)$ muodostettu ja ratkaistu oikein. (1 p.)
- Päivämäärät laskettu oikein. (1 p.)

Liikevaihdon kasvu voidaan perustella myös kuvaajaa tulkitsemalla ilman derivaatan arvon tarkastelua.

B2-osa

Vastaa kahteen tehtävään.

11. Käänteisfunktion ominaisuuksia 12 p.

Olkoon funktio $f(x) = e^x + 2x$.

11.1 Osoita, että funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja määritä $\left(f^{-1}\right)'(1)$. **6 p.**

RATKAISU
Määritetään ensin funktion f derivaattafunktio: $f'(x) = e^x + 2$
Derivaattafunktio f' on aidosti positiivinen, sillä $e^x > 0$.
Koska $f'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, on funktio f monotoninen. Koska funktio f on monotoninen, on sillä olemassa käänteisfunktio.

Käänteisfunktion derivaatan arvo kohdassa y_0 on $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, missä $y_0 = f(x_0)$. Koska $f(0) = 1$, niin
$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)}$ ja
$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{e^0+2} = \frac{1}{3}$.

PISTEYTYS
- Funktion f derivaattafunktion lauseke. (1 p.)
- Perusteltu, että derivaattafunktio f' on aidosti positiivinen. (1 p.)
- Todettu, että monotonisuuden vuoksi funktiolla f on olemassa käänteisfunktio. (1 p.)

- Löydetty piste $(x_0, y_0) = (0,1)$, jolle $f(0) = 1$. (1 p.)
- Sijoitettu kaavaan $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ ja laskettu oikea vastaus (2 p.)

Jos on vain yritetty pyörittää muotoon $x = f(y)$, niin max 0 p.

11.2 Funktion $f(x) = e^x + 2x$ käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaaja pyörähtää y-akselin ympäri välillä $x \in [1,\ e+2]$ muodostaen pyörähdyskappaleen.

Määritä pyörähdyskappaleen tilavuus. **6 p.**

RATKAISU
Koska $f(0) = 1$ ja $f(1) = e + 2$,
on $f^{-1}(1) = 0$ ja $f^{-1}(e+2) = 1$.

Tarkasteltu pyörähdyskappale on siten yhteneväinen sellaisen pyörähdyskappaleen kanssa, joka muodostuu kun funktion f kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[0,1]$.

Lasketaan jälkimmäisen pyörähdyskappaleen tilavuus:
$\int_0^1 \pi(f(x))^2 dx$
$= \int_0^1 \pi(e^x + 2x)^2 dx$, josta saadaan CAS-laskimella
$\frac{\pi}{2}\left(e^2 + \frac{29}{3}\right) \approx 27$.

PISTEYTYS

- Löydetty vastinpisteet $(0,\ 1)$ ja $(1,\ e+2)$. (2 p.)
- Todettu, että tarkasteltu pyörähdyskappale on yhteneväinen sellaisen pyörähdyskappaleen kanssa, joka muodostuu kun funktion f kuvaaja pyörähtää x -akselin ympäri välillä $[0,\ 1]$. (2 p.)
- Muodostettu pyörähdyskappaleen tilavuuden integraalilauseke. (1 p.)
- Laskettu oikea vastaus. (1 p.)

12. Laskettelijat mäessä **12 p.**

Aineisto

12.A Kuva: Kartta

Yhtälön $z=e^{2xy-2x^2-y^2}$ kuvaaja mallintaa maastonmuotoja erään lumisen mäen läheisyydessä. Koordinaatiston x -akseli osoittaa itään, y -akseli osoittaa pohjoiseen ja z -akseli osoittaa maanpinnan tasosta ylöspäin. Lisäksi z -akselin nollakohta on merenpinnan tasolla. Koordinaatiston yksikkö on 100 m. Mäen huipun koordinaatit ovat $(0,\ 0,\ 1)$. Aineistossa 12.A on kartta mäestä. Karttaan on merkitty mäen huippu ja korkeuskäyrät, jotka vastaavat 10, 30, 50, 70 ja 90 metrin korkeutta merenpinnan tasosta.

12.1 Laskettelija A laskee mäen huipulta sellaiseen mäen rinteen kohtaan, joka sijaitsee huipusta 100 metriä pohjoiseen ja 50 metriä itään. Osoita laskemalla, että laskettelija A on noin 60,7 metrin korkeudella merenpinnan tasosta. (2 p.)

Tämän jälkeen laskettelija lähtee laskemaan rinnettä alas. Hän lähtee laskemaan suuntaan, johon rinne viettää jyrkimmin. Mihin ilmansuuntaan laskettelija lähtee? (6 p.) **8 p.**

RATKAISU

Laskettelijan korkeus merenpinnan tasosta on yhtälöstä saatu korkeus z, kun sijoitetaan arvot $x=\frac{1}{2}$ ja $y=1$:

$z=e^{2xy-2x^2-y^2}$

$z=e^{2\cdot\frac{1}{2}\cdot1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2-1^2}=e^{-\frac{1}{2}}$

$\approx 0{,}60653... \approx 0{,}607$

Eli laskettelija on 60,7 metrin korkeudella merenpinnasta.

Tulkitaan rinteen pinta sopivan funktion kuvaajaksi:

$f\left(x,y\right)=e^{2xy-2x^2-y^2}$

Määritetään osittaisderivaatat:

$\delta_x f\left(x,y\right)=\left(2y-4x\right)e^{2xy-2x^2-y^2}$

$\delta_y f\left(x,y\right)=\left(2x-2y\right)e^{2xy-2x^2-y^2}$

Muodostetaan gradienttivektorin lauseke:

$\nabla f\left(x,y\right)=\left(2y-4x\right)e^{2xy-2x^2-y^2}\,\bar{\mathrm{i}}+\left(2x-2y\right)e^{2xy-2x^2-y^2}\,\bar{\mathrm{j}}$

Pisteessä $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ gradienttivektori on $\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right)=0\bar{\mathrm{i}}-e^{-\frac{1}{2}}\,\bar{\mathrm{j}}$

Rinne viettää jyrkimmin vektorin$-\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right)=e^{-\frac{1}{2}}\,\bar{\mathrm{j}}$ eli y - akselin suuntaan.

Laskettelija A lähtee laskemaan pohjoiseen.

PISTEYTYS

- Oikeat muuttujien x ja y arvot sijoitettu pinnan yhtälöön. (1 p.)
- Korkeus laskettu oikein. (1 p.)

Likiarvon voi myös mitata piirto-ohjelman avulla käyttämällä annetun yhtälön kuvaajaa.

- Funktio määritelty oikein. (1 p.)
- Laskettu osittaisderivaatat oikein. (1 p./kohta)
- Gradienttivektorin lauseke muodostettu oikein. (1 p.)
- Laskettu gradienttivektorin arvo pisteessä $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ oikein. (1 p.)
- Oikea vastaus. (1 p.)

Gradienttivektorin arvoissa voi käyttää likiarvoja. Jos suunta poikkeaa likiarvon vuoksi oikeasta suunnasta (eli jos saatu suunta ei ole vain y -akselin suuntainen) niin -1 p.
Mikäli oikea vastaus annetaan ilman perusteluita ja välivaiheita, niin max 1 p.

12.2 Laskettelija B laskee mäen huipulta kaakkoon ja pysähtyy rinteessä 60,7 metrin korkeudelle merenpinnan tasosta. Mitkä ovat laskettelijan B koordinaatit? Anna vastauksena kysytyt koordinaatit kolmen desimaalin tarkkuudella. **4 p.**

RATKAISU
Laskettelija B lähtee kaakkoon, jolloin hänen päätepisteensä koordinaatit ovat $(k, -k, z)$ jollakin positiivisella vakion k arvolla.
Tehtävänannon mukaisesti $z = 0{,}607$.
Sijoitetaan arvot annettuun yhtälöön ja ratkaistaan yhtälö vakion k suhteen.
$e^{2\cdot k\cdot(-k)-2k^2-(-k)^2} = 0{,}607$
$e^{-5k^2} = 0{,}607$
Ratkaisuksi saadaan laskimella $k \approx \pm 0{,}3160$, joista vain positiivinen ratkaisu kelpaa. Laskettelijan B päätepisteen koordinaatit ovat $(0{,}316; -0{,}316;\ 0{,}607)$.

PISTEYTYS
- Ymmärretty, miten mäen huipulta kaakkoon siirtyminen muuttaa pisteen x - ja y -koordinaatteja suhteessa toisiinsa. (1 p.)
- Sijoitettu likiarvo ja vakio k tehtänävannon yhtälöön. (1 p.)
- Ratkaistu vakion k arvot. (1 p.)
- Ilmoitettu oikeat koordinaatit. (1 p.)

13. Alkulukujen etsintäohjelma **12 p.**

Aineisto

13.A Teksti: Ohjelmakoodi

13.B Kuva: Ohjelmakoodi ja tulosteikkuna

Aineistoissa 13.A ja 13.B oleva Python-koodi pyytää käyttäjältä syötteenä lukua 1 suuremman, mutta lukua 1000 pienemmän kokonaisluvun n. Tämän jälkeen koodi tulostaa kaikki alkuluvut, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin luku n.

13.1 Selitä, miten koodi toimii. Selitä kokonaisuuksina koodin rivit 1-3 (2 p.) ja 4-15 (4 p.). Koodissa käytettävää matematiikkaa ei tarvitse selittää.

6 p.

RATKAISU
Rivit 1-3 pyytävät käyttäjältä syötteeksi kokonaisluvun väliltä $]1,\ 1000[$. Mikäli syötetty luku ei ole pyydetyltä väliltä, pyytää koodi antamaan syötteen uudestaan. Annettu luku tallennetaan muuttujaksi **n** .

Rivit 4-15 luovat listan kaikista alkuluvuista , jotka ovat pienempiä tai yhtäsuuria kuin luku **n** .
Rivillä 4 ohjelma luo listan " **alkuluvut** ", johon ohjelma (lopulta) lisää kaikki alkuluvut.
Rivillä 5 ohjelma aloittaa alkulukutarkistuksen luvusta 2. Tämä luku on tallennettu muuttujan " **luku** " arvoksi. Luvun **luku** jaollisuus itseään pienemmillä luvuilla tarkistetaan riveillä 6-12. Tarkistuksen perusteella päätetään, onko muuttujan " **luku"** nykyinen arvo alkuluku.

Rivillä 6 alkaa while-silmukka, joka vaikuttaa riveihin 7-15.
Rivillä 7 tallennetaan muuttujan " **alkuluku** " arvoksi 1. Muuttujan **alkuluku** arvo 1 vastaa tilannetta, jossa tutkittavan muuttujan **luku** arvo on alkuluku.
Rivillä 8 luodaan uusi muuttuja " **i"** ja asetetaan sen arvoksi 2.
Rivillä 9 alkaa while-silmukka, joka vaikuttaa riveihin 10-12.
Rivien 10 ja 11 if-lohko tarkistaa, onko muuttujan **luku** nykyinen arvo jaollinen muuttujalla **i** . Jos se on, niin muuttujan **alkuluku** arvoksi asetetaan 0. Muuttujan **alkuluku** arvo 0 vastaa tilannetta, jossa muuttujan **luku** arvo ei ole alkuluku.
Rivillä 12 kasvatetaan muuttujan **i** arvoa yhdellä.Rivillä 9 alkaneen while-silmukan suorittaminen jatkuu, kunnes **i** on yhtä suuri kuin muuttujan **luku** arvo.

Mikäli muuttujan **alkuluku** arvo edelleen on 1 riveillä 13-14, lisätään muuttujan **luku** nykyinen arvo rivillä 4 luotuun listaan **alkuluvut** .

Rivillä 15 muuttujan **luku** arvoa kasvatetaan yhdellä, minkä jälkeen rivin 6 while-silmukka alkaa alusta muuttujan **luku** uudella arvolla. Kuvio toistuu, kunnes muuttujan **luku** arvo on yhtä suuri kuin syötteenä saatu luku **n** . Näin ohjelma käy läpi kaikki luvut luvusta 2 lukuun n. Rivit 9-12 tarkistavat kulloisenkin muuttujan **luku** arvon jaollisuuden lukujen 2, 3, ..., **n** kanssa.

PISTEYTYS
- Rivien 1-3 selitys (2 p.)
- Rivien 7-12 selitys (2 p.)
- Rivien 13-14 (ja 4) selitys (1 p.)
- Rivin 15 (ja 6) selitys (1 p.)

Ratkaisussa ei tarvitse eritellä jokaisen rivin toiminta erikseen vaan koodin toiminnallisuuden voi selittää kokonaisuuksina.

Jos selitys ei ole riittävän tarkka (esim. rivit 6-12 tutkivat jaollisuutta), niin rivien 1-3 selityksestä max 1 p. ja rivien 4-15 selityksestä max 1 p.

Jos koodin toiminta selitetään suoraan rivejä lukemalla viittaamatta muihin riveihin ja ymmärtämättä, mitä komennot tekevät (esim rivillä 6 käydään komento uudestaan niin kauan kuin luku <= n), niin rivien 1-3 selityksestä max 1 p. ja rivien 4-15 selityksestä max 1 p.

13.2 Koodiin on kirjoitettu rajoite, joka estää liian suurien lukujen syöttämisen ohjelmaan. Ohjelma saattaisi muutoin jumittua liian suurilla luvun n arvoilla. Jumittuminen johtuu siitä, että suurempien luvun n arvojen jaollisuuden tarkistaminen vie enemmän aikaa ja vaatii enemmän laskutehoa tietokoneelta.

Kun alkulukuja etsitään tai tarkistetaan, onko annettu luku alkuluku, käytetään erilaisia matemaattisia keinoja lyhentämään suoritusaikaa. Kerro jostakin matemaattisesta keinosta, jolla aineistojen 13.A ja 13.B koodin suoritusaikaa voisi lyhentää. Saadaksesi tästä tehtävästä täydet pisteet sinun tulee **joko**

A: esitellä **kaksi** matemaattista tapaa, joilla aineistojen koodin suoritusaikaa voisi lyhentää (3 p./ tapa) **tai**

B: esitellä **yksi** matemaattinen tapa, jolla aineistojen koodin suoritusaikaa voisi lyhentää, **sekä** muokata annettua koodia siten, että se käyttää esittelemääsi tapaa. Anna vastauksena muutettu koodi kahdella tavalla: sekä tekstinä vastauskentässä että kuvakaappauksena Python-editorista. (3 p. tavasta ja 3 p. oikeasta koodista).

Ilmoita vastauksesi alussa, valitsetko vastaustavan A vai B. **6 p.**

RATKAISU

Vastaustapa A:
Eräs tapa pienentää tutkittavien lukujen määrää on tutkia jaollisuutta luvusta 2 vain lukuun $\sqrt{n}$ asti. Menetelmä perustuu siihen, että jos luku ei ole alkuluku, on sen pienin alkulukutekijä suurimmillaan $\sqrt{n}$. Tämä johtuu siitä, että jos luku k on luvun n pienin alkulukutekijä, on luku n pienimmillään k^2 ellei n ole alkuluku.

Toinen tapa lyhentää koodin suoritusaikaa on jaollisuuden tarkistaminen vain parittomilla luvuilla. Vain alkuluku 2 on parillinen, joten jaollisuutta ei tarvitse tarkistaa parillisilla luvuilla. Tällöin suoritusaika lyhenee, kun tarkistettavia laskuoperaatioita on noin puolet alkuperäisestä

Vastaustapa B:
Eräs tapa pienentää tutkittavien lukujen määrää on tutkia jaollisuutta luvusta 2 vain lukuun $\sqrt{n}$ asti. Menetelmä perustuu siihen, että jos luku ei ole alkuluku, on sen pienin alkulukutekijä suurimmillaan $\sqrt{n}$. Tämä johtuu siitä, että jos luku k on luvun n pienin alkulukutekijä, on luku n pienimmillään k^2 ellei n ole alkuluku.

Menetelmä voidaan toteuttaa vaihtamalla riville 9 termin i tilalle i*i ja tarkistamalla myös yhtäsuuruus, jolloin rivi 9 näyttää tältä:

while i*i <= luku:

Kuvankaappauksena se näyttää tältä:

```
8      i = 2
9      while i*i <= luku:
10         if luku % i == 0:
```

Tällöin koodi tutkii lukuja vain siihen indeksilukuun i asti, jolla indeksiluvun i neliö on tutkittava luku tai sitä suurempi.

PISTEYTYS
Vaihtoehto A ja B:
- Esitelty toimiva tapa lyhentää suoritusaikaa. (3 p./tapa, max 6 p. jos vastattu vaihtoehdolla A ja max 3 p. jos vastattu vaihtoehdolla B)
- Annettu tapa integroitu koodiin. (3 p. vain vaihtoehdolla B)

Jos tapa on toimiva, mutta selitetty epäselvästi -1 p./tapa
Jos koodia on muokattu huolimattomasti siten, että joitain poikkeustapauksia jää huomioimatta -1 p.
Poikkeustapausten tarkistamiseksi on hyödyllistä kokeilla syötteeksi esim. lukuja 2 , p , $p-1$, $p+1$ ja p^2 , missä p on jokin alkuluku.

Muita sopivia matemaattisia tapoja suoritusajan lyhentämiseksi ovat esimerkiksi:
1) Suoritetaan alkulukutarkistus vain parittomille luvuille. Tällä tavalla löydetään kaikki alkuluvut paitsi 2. Tapa lyhentää tarkistusta huomattavasti kun lukuja, joille jaollisuus tarvitsee tarkistaa on vain puolet alkuperäisestä.
2) Jaollisuuden tarkistus vain alkuluvuilla Eratostheneen seulan tavoin. Tämä voidaan toteuttaa tarkistamalla jaollisuus jo siihen asti löydetyillä alkuluvuilla.
3) Tarkistamalla jaollisuus vain muotoa $6k \pm 1$ olevilla luvuilla, missä $k \in \mathbb{N}$. Tällä tavalla löydetään kaikki alkuluvut paitsi 2 ja 3. Tapa lyhentää tarkistusta huomattavasti kun lukuja, joilla jaollisuus tarvitsee tarkistaa on vain kolmasosa alkuperäisestä.
4) Indeksilukujen **i** tarkistus voidaan lopettaa, jos rivillä 10 on löydetty indeksiluku **i** , jolla tutkittava luku oli jaollinen.

Jos ohjelmaa joudutaan muuttamaan hieman alkuperäisestä tarkoituksestaan jonkin tava toimimiseksi (esim. pyydetään luku, joka on suurempi kuin 3 ja pienempi kuin tuhat), niin ei pistevähennyksiä.
Jos ohjelmaa joudutaan muuttamaan olennaisesti alkuperäisestään, niin -1 p.
Jos annettu tapa ei ole "matemaattinen" vaan puhtaasti koodaukseen perustuva, niin siitä tavasta max 1 p.

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit vielä palata muokkaamaan vastauksia, tai päättää kokeen.

EE v.23.2.2